Formeltiefe: (1) $d(\psi) = 0$ für atomare ψ. (2): $d(\neg\psi) = d(\psi) + 1$. (3):$d(\psi \circ \varphi) = 1 + max(d(\psi), d(\varphi))$.
Eine Formel φ ist erfüllbar gdw. $\neg\varphi$ keine Tautologie ist.
Normalform: KNF u. DNF.
Menge $\Omega \subseteq B$ von Bool. Fkt. ist **Funktional vollständig**, wenn sich daraus jede Bool. Fkt. $f : B^n \to B (n \geq 1)$ def. läßt. f.v.: $\{\wedge, \vee, \neg\}, \{\wedge, \neg\}, \{\vee, \neg\}, \{\to, \neg\}, \{\to, 0\}, \{\wedge, \oplus 1\}, \{|\}$(NAND), nicht fv: $\{\wedge, \vee, \to\}$.
Hornformel: ψ in KNF, wobei $\bigvee_j Y_{ij}$ höchstens ein positives Literal hat.
Horn-Formel mit Implikationen: (1):$\neg X_1 \vee \ldots \vee \neg X_k \vee X \equiv X_1 \wedge \ldots \wedge X_k \to X$. Für $k = 0$ als $1 \to X$. (2): $\neg X_1 \vee \ldots \vee \neg X_k \equiv X_1 \wedge \ldots \wedge X_k \to 0$. **Markierungsalgorithmus**: Wenn (1) nicht vorhanden, erf., indem alle X_i mit 0 bewertet. Wenn (2) nicht vorhanden, erf., indem man alle X_i mit 1 bewertet. Sonst, markiere alle X_i, die auf der rechter Seite von $1 \to X_i$. Dann, falls irgendwo linke Seite komplett markiert, markiere auch die rechte. Abbruch, falls in (2) ganze linke Seite markiert. Sonst: erfüllbar und liefert das kleinste Modell (alle markierten auf Eins setzen!).
Semantische Folgerungsbeziehung:$\Phi \models \varphi$(φ folgt aus Φ) gdw. jede zu $\Phi \cup \{\varphi\}$ passende Interpret., welche Modell von Φ ist, auch Modell von φ ist. Wenn $\Phi = \{\varphi\}$, schreibe: $\psi \models \varphi$.
Kompaktheitssatz der AL: Sei $\Phi \subseteq$AL, $\psi \in$ AL: *(i)*Φ ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist. *(ii)* $\Phi \models \psi$ gdw. eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ exi., so dass $\Phi_0 \models \psi$.
Zorn: Sei $(A, <)$ eine nicht-leere partielle Ordnung in der jede Kette nach oben beschränkt ist. Dann besitzt $(A, <)$ ein maximales Element.
König: Sei T ein endlich verzweigter Baum mit Wurzel w, in dem es beliebig lange endliche Wege gibt. Dann gibt es auch einen unendlichen Weg in T, der bei der Wurzel w beginnt.
Klauselmenge: Eine Klausel ist eine endliche Mengen von Literalen. Mit $\Box$ bezeichnet man die leere Klausel. Einer Formel $\psi = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$ in KNF wird eine Klauselmenge zugeordnet. **Def.** Seien C, C_1, C_2 Klauseln. C ist **Resolvente** von C_1 und C_2 genau dann, wenn es ein Literal Y gibt mit $Y \in C_1, \bar{Y} \in C_2$ und $C = (C_1 - \{Y\}) \cup (C_2) - \{\bar{Y}\}$.
Resolutionslemma: Sei K eine Klauselmenge $C_1, C_2 \in K$ und C Resolvente von C_1 und C_2. Dann sind K und $K \cup \{C\}$ äquivalent.**Resolutionssatz**: Eine Klauselmenge K ist unerfüllbar genau dann, wenn $\Box \in Res^*(K)$.
Einheitsres. für Horn-Formeln ist vollständig (alle gültige Objekte können abgeleitet werden). Die leere Klausel $\Box$ und $\{X\}$ sind auch Horn-Formel. **Sequenzkalkül**: See SK in Chapter 6.

