

Einführung in die Technische Informatik

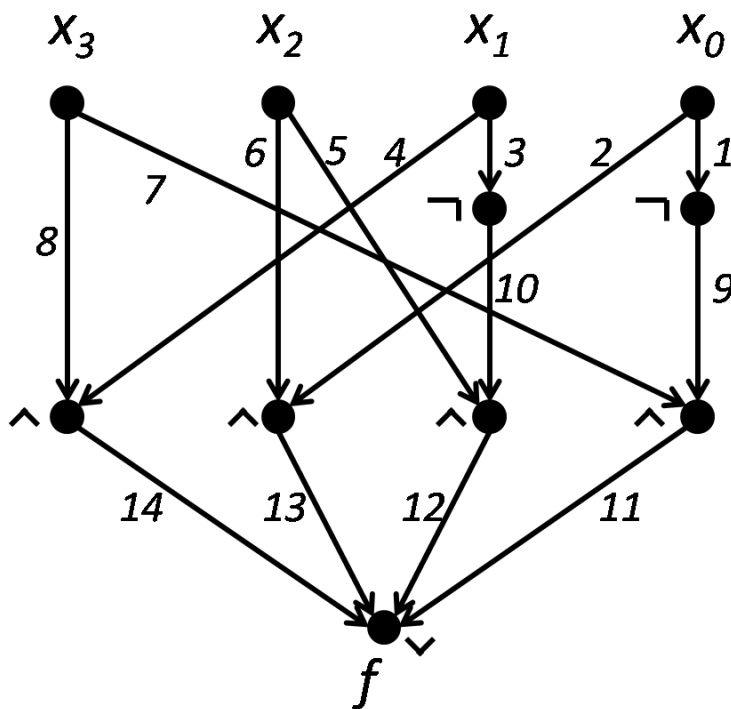
WS 2010/2011

Blatt 3: Musterlösung

ACHTUNG: Die Musterlösung ist ein zusätzliches Serviceangebot. Sie erhebt weder Anspruch auf Vollständigkeit noch auf Korrektheit.

Aufgabe 1: (★) Fehlerdiagnose bei unterschiedlichen Fehlverhalten

Die Funktion f sei durch den folgenden Graphen gegeben:



- Geben Sie einen Term für die Funktion $f(x_3, x_2, x_1, x_0)$ an. Erstellen Sie die Wertetabelle für f .
- Finden Sie alle Fehlerklassen und geben Sie die reduzierte Ausfallmatrix an. Nehmen Sie an, dass zu jedem Zeitpunkt höchstens ein Draht fehlerhaft ist, wobei ein Stuck-at-Zero Fehlverhalten vorliegt.
- Welche Fehlerklassen sind eindeutig identifizierbar und welche nicht? Erstellen Sie eine Testsequenz der Testwerte für die identifizierbaren Fehlerklassen.

- d) Bei einem Test stellen Sie fest, dass das Schaltnetz für $(1011)_2$ ein fehlerhaftes Ergebnis liefert. Welche Drähte können für den Fehler verantwortlich sein?
- e) Nehmen Sie nun an, dass höchstens ein Draht gerissen ist, wobei ein *Stuck-at-One* Fehlverhalten vorliegt. Vergleichen Sie die Resultate mit den Ergebnissen beim Stuck-at-Zero Fehlverhalten: Können Fehler nun durch weniger Testfälle lokalisiert werden? Stellen Sie hierzu die Fehlermatrix beim Stuck-at-One Fehlverhalten auf.

Lösungsvorschlag

- a) Die Funktion f lautet:

$$f = x_2\overline{x_1} + x_2x_0 + x_3\overline{x_0} + x_3x_1$$

Die Wertetabelle der Funktion f :

x_3	x_2	x_1	x_0	f	x_3	x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

- b) Fehlerklassen findet man, indem man f für jeden Draht erneut berechnet, unter der Annahme, dass dieser Draht gebrochen ist (0-Klemmung). Fehler, die die gleiche Funktion erzeugen, definieren eine Fehlerklasse. Wir haben hier sechs Fehlerklassen.

$$f_1 = x_2\overline{x_1} + x_2x_0 + x_3 \quad (1)$$

$$f_2 = f_6 = f_{13} = x_2\overline{x_1} + x_3\overline{x_0} + x_3x_1 \quad (2)$$

$$f_3 = x_2 + x_3\overline{x_0} + x_3x_1 \quad (3)$$

$$f_4 = f_8 = f_{14} = x_2\overline{x_1} + x_2x_0 + x_3\overline{x_0} \quad (4)$$

$$f_5 = f_{10} = f_{12} = x_2x_0 + x_3\overline{x_0} + x_3x_1 \quad (5)$$

$$f_7 = f_9 = f_{11} = x_2\overline{x_1} + x_2x_0 + x_3x_1 \quad (6)$$

Die reduzierte Ausfallmatrix besteht aus den Fehlerfunktionen der Fehlerklassen:

x_3	x_2	x_1	x_0	f	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

- c) Um die identifizierbaren Fehlerklassen zu finden, muss man die Fehlermatrix aufstellen. Die Fehlermatrix hebt den Unterschied (durch XOR \oplus) zwischen f und jeder Fehlerklasse hervor:

x_3	x_2	x_1	x_0	f	$f \oplus f_1$	$f \oplus f_2$	$f \oplus f_3$	$f \oplus f_4$	$f \oplus f_5$	$f \oplus f_7$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

In diesem Fall sind alle Fehlerklassen eindeutig identifizierbar, weil jede Fehlerklasse sich von f und von allen anderen Fehlerklassen an mindestens einer Stelle (Eingabewert) unterscheidet. Deshalb kann man die Fehlerklassen mit der folgenden Sequenz identifizieren:

- $(1001)_2$ für Fehlerklasse f_1 .

- $(0111)_2$ für Fehlerklasse f_2 .
- $(0110)_2$ für Fehlerklasse f_3 .
- $(1011)_2$ für Fehlerklasse f_4 .
- $(0100)_2$ für Fehlerklasse f_5 .
- $(1000)_2$ für Fehlerklasse f_7 .

d) An der Fehlermatrix kann man ablesen, dass das Fehlverhalten nur durch die Fehlerklasse f_4 verursacht werden kann. Das bedeutet, dass einer der Drähte 4, 8 oder 14 gebrochen ist.

