Mathematische Logik **Name:** ____________________

SS 2017

1. Klausur

22.08.2017

Bearbeitungszeit: 120 Minuten + 15 Minuten Einlesezeit

Question	Points	Score
1	23	
2	27	
3	24	
4	20	
5	15	
6	11	
Total:	120	

1. Jede Antwort muss **kurz** begründet werden. Gegenbeispiele sollten konkret angegeben werden.

   Sei τ eine endliche Struktur

   (a) i. (1 point) Sei $\clubsuit$ ein Konstantensymbol. Ist der Satz $(\neg\exists x \clubsuit = x \rightarrow \neg\exists x = x)$ erfüllbar?

   ii. (2 points) Sei $\varphi = \forall x \forall y (x + y = y + x)$. Gilt $(\mathbb{N}, +) \models \varphi$? Ist φ auch allgemein gültig?

   iii. (1 point) Geben Sie einen FO-Satz ψ an, sodass für jeden gerichteten Graphen $\mathfrak{B} = (V, E)$ gilt: $\mathfrak{B} \models \psi$ gdw. $\mathfrak{B}$ den Graphen $\bullet \rightarrow \bullet$ als Substruktur enthält?

   iv. (1 point) Geben Sie ein Model der CTL Formel $A(P_0 \cup P_1)$ an.

(b) i. (2 points) Es gibt eine zu $\neg(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z)$ logisch äquivalente AL-Formel, in der nur Junktoren $\implies$ und $\neg$ vorkommen.

ii. (2 points) Das folgende Problem ist in Polynomialzeit entscheidbar: Gegeben eine Horn-Formel φ. Ist $\neg\varphi$ eine Tautologie?

iii. (2 points) Sei die Sequenz Γ
$Rightarrow \neg\varphi, \psi$ im SK ableitbar. Dann ist $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar.

iv. (2 points) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \tau$-Strukturen und sei $\Phi \subseteq FO(\tau)$ eine unendliche Satzmenge. Wenn $\mathfrak{A} \not\models \Phi$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ sodass der Herausforderer das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt.

v. (2 points) Für jede endliche τ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist das folgende Problem entscheidbar. Gegeben ein FO-Satz φ. Ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \cup \{\varphi\}$ erfüllbar?

vi. (2 points) Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$ und $\psi \in \mathrm{FO}$, sodass $\Phi \models \psi$, und sei $\Phi_0 \subseteq \Phi$. Falls Φ_0 endlich ist, gilt bereits $\Phi_0 \models \psi$.

vii. (2 points) Sei $\mathfrak{A}$ eine Herbrandstruktur über der Signatur $\{f, c\}$, wobei c ein Konstantensymbol ist und f ein einstelliges Funktionssymbol. Wenn $\mathfrak{A} \models \exists x(c = fx)$, dann ist $f^{\mathfrak{A}}$ surjektiv.

viii. (2 points) Sei τ eine endliche Signatur, und K eine endliche Klasse von endlichen τ-Strukturen. Dann ist K auch (bis auf Isomorphie)edlich axiomatisierbar.

ix. (2 points) Jede erfüllbare, abzählbare Satmenge besitzt ein abzählbares Model.

2. (a) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Mengen fkt. vollständig sind.

   i. (3 points) Die Menge $\{f, 1\}$, mit

$$f(a,b,c) := b \oplus c \text{ , falls a} = 0 f(a,b,c) := a \oplus b \text{ , falls a} = 1$$

   wobei $\oplus$ das XOR bezeichnet.

   ii. (3 points) Die Menge $\{\nrightarrow\}$ mit $[[x \nrightarrow y]] := 1 - [[x \rightarrow y]]$.

   (b) (2 points) Geben Sie den Kompaktheitssatz der Aussagenlogik an.

