Nachholklausur: Molo WS 06/07 Dauer: 120 Min.

27 Punkte zum Bestehen von 103. Ein A4-Formelblatt erlaubt

Aufgabe 1 10 Punkte

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, ob folgende Formel unerfüllbar ist:

$$((A \wedge C) \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \wedge (C \rightarrow \neg A) \wedge (1 \rightarrow C) \wedge (A \vee B)$$

(b) Zwei Formeln φ und ψ *ergänzen einander*, wenn jede zu φ und ψ passende Interpretation Modell von mindestens einer der beiden Formeln ist. Wie kann man mit der Resolutionsmethode zeigen, dass φ und ψ einander ergänzen?

(c) Zeigen Sie mit der Methode aus (b), dass

$$\varphi := (D \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg A) \vee (\neg D \wedge (A \rightarrow \neg C)) \text{ und}$$
$$\psi := (A \wedge C \wedge \neg D) \vee (A \wedge B) \vee (C \wedge \neg B)$$

einander ergänzen.

Aufgabe 2 8 Punkte

Welche der folgenden Formeln sind zu einer Horn-Formel äquivalent? Begründen Sie die Antwort.

(i) $(X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow \neg Z)$; (iii) $(X \vee Y \vee Z) \wedge (Z \rightarrow (X \vee Y))$;

(ii) $(X \rightarrow Y) \vee (X \rightarrow \neg Z)$; (iv) $Y \wedge ((X \rightarrow Y) \vee (X \rightarrow Z))$.

Aufgabe 3 8 Punkte

Sei $\mathfrak{A} := (\{0,1\}^*, \preceq)$ der binäre Baum mit der Vorgängerrelation ($x \preceq y$:gdw $y = xz$ für ein z) und $\mathfrak{B} := (\mathcal{P}(\{0,1\}), \subseteq)$. Geben Sie jeweils eine strukturerhaltende Abbildung der folgenden Art an, oder beweisen Sie, dass eine solche nicht existiert:

(a) ein surjektiver Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$;

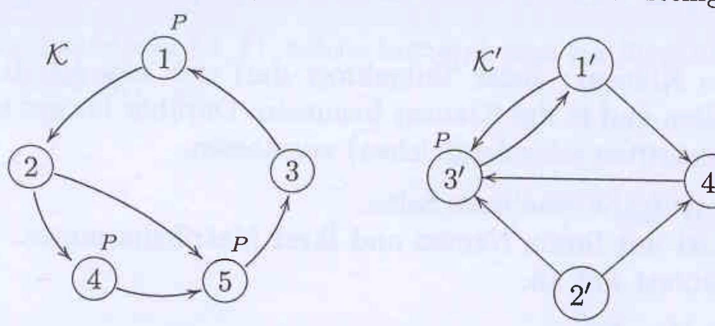
(b) ein starker Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$;

(c) eine Einbettung von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$;

(d) je ein nichttrivialer Automorphismus von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Aufgabe 4 12 Punkte

Betrachten Sie folgende Transitionssysteme $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ mit einer einstelligen Relation P:



(a) Berechnen Sie eine maximale Bisimulation zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$.

(b) Bestimmen Sie für alle Paare u, v von Knoten mit $\mathcal{K}, u \not\sim \mathcal{K}', v$ die kleinste Zahl m mit $\mathcal{K}, u \not\sim_m \mathcal{K}', v$ und geben sie eine ML-Formel φ der Modaltiefe m an, so dass gilt $\mathcal{K}, u \models \varphi$ und $\mathcal{K}', v \not\models \varphi$.

(c) Geben Sie einen FO-Satz von minimalem Quantorenrang an, der die Strukturen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ trennt und beweisen Sie, dass die von Ihnen angegebene Formel tatsächlich minimalen Quantorenrang hat.

Aufgabe 5 6 Punkte

Betrachten Sie das Transitionssystem $\mathcal{K}$ aus der vorherigen Aufgabe.

(a) Bestimmen Sie schrittweise die Relationen, die von folgenden Formeln definiert werden:

(i) $\varphi(x) := \exists y(Eyx \wedge \forall z(Ezx \wedge y \neq z \rightarrow Eyz))$;

(ii) $\Box(\Box\Diamond P \wedge \Diamond\Box P)$.

(iii) $\mathrm{AF}(P \wedge \mathrm{EX}P)$.

(b) Geben Sie Formeln in ML, CTL und FO an, welche die Menge $\{1, 3, 5\}$ definieren.