e) Für die Fehlerklassen bei einem Stuck-at-One Fehlverhalten ergibt sich:

$$f_1 = x_3 x_1 + x_2 x_0 + x_2 \overline{x_1} \quad (1)$$

$$f_2 = f_{10} = x_2 + x_3 x_1 + x_3 \overline{x_0} \quad (2)$$

$$f_3 = x_3 x_1 + x_2 x_0 + x_3 \overline{x_0} \quad (3)$$

$$f_4 = f_9 = x_3 + x_2 x_0 + x_2 \overline{x_1} \quad (4)$$

$$f_5 = \overline{x_1} + x_3 + x_2 x_0 \quad (5)$$

$$f_6 = x_0 + x_3 + x_2 \overline{x_1} \quad (6)$$

$$f_7 = \overline{x_0} + x_2 + x_3 x_1 \quad (7)$$

$$f_8 = x_1 + x_2 + x_3 \overline{x_0} \quad (8)$$

$$f_{11} = f_{12} = f_{13} = f_{14} = 1 \quad (9)$$

Als reduzierte Ausfallmatrix erhält man:

x_3	x_2	x_1	x_0	f	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_{11}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Bestimme die identifizierbaren Fehlerklassen über die Fehlermatrix:

x_3	x_2	x_1	x_0	f	$f \oplus f_1$	$f \oplus f_2$	$f \oplus f_3$	$f \oplus f_4$	$f \oplus f_5$	$f \oplus f_6$	$f \oplus f_7$	$f \oplus f_8$	$f \oplus f_{11}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Alle Fehlerklassen sind eindeutig identifizierbar. Es werden mehr Testfälle als bei einem Stuck-at-Zero Fehlverhalten benötigt.

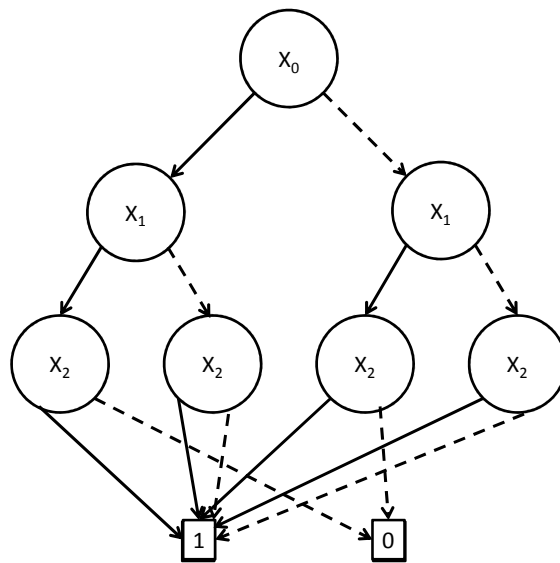
Aufgabe 2: (★) Konstruktion und Minimierung von OBDDs

Die Funktion f sei durch folgenden Term gegeben: $f(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_1} + x_2 \cdot x_1$

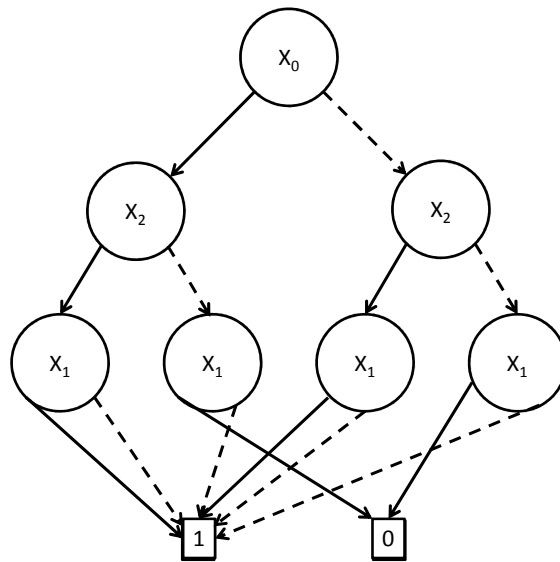
- Stellen Sie die Funktion f als OBDDs mit allen 6 möglichen Variablenordnungen dar.
- Minimieren Sie jedes der 6 OBDDs so weit wie möglich und geben Sie für jedes OBDD den minimierten Term an.
- Minimieren Sie die gegebene Funktion nun mithilfe der Booleschen Algebra soweit wie möglich. Vergleichen Sie das resultierende Minimalpolynom mit den minimierten Termen aus Teil b). Führt eine der 6 Variablenordnungen zum Minimalpolynom? Falls ja, welche?

Lösungsvorschlag

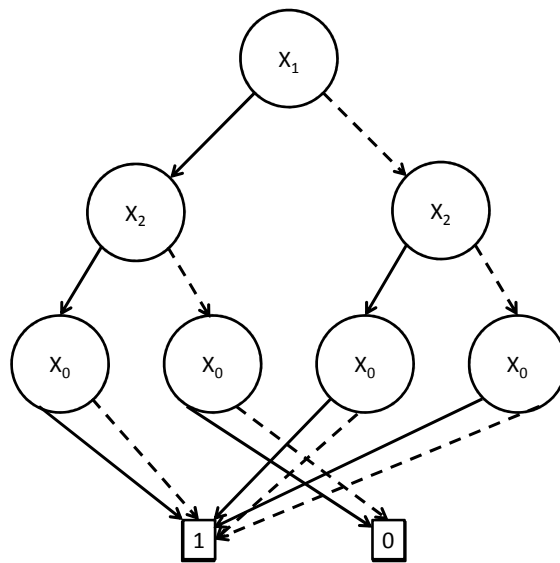
- Die OBDDs sind gegeben durch:



