Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2000

1. Übung Logik II
Abgabe: Dienstag, den 25.4.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 1:

Variante der Russellschen Antinomie.

(a) Erläutern Sie in Worten, was das Axiom aussagt, das man durch Anwendung des Schemas der vollen Komprehension auf die Formel $\psi(x) := \neg\exists u(x \in u \wedge u \in x)$ erhält.

(b) Zeigen Sie, das dieses Axiom inkonsistent ist.

Aufgabe 2:

Zur Erinnerung: $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{ZFC} \models \forall x \forall y \forall x' \forall y' ((x, y) = (x', y') \rightarrow (x = x' \wedge y = y')).$$

Aufgabe 3:

Welche der folgenden Klassen sind Mengen. Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $\{x : \exists z \; x = \{z\}\}$

b) $\{x : \neg\exists z \; z \in x\}$.

c) $\{x : x \neq \{x\}\}$.

d) $\{\{x\} : \forall z \; (\text{“}z \text{ ist induktiv”} \; \rightarrow x \in z\}$.

Aufgabe 4:

$\mathrm{TC}(x)$, die transitive Hülle der Menge x, ist die kleinste transitive Menge, welche x enthält. Zeigen Sie, dass $\mathrm{TC}(x)$ existiert und eindeutig bestimmt ist.
Hinweis: Intuitiv ist $\mathrm{TC}(x) = x \cup \bigcup x \cup \bigcup\bigcup x \cup \cdots$. Benutzen Sie das Rekursionstheorem für ω, um die Existenz einer Funktion f mit $\mathrm{Def}(f) = \omega$ und $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{TC}(x)$ nachzuweisen.

Aufgabe 5:

Definieren Sie mit Hilfe des Rekursionstheorems die Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen.

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2000

2. Übung Logik II

Abgabe: Dienstag, den 2.5.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 6:

Sei X eine nicht-leere Menge von Ordinalzahlen.

(a) Zeigen Sie, dass $\bigcup X := \{y : (\exists z \in X)(y \in z)\}$ und $\bigcap X := \{y : (\forall z \in X) y \in z)\}$ Ordinalzahlen sind.

(b) Geben Sie $\bigcup X$ und $\bigcap X$ für $X = \{\varnothing\}$, $X = \{n \in \omega : n \text{ gerade}\}$, $X = \omega$ und $X = \omega \cup \{\omega\}$ an.

(c) Zeigen Sie, dass $\bigcup X$ die kleinste Ordinalzahl β ist, so dass $\alpha \leq \beta$ für alle $\alpha \in X$.

(d) Geben Sie eine entsprechende Beschreibung von $\bigcap X$ an.

(e) Zeigen Sie, dass für jede Ordinalzahl α gilt: $\alpha = \bigcup \alpha \iff \alpha$ ist Limeszahl.

Aufgabe 7:

Zeigen Sie, dass zu jeder Ordinalzahl α eine Limeszahl $\lambda > \alpha$ existiert.
Hinweis: Aufgrund des ω-Rekursionstheorems existiert eine Funktion f mit $f(0) = \alpha$, $f(n+1) = f(n) \cup \{f(n)\}$.

Aufgabe 8:

Zur Erinnerung: die von Neumannsche Hierarchie $(V_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{On}}$ ist definert durch $V_0 := \varnothing$, $V_{\alpha+1} := \mathrm{Pot}(V_\alpha)$ und $V_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ für Limeszahlen λ. V_ω ist die Menge der hereditär endlichen Mengen.

(a) Wie mächtig ist V_ω?

(b) Geben Sie eine Menge an die endlich, aber nicht hereditär endlich ist.

(c) Zeigen Sie, dass eine Menge hereditär endlich ist genau dann, wenn ihre transitive Hülle endlich ist.

(d) Der Graph $G = (V_\omega, E)$ sei durch Symmetrisierung von $(V_\omega, \in)$ definiert, d.h. $E := \{(a,b) \in V_\omega \times V_\omega : a \in b \vee b \in a\}$. Zeigen Sie, dass $G = (V, E)$ folgende Erweiterungsaxiome erfüllt: Zu paarweise verschiedenen $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in V_\omega$ existiert immer ein $c \in V_\omega$, so dass $(a_i, c) \in E$ und $(b_j, c) \notin E$ für alle $i \leq m, j \leq n$.