Aufgabe 6 6 Punkte

Gegeben sei die Struktur $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, E)$ mit $E = \{(0,1), (1,1)\}$. Geben Sie das Auswertungsspiel zu der Formel $\varphi = \forall x(\exists y Exy \wedge \forall y \neg Eyx)$ an, und markieren Sie für einen der beiden Spieler eine Gewinnstrategie.

Aufgabe 7 6 Punkte

Wir betrachten die $\{f\}$-Strukturen $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_4$ über dem Universum $\mathbb{N}$, in denen die einstellige Funktion f wie folgt interpretiert ist:

(i) $f^{\mathfrak{A}_1}(x) := x$; (iii) $f^{\mathfrak{A}_3}(x) := 2x$;

(ii) $f^{\mathfrak{A}_2}(x) := \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$; (iv) $f^{\mathfrak{A}_4}(x) := 2\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$.

Geben Sie für jede dieser Strukturen $\mathfrak{A}_i = (\mathbb{N}, f^{\mathfrak{A}_i})$ einen Satz $\varphi_i \in \mathrm{FO}$ an, der sie von den übrigen drei Strukturen trennt, d.h. $\mathfrak{A}_i \models \varphi_i$ und $\mathfrak{A}_j \models \neg\varphi_i$ für $j \neq i$.

Aufgabe 8 9 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie (semantisch) die Korrektheit der folgenden Regeln:

(a) $$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta};$$

(b) $$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma, \psi \rightarrow \varphi \Rightarrow \Delta};$$

(c) $$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\varphi}.$$

Aufgabe 9 8 Punkte

Seien P und E zweistellige Relationssymbole, f ein zweistelliges und g ein einstelliges Funktionssymbol. Sei ferner $\varphi := \exists y(((\forall z\, Pzx) \rightarrow Pxy) \wedge \forall x(\neg Exz \vee Exy))$.

(a) Bilden Sie $\varphi[x/fxy, y/gz, z/fxx]$.

(b) Geben Sie eine zu $\psi := \exists y \forall x \neg Fxy \wedge \forall x \exists y Fxy \wedge \forall x \forall y(Fxy \rightarrow \neg\exists z(Fxz \wedge \neg z = y))$ äquivalente Formel ψ' in Pränex-Normalform an.

(c) Transformieren Sie ψ' zu einer Formel in Skolem-Normalform.

(d) Geben Sie je ein Modell für ψ' und die Skolem-Normalform von ψ' an.

Aufgabe 10 8 Punkte

Seien Γ und Δ zwei Mengen von FO-Formeln. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Mod}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Mod}(\Delta)$ genau dann gilt, wenn für jede nicht-leere endliche Teilmenge $\Delta_0 \subseteq \Delta$ eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ existiert, so dass die Sequenz $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ gültig ist.

Aufgabe 11 10 Punkte

(a) Formulieren Sie den Satz von Ehrenfeucht und Fraïssé. Erläutern Sie die dabei auftretenden Begriffe.

Wir betrachten im folgenden Strukturen über der leeren Signatur, also Mengen.

(b) Seien A und B Mengen. Zeigen Sie anhand von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen, dass $A \equiv_k B$ genau dann gilt, wenn $|A| = |B|$ oder $k \leq \min(|A|, |B|)$.

(c) Ein Satz φ heißt *Zähler*, wenn es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle Mengen A gilt, $A \models \varphi$ genau dann, wenn $|A| \leq n$. Ist die Frage, ob eine gegebene Formel ein Zähler ist, entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort und skizzieren Sie gegebenenfalls einen Algorithmus. *Hinweis:* Verwenden Sie das Ergebnis aus Teil (b).

Aufgabe 12 12 Punkte

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol und P ein einstelliges Relationssymbol. Welche der folgenden Klassen sind FO-axiomatisierbar? Welche sind endlich axiomatisierbar? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls ein entsprechendes Axiomensystem an.

(a) Die Klasse aller Strukturen (A, f, P), für die P eine Substruktur induziert.

(b) Die Klasse aller Strukturen (A, f), in denen das Bild von f unendlich ist.

(c) Die Klasse aller Strukturen (A, f, P), so dass für jedes Element $a \in A$ eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $f^n(a) \in P$.

(d) Die Klasse aller Strukturen (A, f), welche isomorph zu $(\mathbb{N}, f)$ mit $f(n) := n + 1$ sind.

(e) Die Klasse aller Strukturen (A, f), welche isomorph sind zur Struktur $(\{0, 1, 2, 3\}, f)$ mit $f(n) := n + 1 \pmod 4$.