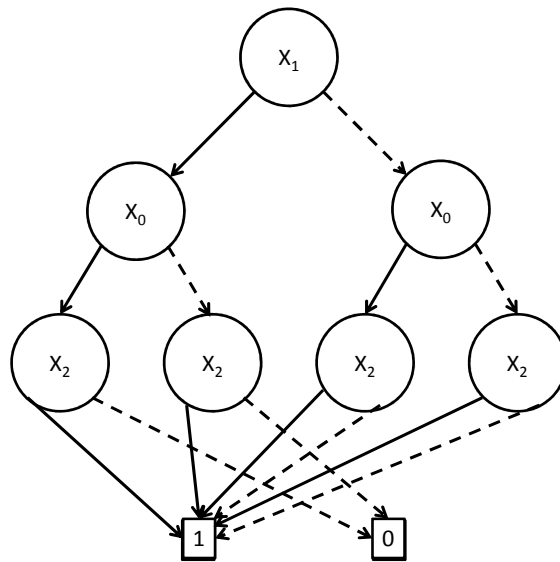
Variablenordnung $x_0 < x_1 < x_2$



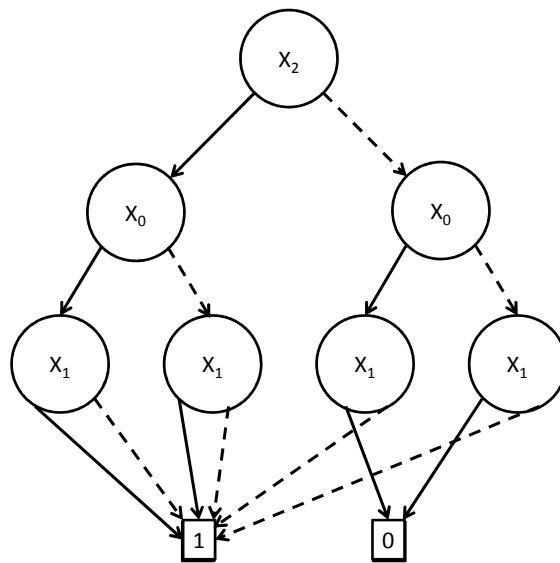
Variablenordnung $x_0 < x_2 < x_1$



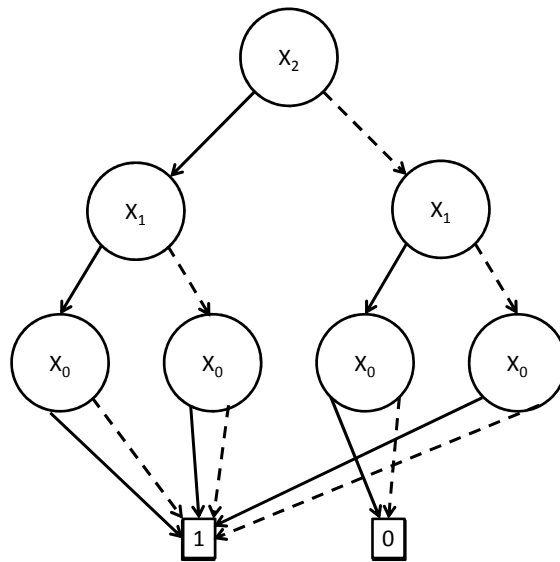
Variablenordnung $x_1 < x_2 < x_0$



Variablenordnung $x_1 < x_0 < x_2$



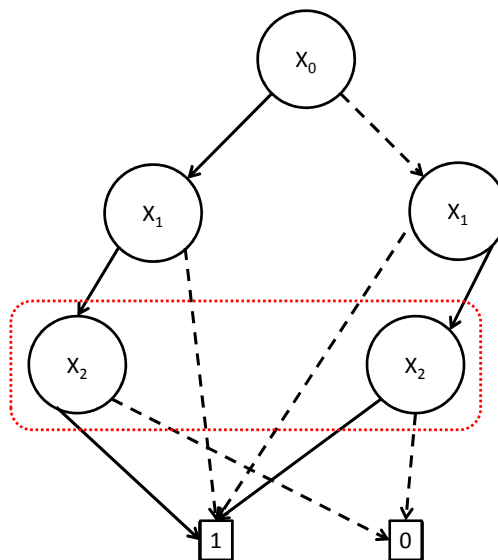
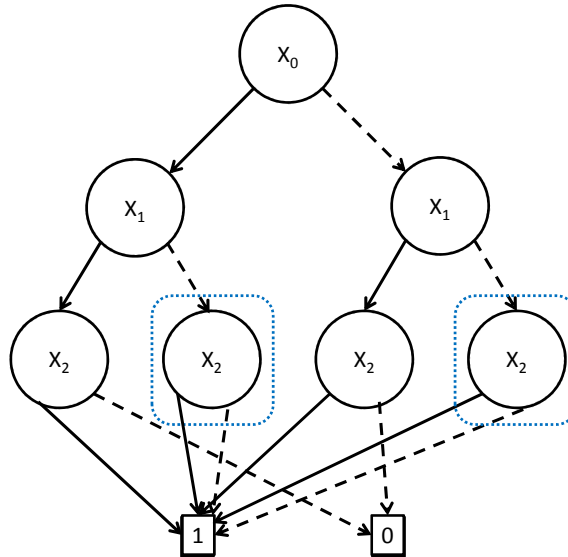
Variablenordnung $x_2 < x_0 < x_1$

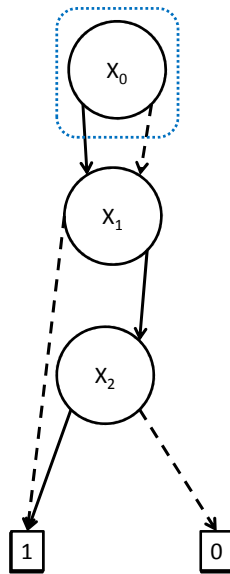
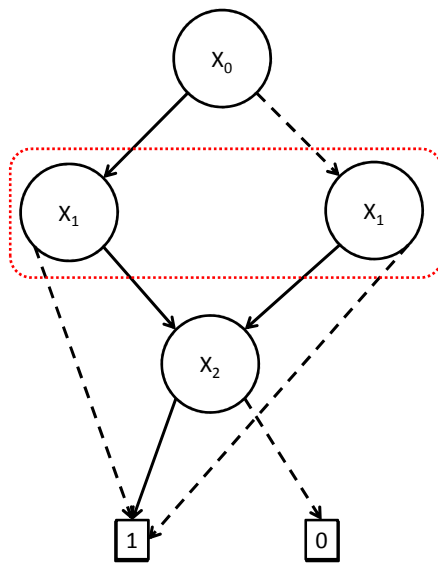


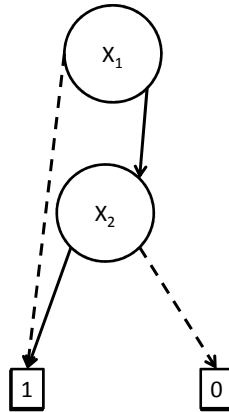
Variablenordnung $x_2 < x_1 < x_0$

b) Im Folgenden sind Eliminationen in blau und Verjüngungen in rot dargestellt.

- Variablenordnung $x_0 < x_1 < x_2$:

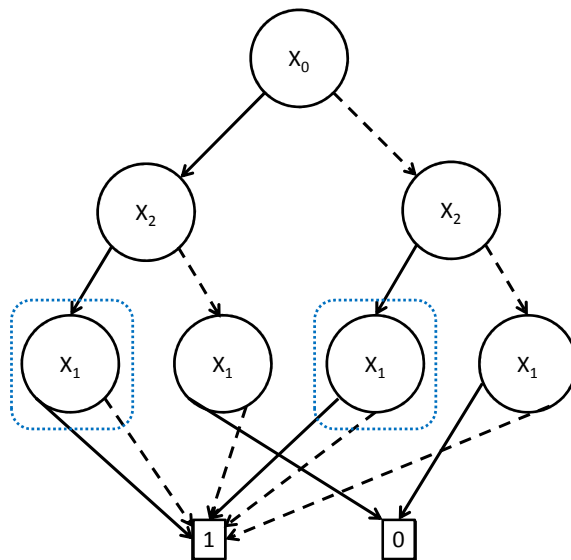


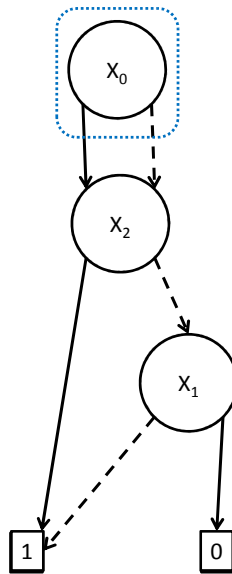
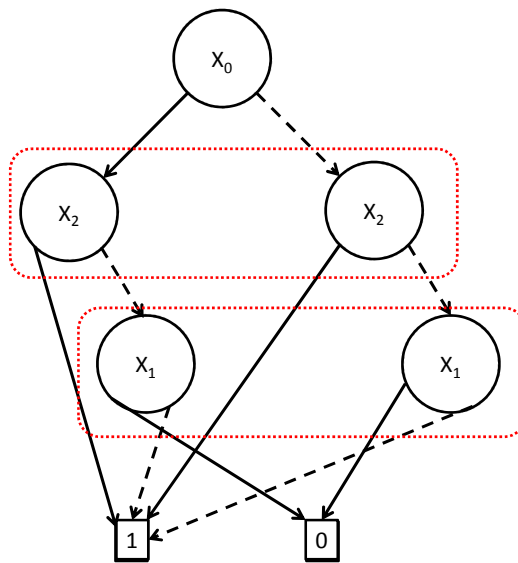