Aufgabe 9:

Für lineare Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$ und $\mathfrak{B} = (B, <)$ definiert man deren geordnete Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ als $(A \dot\cup B, <)$ mit $a < b$ für alle $a \in A$, $b \in B$ (und $<$ auf A und B wie gehabt).

(a) Zeigen Sie, dass die geordnete Summe zweier Wohlordnungen wieder eine Wohlordnung ist.

(b) Für Ordinalzahlen α, β sei $\alpha + \beta$ die geordnete Summe von α und β. Zeigen Sie, dass diese Addition auf ω mit der üblichen Addition übereinstimmt.

(c) Gilt $1 + \alpha = \alpha + 1$ für unendliche Ordinalzahlen α?

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2000

4. Übung Logik II
Abgabe: Dienstag, den 16.5.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 14:

Formulieren Sie (unter Verwendung geigneter Abkürzungen) die Kontinuumshypothese als Formel CH $\in$ FO($\{\in\}$).

Aufgabe 15:

(a) Seien $\kappa, \lambda \in C_n$ und sei, für alle $i < \kappa$, x_i eine Menge mit $|x_i| \leq \lambda$.
Zeigen Sie, dass $|\bigcup\{x_i \ : \ i < \kappa\}| \leq \kappa \cdot \lambda$.

(b) Sei $x^* := \{f : n \longrightarrow x \mid n \in \omega\}$. Bestimmen Sie $|x^*|$ in Abhängigkeit von $|x|$.

(c) Sei τ eine Signatur der Mächtigkeit κ. Bestimmen Sie die Mächtigkeit von FO(τ).

(d) Zeigen Sie, dass jede Menge von Kardinalzahlen eine kleinste obere Schranke in Cn besitzt.
Hinweis: Für $X \subseteq$ On ist das Supremum von $\{\aleph_\alpha \ : \ \alpha \in X\}$ in Cn gerade $\aleph_{\bigcup X}$.

Aufgabe 16:

Eine Kardinalzahl λ is *regulär*, falls λ nicht Vereinigung von weniger als λ Kardinalzahlen ist, die sämtlich kleiner als λ sind. Zeigen Sie, dass $\aleph_0$ und $\aleph_1$ (sogar alle Nachfolgerkardinalzahlen) regulär sind.

Aufgabe 17:

Für Logiken $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ bedeute $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$, dass jede Formel aus $\mathcal{L}$ zu einer Formel aus $\mathcal{L}'$ äquivalent ist. Weiter sei $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}'$ genau dann, wenn $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ und $\mathcal{L}' \leq \mathcal{L}$, sowie $\mathcal{L} < \mathcal{L}'$, wenn $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}'$ und $\mathcal{L} \not\equiv \mathcal{L}'$.

(a) Zu einer Logik $\mathcal{L}$ sei $\mathcal{L}^-$ das =-freie Fragment von $\mathcal{L}$, d.h. die Menge aller $\mathcal{L}$-Formeln, in denen = nicht vorkommt. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

(i) $\text{FO}^- \equiv \text{FO}$

(ii) $\text{MSO}^- \equiv \text{MSO}$

(iii) $\text{SO}^- \equiv \text{SO}$

(b) Zeigen Sie, dass wSO $<$ SO.

(c) Gilt der Kompaktheitssatz für wSO?

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2000

5. Übung Logik II

Abgabe: Dienstag, den 23.5.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 18:

Zeigen Sie, dass für wSO der Satz von Löwenheim-Skolem (abwärts) gilt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass wSO$< L_{\omega_1\omega}$.

Aufgabe 19:

(a) Zeigen Sie, dass jede SO-Formel äquivalent ist zu einer SO-Formel der Form $Q_1X_1 \cdots Q_rX_r\varphi$ wobei $Q_i \in \{\exists, \forall\}$, X_i Relationssymbole, und $\varphi \in$ FO.