(c) (5 points) Weisen Sie mittels der Resolutionsmethode nach, dass diese Folgerungsbeziehung gilt:

$$\{A \to (B \wedge \neg C), A \vee B, D \vee A, \neg D \vee \neg A, B \to C, E \vee \neg B \vee \neg C\} \models \{(E \wedge B) \vee (\neg E \wedge \neg B)\}$$

(d) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, dass die geg. Formeln äquivalent zu einer Horn-Formel sind.

i. (3 points) $\neg((X \to \neg Z) \land (\neg Z \to \neg X) \land ((\neg Y \land W) \lor (\neg W \land \neg Y)))$

ii. (3 points) $(((\neg Z \lor Y) \land (Z \lor \neg W)) \lor \neg X) \land (\neg Z \lor (Y \to W))$

(e) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils *semantisch* (d.h. nicht mittels Ableitung im SK), dass die folgenden Schlussregeln korrekt sind.

i. (4 points)

$$\frac{\Gamma, \exists x \varphi(x) \implies \Delta, \forall x \varphi(x)}{\Gamma \implies \Delta \forall x \varphi(x), \forall x \neg \varphi(x)}$$

ii. (4 points)

$$\frac{\Gamma, \varphi \implies \Delta, \psi \qquad\qquad \Gamma, \psi \implies \Delta, \varphi}{\Gamma \implies \Delta, \varphi \leftrightarrow \psi}$$

3. (24 points) Begründen sie jede Antwort.

(a) Ist der Satz $\forall x \forall y (Exy \rightarrow Eyx) \wedge \neg \forall x \forall y (Exy \leftrightarrow Eyx)$ erfüllbar?

(b) Es sei $\mathfrak{A} = (A, R)$ eine R-Struktur. Formalisieren jeweils die folgenden Eigenschaften in FO.

i. R ist symmetrisch aber nicht asymmetrisch.

ii. Es gibt 3 versch. Elemente $a_1, a_2, a_3 \in A$, so dass $R \subseteq \{a_1, a_2, a_3\} x A$

iii. Es gibt 100 versch. Elemente $a_1, ..., a_1 00 \in A$, so dass die Relation $\{(b, c) \in R : b, c \notin \{a_1, ... a_1 00\}\}$

iv. R ist nicht symmetrisch, aber es gibt eine endliche Substruktur $\mathfrak{B} = (B, R^{\mathfrak{B}}) \subseteq \mathfrak{A}$, so dass $R^{\mathfrak{B}}$ sowohl symmetrisch, als auch asymmetrisch ist.

(c) Sei $\mathfrak{A} := (P(\mathbb{N}), \cap^{\mathfrak{A}})$, wobei $P(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$ und $\cap^{\mathfrak{A}}$ den Schnitt zweier Mengen bezeichne.

i. Die Teilmenge $\{(A, B) \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) : A \subseteq B\}$.

ii. *Sie dürfen nachfolgend $\subseteq$ benutzen.*
Das Element $\emptyset$ von $\mathfrak{A}$.

iii. Die Menge $\{\mathbb{N}\ \{a\} : a \in \mathbb{N}\}$.

iv. Das Element $\{17\}$.

4. (20 points)

(a) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen. Ergänzen Sie: Wenn $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, dann heissen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$...

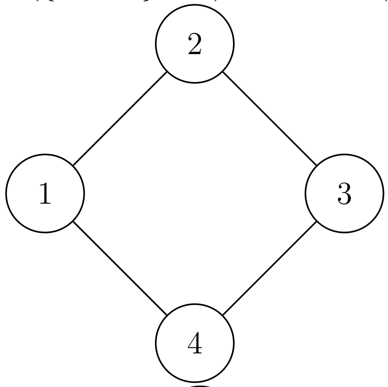
Es gilt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ gdw.

(b) Was besagt der Satz von Ehrenfeucht und Fraisse?

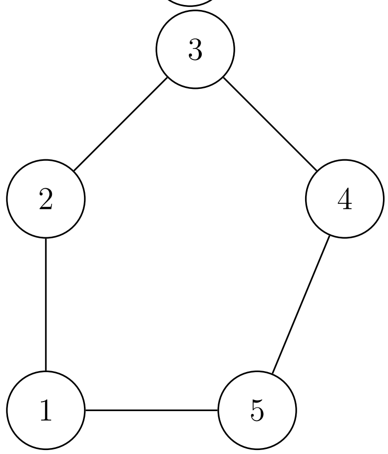
(c) Betrachten Sie die folg. Paare von Strukturen. Welche sind isomorph/elem. äquivalent/m äquivalent? Begründen Sie jede Antwort.