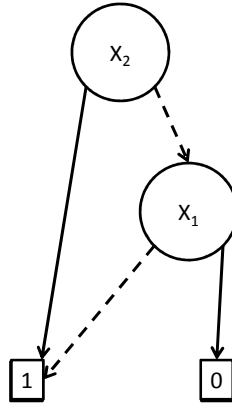


Als minimierte Funktion ergibt sich $\overline{x_1} + x_1 x_2$.

- Variablenordnung $x_0 < x_2 < x_1$:

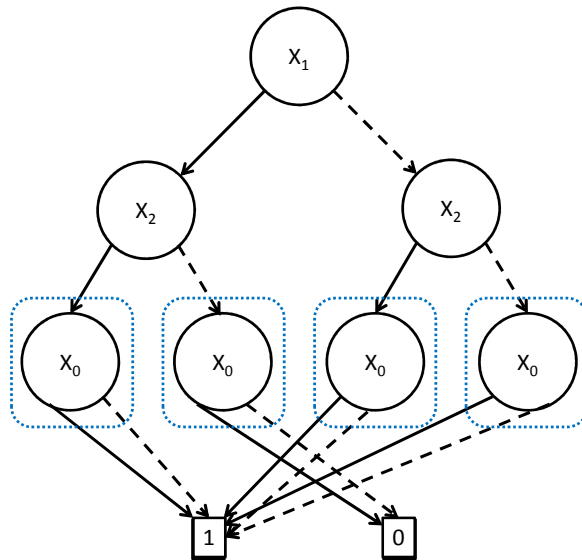


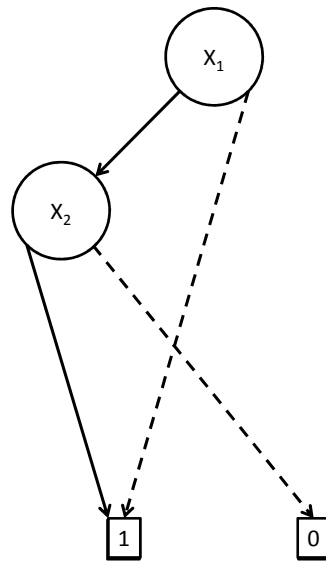
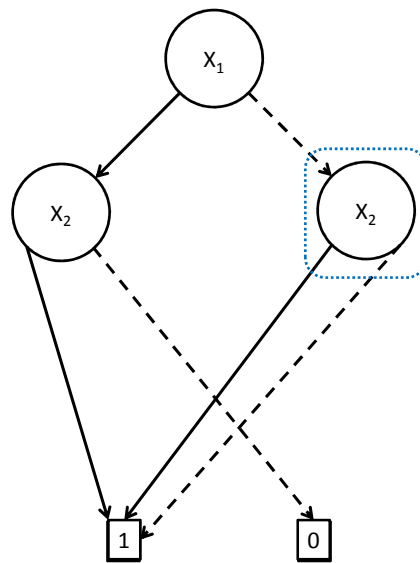




Als minimierte Funktion ergibt sich $x_2 + \overline{x_2} \overline{x_1}$.

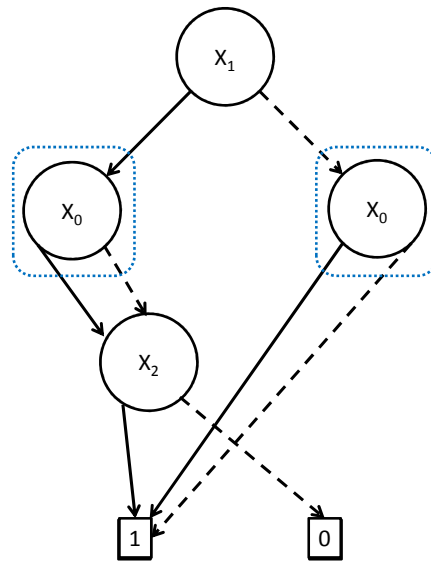
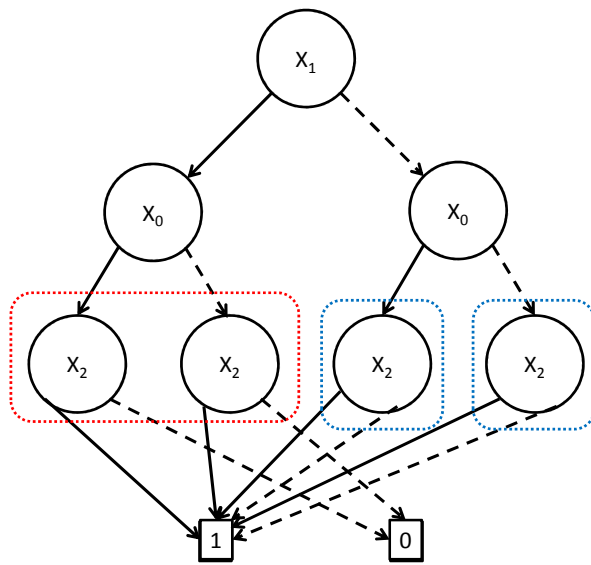
- Variablenordnung $x_1 < x_2 < x_0$:

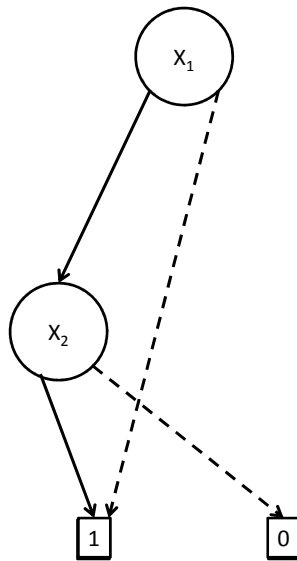




Als minimierte Funktion ergibt sich $x_1 x_2 + \overline{x_1}$.

