Jan Philipp Hafer
jan.hafer@rwth-aachen.de

(wird noch verbessert)

1. Musterlösung aus VL

Aufgabe 5

Wir zeigen zunächst, dass es für jedes k, k-instabile Formeln $\Xi(X_1, \ldots, X_k)$ mit k Variablen

$$X = X_1 \wedge taut(X_2, \_, X_k)$$

$$\mathfrak{I} \models \Xi = \mathfrak{I}(X_1) = 1$$

Die Änderung der Wahrheitstabelle von $X_1,, X_k$ ändert dagegen von X_1 und damit $[\![\Xi]\!]^{\mathfrak{I}}$
Für gerade k ex. keine k-instabile Formel $\Xi(X_1,, X_n)$ mit $n > k$ Variablen
$\mathfrak{A} : f(k) = k$ ungrade k
Sei $\Xi(X_1,, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_n)$ k-instabil
Sei $\mathfrak{I}_i(X_j) =$
1.Fall: $1 xor \mathfrak{I}_{i-1}$für$j \in \{1,, k+1\} \setminus \{i\}$ 2.Fall: $\mathfrak{I}_{i-1}(X_j)$für $j \in \{i\} \cup \{k+2, ;n\}$
$\mathfrak{I}_i$ unterscheidet sich von $\mathfrak{I}_{i-1}$ an genau k Variablen.
Da Ξ k-instabil $\mathfrak{I}_i \models \Xi \Leftrightarrow i$gerade
Insbesondere $\mathfrak{I}_{k+1} \not\models \Xi$
(k gerade)
Aber $\mathfrak{I}_{k+1} = \mathfrak{I}_0 ↯$
Von $\mathfrak{I}_0, \mathfrak{I}_1, \ldots,$ bis zu $\mathfrak{I}_{k+1}$ wurde der Wahrheitswert jeder Variable $X_j (j \leq k+1)$ gerade k Mal geändert und der von $X_j$für$j > k+1$ mal
Für ungerade k gibt es k-instabile Formeln
$\Xi(X_1,, X_k)$ all$en \geq k$, nämlich

$$\Xi := X_1 xor X_2 xor \ldots X_n$$

parität($\mathfrak{I}$)=
1.Fall: 1 $|\{X_2 : \mathfrak{I}(X_2) = 1\}|$
2.Fall: 0
$\mathfrak{I} \models \Xi \Leftrightarrow$ parität$(\mathfrak{I}) = 1$
Lemma Wenn $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}'$ sich an einer ungeraden Zahl an Variablen unterscheiden, dann parität$(\mathfrak{I}) \neq$ parität$(\mathfrak{I}')$
(Induktion offensichtlich. Wenn $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}'$ sich an einer Vairablen unterscheiden, dann parität$(\mathfrak{I}) \neq$ parität$(\mathfrak{I}')$
Wenn sie sich an genau zwei unterscheiden, dann parität$(\mathfrak{I})$ = parität$(\mathfrak{I}')$
Wenn sich $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}'$ an $2i+1 (i \geq 1)$ Variablen unterscheiden, dann ex $\mathfrak{I}''$, sodass sich $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}''$ an $2i-1$ Variablen unterscheiden und $\mathfrak{I}''$ und $\mathfrak{I}'$ an zwei.
parität$(I) \neq$ parität$(\mathfrak{I}'')$ = parität$(\mathfrak{I})$
Also $\Xi(X_1,, X_n)$ k-instabil für alle ungerade $k \leq n$