i. $\mathfrak{A} := (\mathbb{R}, P^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{R}, P^{\mathfrak{B}})$, wobei $P^{\mathfrak{A}} := \mathbb{Q}$ und $P^{\mathfrak{B}} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

ii. $\mathfrak{A} := (\{1, ..., 4\}, E^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} := (\{1, ..., 4\}, E^{\mathfrak{B}})$



$\mathfrak{A}$:



$\mathfrak{B}$:

iii. $\mathfrak{A} := (Pot(\mathbb{N}), \cap^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} := (\{X \subseteq \mathbb{N} : 2n + 1 \in X \text{f.a.} n \in \mathbb{N}\}, \cap^{\mathfrak{B}})$
($\cap^{\mathfrak{A}}$ bzw. $\cap^{\mathfrak{B}}$ und $Pot(\mathbb{N})$ wie üblich.)

5. (15 points) Geben Sie für die folgenden Klassen jeweils ein, wenn möglich endliches, Axiomensystem an, oder beweisen Sie, dass ein solches nicht existiert.
   Sie dürfen $\Phi_<$ und Φ_{Graph} für lin. Ordnungen bzw. ungerichtete Graphen verwenden.

   (a) Die Klasse aller $\{P, Q\}$-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, P^{\mathfrak{A}}, Q^{\mathfrak{A}})$ mit $|P^{\mathfrak{A}}| + |Q^{\mathfrak{A}}| = 1$, wobei P, Q einstelige Relationen sind.

   (b) Die Klasse aller $\{P, Q\}$-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, P^{\mathfrak{A}}, Q^{\mathfrak{A}})$ mit $|P^{\mathfrak{A}}| * |Q^{\mathfrak{A}}| = 1$ und $A = \mathbb{R}$, wobei P, Q einstelige Relationen sind.

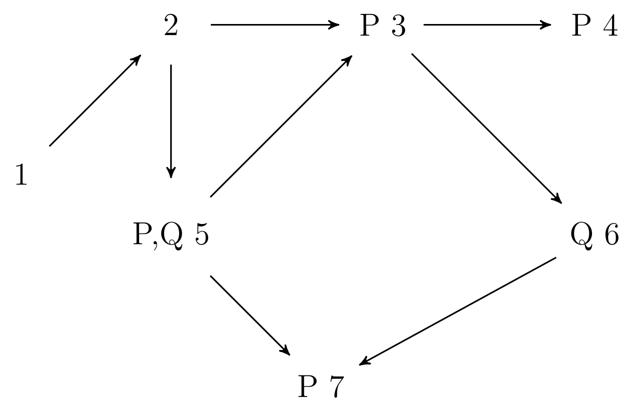
(c) Die Klasse aller ungerichteten Graphen $\mathfrak{B} = (V, E)$, in denen es unendlich viele Kanten gibt.

(d) Die Klasse aller ungerichteten Graphen $\mathfrak{B} = (V, E)$, in denen es bel. lange endliche Pfade, aber keinenunendlichen Pfad gibt. (keine Knotenwiderholungen erlaubt)

(e) Die Klasse aller abz. unendlichen lin. Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$, die ein maximales Element haben.

6. (11 points)

(a) Sei $\varphi := \Diamond\Box(\Diamond P \rightarrow \Diamond Q)$. Geben Sie die Menge $[[\varphi]]^K$ an. Geben sie zudem eine kurze Begründung für Ihre Entscheidung an. ($[[\varphi]]^K := \{v \in V_K : K, v \models \varphi\}$)



K :

(b) Was bedeutet es, dass die Modallogik die Baummodell-Eigenschaft hat?

(c) Geben Sie für folgende Sachverhalte eine Formel der Modallogik an, oder zeigen Sie, dass es keine solche Formel geben kann. Ein P- bzw. Q-, Nachfolger w von v ist ein entsprechend beschriftetet Knoten mit $(v, w) \in E$.

i. Jeder Nachfolger von v ist genau dann mit Q beschriftet, wenn er einen (weiteren P-Nachfolger hat.

ii. Wenn v einen P-Vorgänger hat, dann auch einen P-Nachfolger.

iii. Wenn v zwei Q-Nachfolger hat, dann auch einen P-Nachfolger.

iv. Alle (maximal langen) Pfade, ausgehend von den P-Nachfolgern von v haben Länge genau 2.