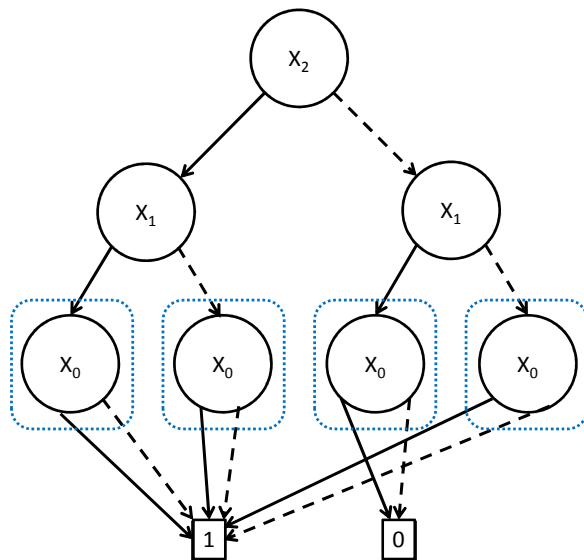
- Variablenordnung $x_1 < x_0 < x_2$:

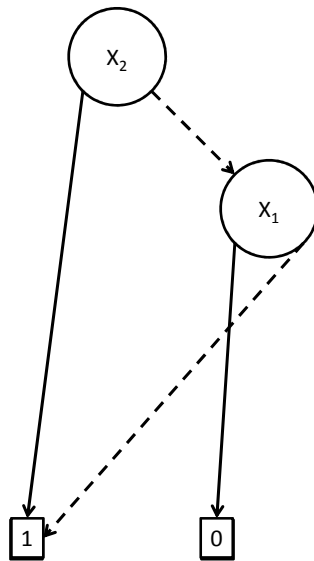
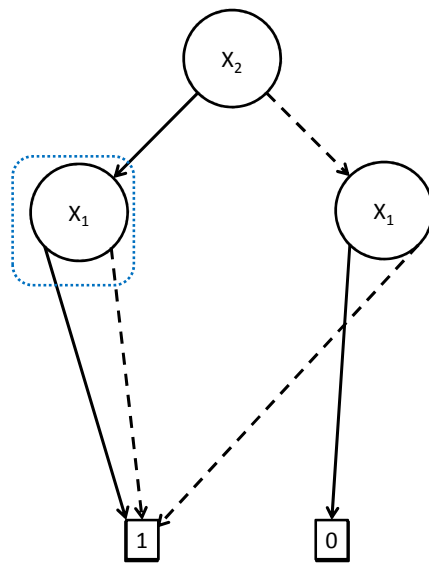




Als minimierte Funktion ergibt sich $x_1 x_2 + \overline{x_1}$.

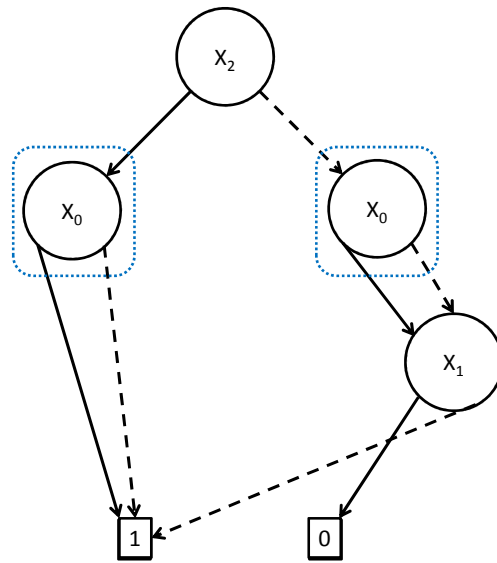
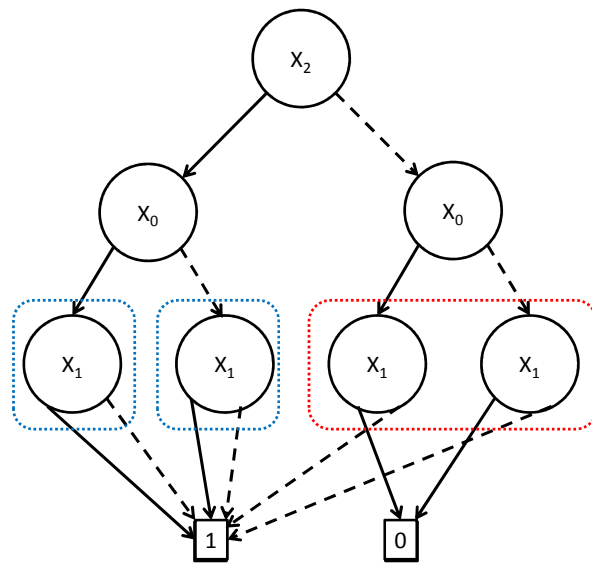
- Variablenordnung $x_2 < x_1 < x_0$.

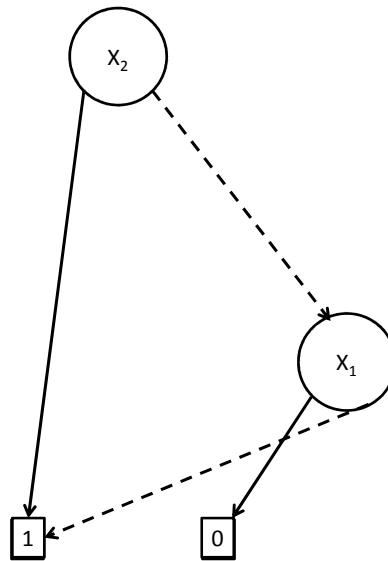




Als minimierte Funktion ergibt sich $x_2 + \overline{x_2} \overline{x_1}$.

- Variablenordnung $x_2 < x_0 < x_1$.





Als minimierte Funktion ergibt sich $x_2 + \overline{x_2} \overline{x_1}$.

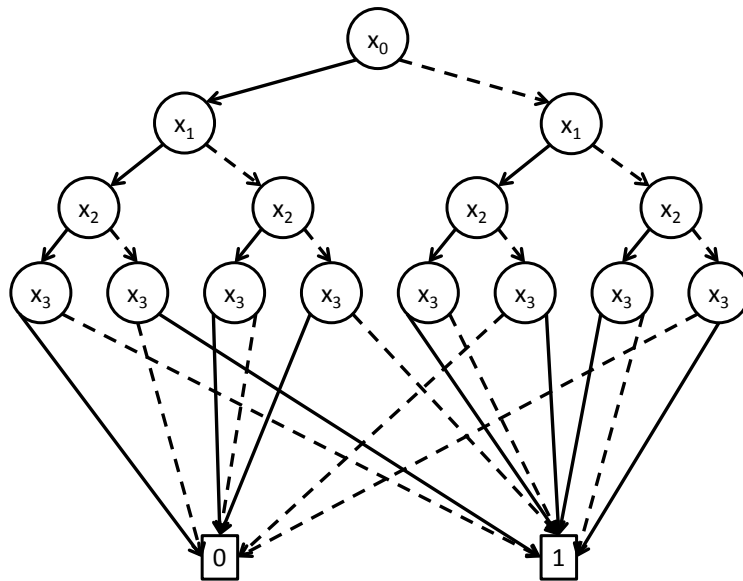
c) Die Minimalpolynom ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 f &= \overline{x_1} + x_2 x_1 \\
 &= (x_2 + \overline{x_2}) \overline{x_1} + x_2 x_1 \\
 &= x_2 \overline{x_1} + \overline{x_2} \overline{x_1} + x_2 x_1 \\
 &= x_2 + \overline{x_1}
 \end{aligned}$$

Keine der Variablenordnungen liefert das Minimalpolynom.