(b) Das existentielle Fragment von SO (kurz ESO oder Σ^1_1) besteht aus den SO-Formeln der Gestalt $\exists X_1 \cdots \exists X_r\varphi$ mit φ in SO. Zeigen Sie, dass für Σ^1_1 der Kompaktheitssatz und die Sätze von Löwenheim-Skolem gelten.

(c) Konstruieren Sie zu jedem MSO-Satz ψ über der Struktur $(\omega, <, 0)$ einen FO-Satz ψ' über der Struktur $(\mathrm{Pot}(\omega), \subseteq, S)$, wobei $S = \{(X, Y) : X = \{x\}, Y = \{y\}$ sind Einermengen, und $y = x{+}1\}$, so dass

$$(\omega, <, 0) \models \psi \iff (\mathrm{Pot}(\omega), \subseteq, S) \models \psi'.$$

Gilt auch die Umkehrung?

(d) Betrachten Sie dieselbe Fragestellung für die Struktur $(\mathbb{N}, +, |_2)$ anstelle von $(\mathrm{Pot}(\omega), \subseteq, S)$, wobei $a \mid_2 b$ genau dann, wenn a eine Zweierpotenz ist, welche b teilt.

Aufgabe 20:

Wir betrachten Kripkestrukturen $\mathcal{K} = (V, E, (P_i)_{i\in I})$. Eine Formel $\psi \in$ ML ist *gültig* in $\mathcal{K}$, wenn $\mathcal{K}, v \models \psi$ für alle Zustände $v \in V$. Eine Formel ist gültig für den *Rahmen* (V, E), wenn sie gültig ist für alle Kripkestrukturen $(V, E, (P_i)_{i\in I})$.

(a) Zeigen Sie, dass Formeln der Form $\Box(\psi \to \varphi) \to (\Box\psi \to \Box\varphi)$ in allen Kripkestrukturen gültig sind.

(b) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) E ist reflexiv.

(ii) Alle Formeln der Form $\Box\psi \to \psi$ sind gültig in (V, E).

(iii) Es gibt eine Aussagenvariable X, so dass $\Box X \to X$ gültig ist in (V, E).

(c) Formulieren und beweisen Sie analoge Äquivalenzen für Formeln der Form $\Box\psi \to \Box\Box\psi$.

(d) Analog für $\psi \to \Box\Diamond\psi$.

(e) Analog für $\Diamond\psi \to \Box\psi$

Aufgabe 21:

Zeigen Sie, dass für jede Signatur τ, $L_{\omega_1\omega}(\tau)$ überabzählbar und $L_{\infty\omega}(\tau)$ keine Menge ist. Finden Sie eine überabzählbare Struktur $\mathfrak{A}$ mit abzählbarer Signatur, für die keine abzählbare Struktur $\mathfrak{B}$ existiert, so dass $\mathfrak{A} \models \psi \iff \mathfrak{B} \models \psi$ für alle $\psi \in L_{\omega_1\omega}$.

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2000

6. Übung Logik II

Abgabe: Dienstag, den 30.5.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 22:

Zeigen Sie, dass $\mathcal{K}, v \sim_n \mathcal{K}', v'$ genau dann, wenn $\mathcal{K}, v \equiv^n_{\mathrm{ML}} \mathcal{K}', v'$. Hinweis: Benutzen Sie die Beweisidee für die Charakterisierung der ML_∞-Äquivalenz durch Bisimulation, zusammen mit der Tatsache, dass bis auf logische Äquivalenz für jedes n (und für jede endliche modale Signatur) nur endlich viele Formeln mit Modaltiefe $\leq n$ existieren.