Kapitel 2

nullstellige Realtion: $R_0 = \emptyset (= 0), R_1 = \{\Box\} (= 1)$ **nullstellige Funktion**: $f : \{\Box\} \to A, f(\Box)$: Konstante.
Der Graph einer n-stelligen Funktion $f : A_n \to A$ ist die (n+1)-stellige Relation: $G_f = \{(\bar{a}, b) \in A^{n+1} : f(\bar{a}) = b\}$
Eine Funktion $f : A \to B$ ist **injektive**, wenn alle $a \neq b \in A \Rightarrow f(a) \neq f(b)$. **surjektiv**, wenn jedes $b \in B$ auch ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$.
Mächtigkeit von Mengen: $|A| = |B|$, wenn $A \xrightarrow{bijektiv} B$. A heißt abzählbar, wenn es eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ gibt. A lässt sich dann als $\{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$ schreiben.
Lemma 2.1: Jede abzählbare Menge ist entweder endlich, oder gleichmächtig zu $\mathbb{N}$. **Satz 2.2**: Keine Menge ist gleichmächtig zu iher Potenzmenge.
Struktur(Universum, Relation, Funktionen), Signatur: $\tau := \bigcup R^n(\tau) \cup \bigcup F^n(\tau)$.
Substruktur/Erweiterung: die Signatur bleibt fest und das Universum verändert sich, bei **Redukt u. Expansion** ist es genau umgekehrt. Substrukturen müssen τ-abgeschlossen sein. Zu jeder nicht leeren τ-abgeschlossen Teilmenge $A \subseteq B$ gibt es genau eine Substruktur von B mit Träger A (=induzierte Substruktur).
Homomorphismus: (1): Für jedes Rel.symbol $R \in R^n(\tau)$ und alle $a_1, \cdots, a_n \in A$ gilt: $(a_1, \cdots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (\pi a_1, \cdots, \pi a_n) \in R^{\mathfrak{B}}$. (2): Für jedes Fkt.symbol $f \in F^n(\tau)$ und alle $a_1, \cdots, a_n \in A$ gilt: $\pi f^{\mathfrak{A}}(a_1, \cdots, a_n) = f^{\mathfrak{B}}(\pi a_1, \cdots, \pi a_n)$. **Starke** $\sim$: (1): Für jedes Rel.symbol $R \in R^n(\tau)$ und alle $\bar{a} \in A^n$ gilt: $\bar{a} \in R^{\mathfrak{A}} \iff \pi\bar{a} \in R^{\mathfrak{B}}$. **Einbettung:** injektiver, starker Hom.. **Isomorphismus:** bijektiver starker Hom.. ($\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$). **Automorphismus:** $\pi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$.

Kapitel 3

Sei τ Signatur. **Alph**(τ):= { Rel.- und Fkts.symbole in τ; (feste, abzähl. unendl.)**VAR** =$\{v_0, v_1, \cdots\}$; $=, \neg, \vee, \wedge, \to, \exists, \forall, (,)$}. τ- **Terme**:= T(τ): (1)VAR $\subseteq T(\tau)$. (2): Sind $t_1, \cdots, t_n$ τ-Terme, und $f \in F^n(\tau)$, auch $ft_1, \cdots, t_n\tau$-Term. In **Grundterm** treten keine Var. auf. τ- **Formeln:=FO(τ):** (1) Sind t_1, t_2 τ-Terme, dann $t_1 = t_2$ τ-Formel. (2) Sind $t_1, \cdots t_n$ Terme aus $T(\tau)$ und $P \in \tau$ n-stelliges Rel.symbol, dann $Pt_1, \cdots, t_n$ τ-Formel. (3) Wenn ψ τ-Formel, dann auch $\neg\psi$. (4). Wenn ψ, φ, dann auch $\psi \circ \varphi$. (5). Wenn $\psi \in FO(\tau)$, $x \in$ VAR. dann auch $\exists x\psi, \forall x\psi \in FO(\tau)$.
Atome: Nur (1), (2). **Literale**: Atome u. deren Negation. **Quant.freie Formeln**: nur (1) bis (4).
Mächtigkeit: Wenn τ abzählbar, dann auch Alph(τ). Dann Auch Alph(τ)* und damit $T(\tau), FO(\tau)$, aber unendlich