Aufgabe 3: OBDDs

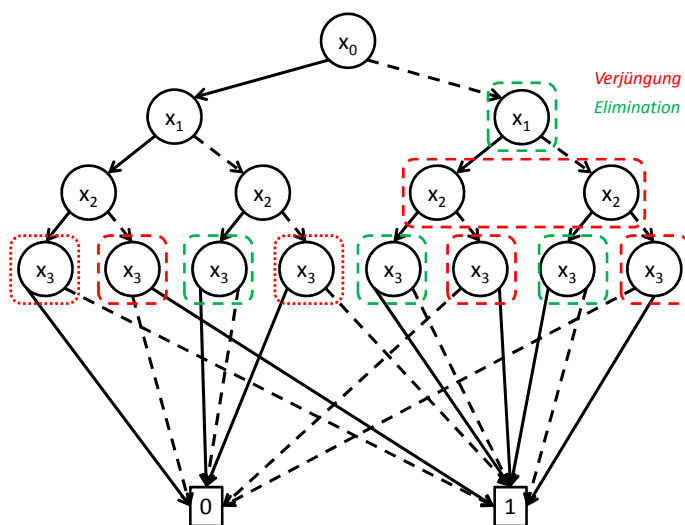
Gegeben sei das folgende OBDD (Variablenordnung $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$):

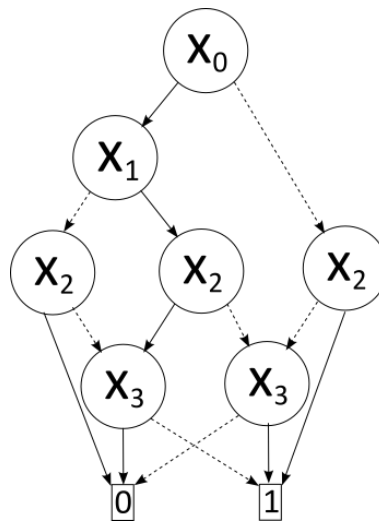


- a) Minimieren Sie das OBDD soweit wie möglich und geben Sie jeden Schritt an. In einem Schritt dürfen Sie mehrere Transformationen des gleichen Typs (entweder Verjüngung oder Elimination) anwenden. Geben Sie zu jedem Schritt den Transformationstyp an.
- b) Ist das Ergebnis minimal? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag

- a) Man kann dieses OBDD mit einem Schritt vereinfachen.





- b) Das OBDD liefert als minimierte Funktion zur Variablenordnung $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$:

$$f = x_3 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot \overline{x_0} + \overline{x_3} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 + x_3 \cdot \overline{x_2} \cdot x_1 \cdot x_0 + \overline{x_3} \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot x_0$$

Dagegen ist die minimale Form von f gegeben durch:

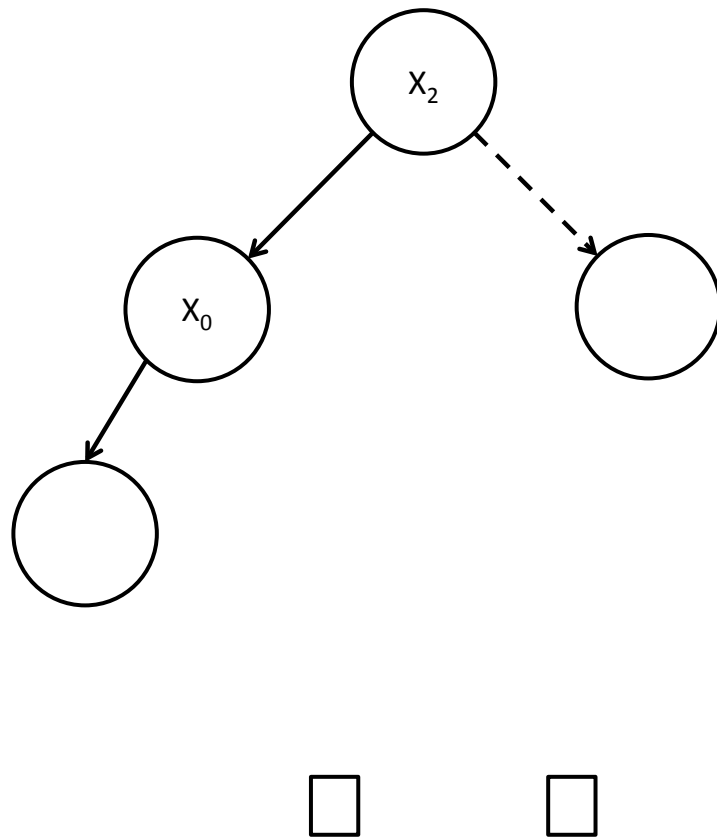
$$f = x_2 \overline{x_0} + x_3 \overline{x_0} + \overline{x_3} x_2 x_1 + x_3 \overline{x_2} x_1 + \overline{x_3} \overline{x_2} \overline{x_1} x_0$$

Die Ordnung der Variablen entscheidet, wie gut eine Funktion minimiert wird.

Aufgabe 4: OBDDs

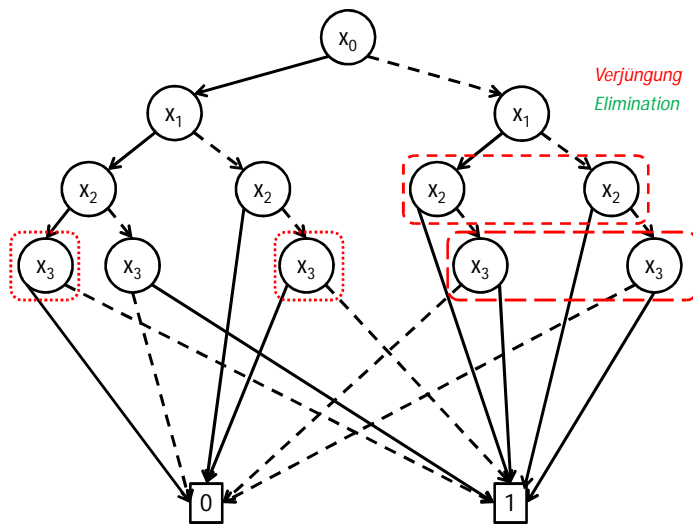
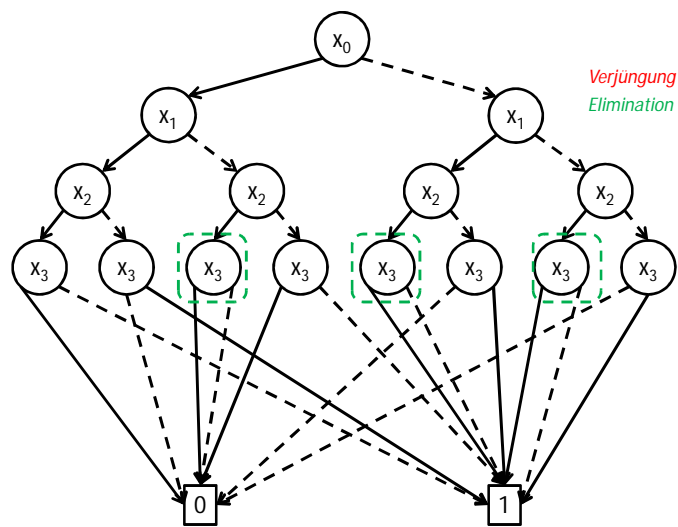
Gegeben sei die Boolesche Funktion $f(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2 + x_0} + x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 + \overline{x_2} \cdot x_0$.