Aufgabe 23:

Ein *p-Morphismus* von (V, E) nach (V', E') ist eine surjektive Abbildung $f : V \to V'$ so dass für alle $u, v \in V$ gilt: Wenn $(u, v) \in E$, dann $(fu, fv) \in E'$, und wenn $(fu, fv) \in E'$, dann existiert ein w mit $fw = fv$ und $(u, w) \in E$. Ein p-Morphismus von $\mathcal{K} = (V, E, (P_i)_{i\in I})$ nach $\mathcal{K}' = (V', E'(P'_i)_{i\in I})$ ist ein p-Morphismus von (V, E) nach (V', E'), der mit den atomaren Eigenschaften verträglich ist (d.h. $v \in P_i$ gdw. $fv \in P'_i$). Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn f ein p-Morphismus von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}'$ ist, dann ist $\mathcal{K}, v \equiv_{\mathrm{ML}} \mathcal{K}', fv$.

(b) Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Rahmen (V, E) und sei f ein p-Morphismus von einem $(V, E) \in \mathcal{K}$ nach einem $(V', E') \notin \mathcal{K}$. Dann ist $\mathcal{K}$ nicht ML-charakterisierbar (im Sinne von Übung 20), d.h. es gibt keine Menge $\Phi \subseteq \mathrm{ML}$, so dass $(V, E) \in \mathcal{K}$ genau dann, wenn alle Formeln aus Φ in (V, E) gültig sind.

(c) Die Klasse der irreflexiven Rahmen ist nicht ML-charakterisierbar.

(d) Die Klasse der partiellen Ordnungen (d.h. der irreflexiven und transitiven Rahmen) ist nicht ML-charakterisierbar. Hinweis: Für jeden transitiven Rahmen (V', E') kann man einen p-Morphismus von einer partiellen Ordnung $(V' \times \mathbb{N}, E)$ nach (V', E') finden.

Aufgabe 24:

Eine *Simulation* von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}'$ ist definiert wie eine Bisimulation, aber ohne die Her-Bedingung. Wir schreiben $\mathcal{K}, v \preceq \mathcal{K}', v'$, wenn eine Simulation Z von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}'$ existiert mit $(v, v') \in Z$.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: $\mathcal{K}, v$ und $\mathcal{K}', v'$ sind bisimilar, genau dann, wenn $\mathcal{K}, v \preceq \mathcal{K}', v'$ und $\mathcal{K}', v' \preceq \mathcal{K}, v$.

(b) Finden Sie eine (möglichst grosse) Klasse L von Modalformeln, so dass für alle $\varphi \in L$ gilt: Wenn $\mathcal{K}, v \preceq \mathcal{K}', v'$ und $\mathcal{K}, v \models \varphi$, dann auch $\mathcal{K}', v' \models \varphi$.

Aufgabe 25:

Eine Formel $\varphi(x, y) \in \mathrm{FO}$ (über der Signatur einer Kripkestruktur) ist *sicher für Bisimulationen*, wenn für alle Bisimulationen Z von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}'$ gilt: Wenn $(v, v') \in Z$ und ein w existiert, so dass $\mathcal{K} \models \varphi(v, w)$, dann existiert ein w', so dass $\mathcal{K}' \models \varphi(v', w')$ und $(w, w') \in Z$. In anderen Worten: Wenn die Hin- und Her-Bedingungen für die gegebenen Relationen E_a von $\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{K}'$ gelten, dann auch für die durch φ definierten neuen Relationen.
Welche der folgenden Formeln sind sicher für Bisimulationen?

(a) $\varphi(x, y) = E_a xy \vee E_b xy$

(b) $\varphi(x, y) = \exists z(E_a xz \wedge E_b zy)$

(c) $\varphi(x, y) = E_a xy \wedge E_b xy$

(d) $\varphi(x, y) = \neg E_a xy$

(e) $\varphi(x, y) = (y = x \wedge \forall z \bigwedge_{a \in A} \neg E_a xz)$

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2000

7. Übung Logik II
Abgabe: Dienstag, den 20.6.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 26:

(a) Finden Sie CTL-Formeln, welche äquivalent sind zu folgenden L_μ-Formeln:

(i) $\mu X.P \vee \Diamond X$

(ii) $\mu X.P \wedge \Box X$

(iii) $\nu X.\Diamond \mathit{true} \wedge \Box X$

(b) Drücken Sie folgende Aussagen durch CTL-Formeln aus:

(i) In allen erreichbaren Zuständen schliessen sich ψ und φ gegenseitig aus.