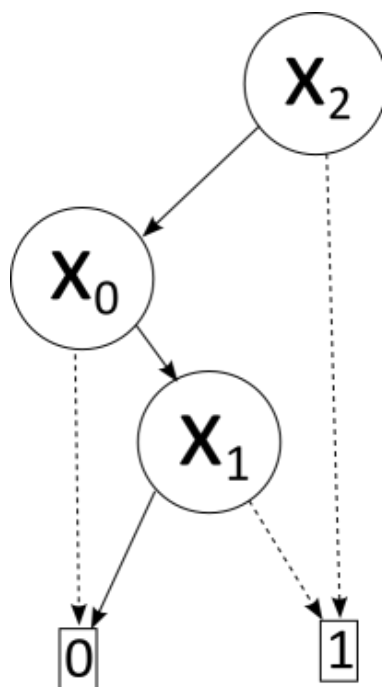
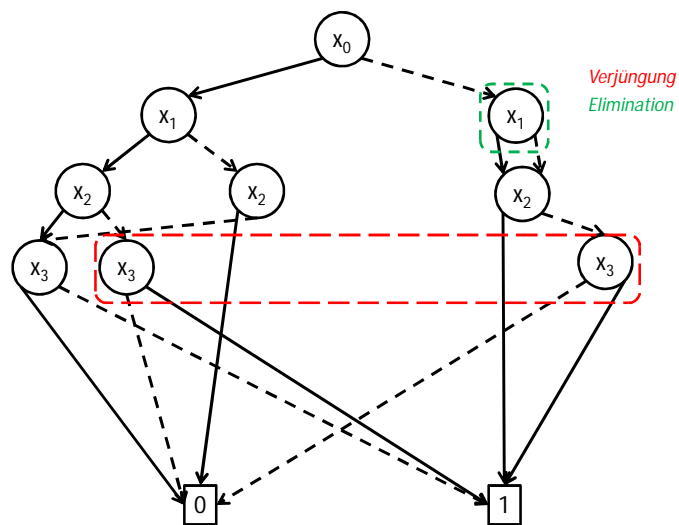
- Vervollständigen Sie das OBDD zur Variablenordnung $x_2 < x_0 < x_1$, sodass es der Funktion f entspricht.
- Minimieren Sie das OBDD soweit wie möglich. Ist das Ergebnis minimal? Begründen Sie Ihre Antwort.



Lösungsvorschlag

a) Vereinfache das OBDD durch Anwendung von Verjüngung und Elimination:





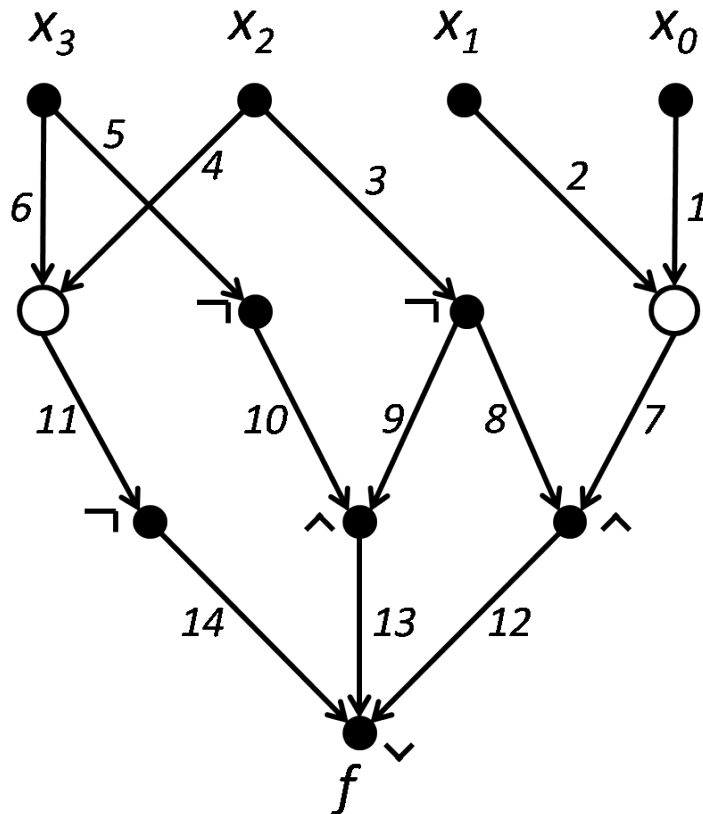
- b) Das OBDD liefert als minimierte Funktion $f = x_2 \bar{x}_1 x_0 + \bar{x}_2$. Mittels Boolescher Algebra erhält man für das Minimalpolynom:

$$\begin{aligned}
f &= \overline{x_2 + x_0} + x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 + \overline{x_2} \cdot x_0 \\
&= \overline{x_2} \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 + \overline{x_2} \cdot x_0 \\
&= \overline{x_2} \overline{x_0} (x_1 + \overline{x_1}) + x_2 \overline{x_1} x_0 + \overline{x_2} x_0 (x_1 + \overline{x_1}) \\
&= \overline{x_2} \overline{x_1} \overline{x_0} + \overline{x_2} x_1 \overline{x_0} + x_2 \overline{x_1} x_0 + \overline{x_2} \overline{x_1} x_0 + \overline{x_2} x_1 x_0 \\
&= \overline{x_2} \overline{x_0} + \overline{x_2} x_1 + \overline{x_2} x_0 + \overline{x_2} \overline{x_1} + \overline{x_1} x_0 \\
&= \overline{x_2} + \overline{x_1} x_0
\end{aligned}$$

Das minimierte OBDD zur Variablenordnung $x_2 < x_0 < x_1$ stimmt nicht mit dem Minimalpolynom überein.

Aufgabe 5: Fehlerdiagnose

- a) Gegeben sei die folgende Funktion $f = \overline{x_2} \cdot (x_1 + x_0) + \overline{x_3} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_3} \cdot x_2$. Vervollständigen Sie das Schaltnetz an den gekennzeichneten Stellen, sodass es der Funktion f entspricht.

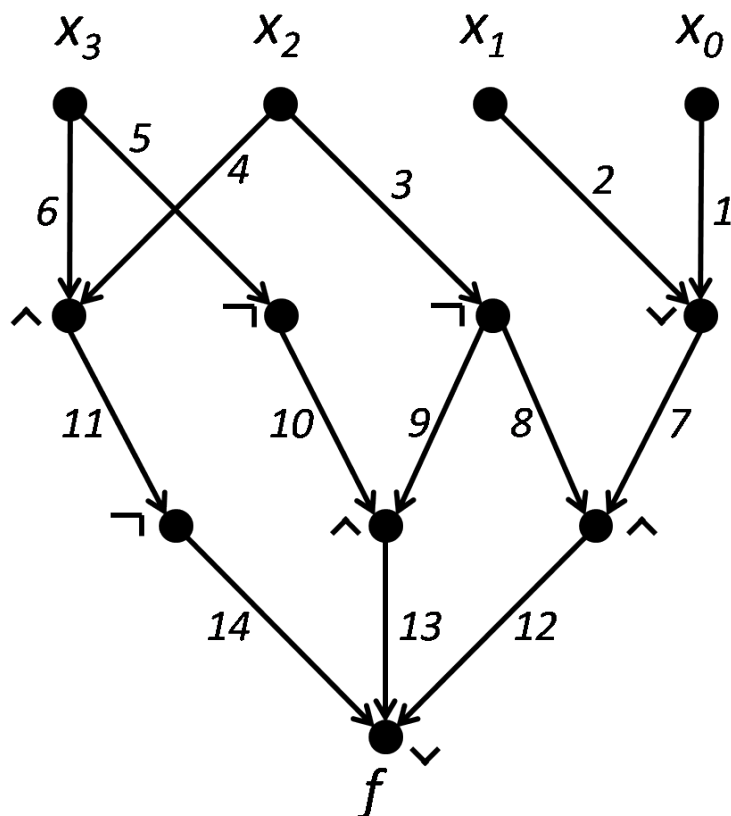


- b) Minimieren Sie die Funktion f mit Hilfe der Booleschen Algebra soweit wie möglich und erstellen Sie die Wertetabelle zu f .

- c) Finden Sie alle Fehlerklassen und geben Sie die reduzierte Ausfallmatrix an. Nehmen Sie an, dass zu jedem Zeitpunkt höchstens ein Draht fehlerhaft ist, wobei ein Stuck-at-Zero Fehlverhalten vorliegt.
- d) Welche Fehlerklassen sind eindeutig identifizierbar und welche nicht? Erstellen Sie eine Testsequenz der Testwerte für die identifizierbaren Fehlerklassen.

Lösungsvorschlag

- a) Der vervollständigte DAG:



- b) Minimierung von f :

$$\begin{aligned}
f &= \overline{x_2} \cdot (x_1 + x_0) + \overline{x_2} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \\
&= \overline{x_2} \cdot (x_1 + x_0) + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} + \overline{x_3} \\
&= \overline{x_2} \cdot (x_1 + x_0) + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot 1 + \overline{x_3} \\
&= \overline{x_2} \cdot (x_1 + x_0) + \overline{x_2} \cdot \underbrace{(\overline{x_3} + 1)} + \overline{x_3} \\
&= \overline{x_2} \cdot (x_1 + x_0) + \overline{x_2} \cdot 1 + \overline{x_3} \\
&= \overline{x_2} \cdot \underbrace{((x_1 + x_0) + 1)} + \overline{x_3} \\
&= \overline{x_2} \cdot 1 + \overline{x_3} \\
&= \overline{x_2} + \overline{x_3}
\end{aligned}$$

Die Wertetabelle der Funktion f :

x_3	x_2	x_1	x_0	f	x_3	x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0

- c) Fehlerklassen findet man, indem man für jede unterbrochene Transition (0-Klemmung) die resultierende Funktion f aufstellt. Drähte, die zur gleichen Funktion führen, definieren eine Fehlerklasse. Wir haben hier vier Fehlerklassen.

$$f_1 = f_2 = f_5 = f_7 = f_8 = f_9 = f_{10} = f_{12} = f_{13} = \overline{x_3} + \overline{x_2} \quad (1)$$

$$f_3 = \overline{x_2} + x_0 + x_1 + \overline{x_3} \quad (2)$$

$$f_4 = f_6 = f_{11} = 1 \quad (3)$$

$$f_{14} = \overline{x_3} \overline{x_2} + \overline{x_2} x_0 + \overline{x_2} x_1 \quad (4)$$

Die reduzierte Ausfalltafel besteht aus den Fehlerfunktionen der Fehlerklassen:

f	f_1	f_3	f_4	f_{14}
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	0
1	1	1	1	0
1	1	1	1	0
1	1	1	1	0
1	1	1	1	0
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	1	1	0
0	0	1	1	0

- d) Um identifizierbare Fehlerklassen zu finden, muss man die Fehlermatrix erstellen. Die Fehlermatrix hebt den Unterschied (durch XOR \oplus) zwischen f und jeder Fehlerklasse hervor:

x_3	x_2	x_1	x_0	f	$f \oplus f_1$	$f \oplus f_3$	$f \oplus f_4$	$f \oplus f_{14}$
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1	0

In diesem Fall ist nur f_4 und f_{14} eindeutig identifizierbar, weil sie sich von f und von dem Rest der Fehlerklassen an mindestens einer Stelle (Eingabewert) unterscheiden. f_1 unterscheidet sich von f an keiner Stelle und ist deshalb durch keinen der 15 Testwerte identifizierbar. f_3 unterscheidet sich von f an drei Stellen ($(1101)_2$, $(1110)_2$ und $(1111)_2$) aber von f_4 nur bei dem Eingabewert $(1100)_2$, und ist deshalb nicht *eindeutig* identifizierbar sondern bedingt. Ein entsprechender Test ist nur mit der

Annahme erfolgreich, dass nur ein Draht gebrochen ist. Das heißt, man kann f_3 , f_4 und f_{14} mit der folgenden Testsequenz identifizieren:

- $(0100)_2$, $(0101)_2$, $(0110)_2$, $(0111)_2$ oder $(1000)_2$ für Fehlerklasse f_{14} . Falls durch diese Eingaben eine 1 erzielt wird, kann die Testsequenz abgebrochen werden.
- $(1100)_2$ für Fehlerklasse f_4 . Falls das Resultat eine 1 ist, sind keine weiteren Tests erforderlich.
- Falls $(1100)_2$ keinen Fehler liefert, testet man mit $(1101)_2$, $(1110)_2$ oder $(1111)_2$. Falls einer dieser Eingabewerte zu einer 1 führt, liegt eine 0-Klemmung an der dritten Transition vor.
- Ende der Testsequenz.