(ii) Auf allen Pfaden gilt φ unendlich oft.

(iii) Auf allen Pfaden gilt immer nach ψ irgendwann auch φ.

(c) Zeigen Sie, dass CTL $\leq L_\mu$.

Aufgabe 27:

(a) Zeigen Sie, dass TC $\leq L_{\omega_1\omega}$ und TC $\leq$ LFP.

(b) Definieren Sie ein möglichst grosses Fragment $L \subseteq$ LFP, so dass TC $\leq L \leq L_{\omega_1\omega}$.

(c) Zeigen Sie, dass CTL $\leq$ TC auf der Klasse aller *endlichen* Kripke-Strukturen, dass aber CTL $\not\leq L_{\infty\omega}$ (und daher insbesondere CTL $\not\leq$ TC) auf der Klasse *aller* Kripke-Strukturen.
Hinweis: Benutzen Sie, dass die Klasse aller Wohlordnungen nicht $L_{\infty\omega}$-axiomatisierbar ist.

Aufgabe 28:

Für jede Ordinalzahl α sei $\mathcal{T}_\alpha$ ein Baum mit Wurzel w_α und, für jedes $\beta < \alpha$, einer Kante von w_α zur Wurzel w_β eines Unterbaumes welcher isomorph ist zu $\mathcal{T}_\beta$.

(a) Berechnen Sie die Abschlussordinalzahlen auf $\mathcal{T}_\alpha$ für die Formeln

(i) $\mu X.\Diamond\Box X$.

(ii) $\mu X.\Box X$.

(iii) $x \prec y := [\mathrm{LFP}_{T,xy} Exy \vee \exists z(Exz \wedge Tzy)](x,y)$.

(b) Für jeden Knoten $v \in \mathcal{T}_\alpha$, sei $d(v) := |\{u : \mathcal{T}_\alpha \models u \prec v\}|$. Welche Werte kann $d(v)$ annehmen und was ist die geometrische Bedeutung von $d(v)$?

(c) Konstruieren Sie eine Formel $\psi(x,y,z) \in$ TC, welche auf jedem Baum $\mathcal{T}_\alpha$ die Relation $d(x)+d(y) = d(z)$ definiert.

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2000

8. Übung Logik II
Abgabe: Dienstag, den 27.6.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 29:

(a) Zeigen Sie, für $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$: Wenn $(\alpha, <) \cong_p (\beta, <)$, dann $\alpha = \beta$.

(b) Für welche Paare von Ordinalzahlen α, β ist $(\alpha, <) \cong_\omega (\beta, <)$.

(c) Geben Sie zwei dichte lineare Ordnungen an, welche potentiell isomorph, aber nicht isomorph sind.

Aufgabe 30:

Zu jeder Äquivalenzstruktur $\mathfrak{A} = (A, \sim)$ definieren wir die Funktion $F_\mathfrak{A} : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, wobei $F_\mathfrak{A}(m)$ die Anzahl der $\sim$-Äquivalenzklassen mit m Elementen angibt. Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ beliebige Äquivalenzstrukturen. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Wenn $F_\mathfrak{A}(m) = n$ und $\mathfrak{A} \cong_{m(n+1)+1} \mathfrak{B}$, dann auch $F_\mathfrak{B}(m) = n$.

(b) Wenn $\mathfrak{A} \cong_{nm} \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ mindestens n Äquivalenzklassen hat, von denen jede mindestens m Elemente enthält, dann gilt dasselbe für $\mathfrak{B}$.

(c) Zeigen Sie, dass die endliche Isomorphie von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nur von $F_\mathfrak{A}$ und $F_\mathfrak{B}$ abhängt. Formulieren Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\mathfrak{A} \cong_\omega \mathfrak{B}$.

(d) Formulieren Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

(e) Sei $\mathfrak{B}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \cong_\omega \mathfrak{B}$. Zeigen Sie: $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ genau dann, wenn jede endliche Äquivalenzklasse von $\mathfrak{B}$ entweder keine Elemente von $\mathfrak{A}$ oder ausschliesslich Elemente von $\mathfrak{A}$ enthält.

Aufgabe 31:

Sei $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$. Zeigen Sie:

(a) Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beide abzählbar sind, dann $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

(b) Wenn eine der Relationen von $\mathfrak{A}$ eine Wohlordnung ist, dann $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

Aufgabe 32:

Schlagen Sie ein Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel für die Logik (FO + $\exists^\omega$) vor und zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (FO + $\exists^\omega$)-äquivalent sind, wenn die Duplikatorin dieses Spiel auf $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt.

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2000

9. Übung Logik II
Abgabe: Dienstag, den 11.7.2000 in der Vorlesung

Aufgabe 33:

(a) Zeigen Sie: Wenn $\mathfrak{A}$ ω-saturiert ist und $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, dann ist auch $\mathfrak{B}$ ω-saturiert.

(b) Betrachten Sie folgende Abwandlungen der Definition ω-saturierter Strukturen:

(i) Für jedes $n < \omega$ und jedes endliche Tupel $\bar{a}$ aus $\mathfrak{A}$ gilt: jeder Typ $p \in S_n(\mathfrak{A}, \bar{a})$ ist realisiert in $\mathfrak{A}$.

(ii) Für jedes $n < \omega$ gilt: Jeder Typ $p \in S_n(\mathfrak{A})$ ist realisiert in $\mathfrak{A}$.

Sind diese Bedingungen stärker, schwächer, oder äquivalent zu der in der Vorlesung angegebenen Definition?

Aufgabe 34:

(a) Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Zeigen Sie: Wenn es für alle endlichen Mengen $C \subseteq A$ und alle $b \in B$ einen Automorphismus $f \in \text{Aut}(\mathfrak{B})$ gibt mit $f(c) = c$ für alle $c \in C$ und $f(b) \in A$, dann ist $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

(b) Zeigen Sie anhand von $\mathfrak{A} = (\omega, <)$, dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 35:

Sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$. Für jede Zahl $p \in \mathbb{N}$ sei $(p \mid x)$ eine Formel aus $\text{FO}_1(\{+, \cdot\})$ welche ausdrücht, dass x durch p teilbar ist. Sei $P \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller Primzahlen. Für $X \subseteq P$ sei

$$\Phi_X := \{(p \mid x) : p \in X\} \cup \{\neg(p \mid x) : p \in P - X\}.$$

(a) Für welche $X \subseteq P$ ist Φ_X ein Typ von $\text{Th}(\mathfrak{N})$?

(b) Für welche $X \subseteq P$ ist Φ_X realisiert in $\mathfrak{N}$?

(c) Gibt es ein abzählbares ω-saturiertes Modell von $\text{Th}(\mathfrak{N})$?

Aufgabe 36:

(a) Charaktersieren Sie alle 1-Typen des Diagramms von $(\mathbb{Q}, <)$.

(b) Sei $\mathfrak{B}$ eine Struktur und $A \subseteq B$ eine Parametermenge. Jeder Typ $p \in S_1(\mathfrak{B}, A)$ ist in einer elementaren Erweiterung $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B}$ realisiert, d.h. $p = \text{tp}_{(\mathfrak{C},A)}(c)$ für ein c aus $\mathfrak{C}$. Betrachten Sie die Abbildung $f : S_1(\mathfrak{B}, A) \to S_1(\mathfrak{B})$ welche jeden Typ $p = \text{tp}_{(\mathfrak{C},A)}(c)$ auf $f(p) = \text{tp}_{\mathfrak{C}}(c)$ abbildet. Zeigen Sie, dass diese Abbildung stetig ist (das Urbild jeder offenen Menge ist offen).

(c) Ein Typ $p \in S_n(T)$ ist *isoliert*, wenn es eine Formel φ gibt, so dass $T \cup \{\varphi\}$ erfüllbar und $T \models \varphi \to \psi$ für alle $\psi \in p$. Geben Sie eine topologische Deutung dieses Begriffs an.

(d) Sei T vollständig. Zeigen Sie, dass jedes Modell von T alle isolierten Typen von $S_n(T)$ realisiert.