Eine **τ-Interp.** ist Paar $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, wobei $\beta : X \to A$ Belegung von Var. durch Elemente von A. $X = Def(\beta) \subseteq VAR$. **Ein Modell** von ψ ist eine Interp. $\mathfrak{I}$, so dass Frei(ψ) $\subseteq Def(\beta)$ und $[|\psi|]^{\mathfrak{I}} = 1$. Schreibe $(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi$ oder $\mathfrak{A} \models \psi[\beta]$ (ψ gilt in $\mathfrak{A}$ unter Belegung β). Sei Φ Menge von τ-Sätze. **Modellkl.** von Φ (ModΦ): alle τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \Phi$. Klasse $\mathcal{K}$ von τ-Strukturen ist axiom.durch Φ, wenn $\mathcal{K}$=Mod(Φ), Φ ist **Ax.system** für $\mathcal{K}$.
Semantische Folgerungsbeziehung: $\Phi \subseteq FO(\tau)$ eine Formelmenge, ψ eine Formel. ψ folgt Φ ($\Phi \models \psi$) gdw. jede zu $\Phi \cup \{\psi\}$ passende Interp., welche Modell von Φ ist, auch Modell von ψ ist. $\varphi \models \psi$,, erfüllbar, unerfüllbar, allgemeingülltig wie in AL. **Logisch äquivalent**: $\psi \equiv \varphi$, wenn $\psi \models \varphi$ und $\varphi \models \psi$.
Substitutionslemma. Für jeden Term $t \in T(\tau)$, jede Formel $\psi \in FO(\tau)$, jede Substitution ρ: VAR $\to T(\tau)$ und jede zu $t[\rho]$bzw.$\psi[\rho]$ passende Interp. $\mathfrak{I}$ gilt: *(i):*$[|t[\rho]|]^{\mathfrak{I}} = [|t|]^{\mathfrak{I}\circ\rho}$. *ii:* $\mathfrak{I} \models \psi[\rho] \iff (\mathfrak{I} \circ \rho) \models \psi$.
Reduzierte Formeln enthalten kein $\wedge, \to, \leftrightarrow, \forall$. **Formel in NNF**, wenn aus Literalen nur mit Junkt.$\vee, \wedge$ und Quant. $\exists, \forall$ aufgebaut. Eine Formel ist **termreduziert**, wenn sie nur Atome der Form $R\bar{x}$, $f\bar{x} = y$ und $x = y$ enthält.
ψ ist **bereinigt**, wenn keine Variable in ψ sowohl frei wie gebundenen auftritt, und wenn keine Variable mehr als einmal quantifiziert wird.
Eine Formel ist in **PNF**, wenn sie bereinigt ist, und die From $Q_1x_1, \cdots, Q_rx_r\varphi$ hat, wobei φ quatorenfrei ist und $Q_i \in \{\exists, \forall\}$.
Satz über SK-NF. Zu jeder Formel $\psi \in FO(\sigma)$ lässt sich eine Formal $\varphi \in FO(\tau)$ mit $\sigma \subseteq \tau$ konstruieren, so dass gilt: *(i)* $\varphi = \forall y_1 \cdots \forall y_s \varphi'$, wobei φ' quantorenfrei ist. *(ii)* Frei(ψ) = Frei(φ); *(iii):* $\varphi \models \psi$; *(iv):* Zu jedem Modell von ψ exist. eine Expansion, welche Modell von φ ist.
Auswertungsspiel: FO-Satz ψ (in NNF) und dazu passende Struktur $\mathfrak{A}$ defin. Auswertungsspiel MC($\mathfrak{A}, \psi$) zwischen Ver. V und Fal. F.. Pos. des Spiels sind Paare (φ, β), φ: Unterformel u. β: Bewertung. Für $\varphi = \varphi(\bar{x})$ und $\beta : \bar{x} \mapsto \bar{a}$: $(\varphi, \beta) \equiv \varphi(\bar{a})$.
Das Spiel beginnt bei der Position ψ. Sei $\varphi(\bar{a})$ die aktuelle Position, dann geht das Spiel weiter abhängig von der Gestalt von φ. $\sharp$: φ Literal, Spiel beendet. V gewinnt, if $\mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a})$, else gewinnt F. $\sharp$:. An $(\vartheta \vee \eta)$ ist V a. Zug, kann entw. zu ϑ or zu η ziehen. $\sharp$: An $\vartheta \wedge \eta$ zieht F entw. zu ϑ or zu η. $\sharp$: An P. der Form $\exists x\vartheta(x, \bar{b})$ wählt V ein Element $a \in A$ u. zieht zu $\vartheta(a, \bar{b})$. $\sharp$: An P. $\forall x\vartheta(x, \bar{b})$ wählt F. $a \in A$ u. zieht zu $\vartheta(a, \bar{b})$.
Satz 3.22 Für jeden FO-Satz ψ und jede dazu passende Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi$ genau dann, wenn die Verifiziererin eine Gewinnstrategie für das Spiel $MC(\mathfrak{A}, \psi)$ von der Anfangsposition ψ hat.
Kapitel 4
Semantik der Modellbeziehung: $[|\langle a\rangle\psi|]^{\mathcal{K}} := \{v : vE_a \cap [|\psi|]^{\mathcal{K}} \neq \emptyset\}$ (4) $[|\,[a]\psi|]^{\mathcal{K}} := \{v : vE_a \subseteq [|\psi|]^{\mathcal{K}}\}$. Dabei ist $vE_a := \{w : (v, w) \in E_a\}$ die Mene aller a-Nachfolger von v.
Satz 4.5: $\psi \in$ ML, $\psi^*(x)$ in FO^2. Es gilt für alle $\mathcal{K}$ und alle Zustände v von $\mathcal{K}$: $\mathcal{K}, v \models \psi \iff \mathcal{K} \models \psi^*(v)$.**Beweis:** $\natural : P_i \mapsto P_i x$ $\quad \natural : \neg\psi \mapsto \neg\psi^*(x)$ $\quad \natural : (\psi \circ \varphi) \mapsto (\psi^*(x) \circ \varphi^+(x))$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$ $\quad \natural : \langle a\rangle\psi \mapsto \exists y(E - axy \wedge \psi^*(y))$ $\quad \natural : [a]\psi \mapsto \forall y(E_axy \to \psi^*(y))$.
Eine Formel $\psi \in$ML ist **erfüllbar**, wenn ein Tran.system $\mathcal{K}$ und ein Zustand v von $\mathcal{K}$ ex., so dass $\mathcal{K}, v \models \psi$. Sie ist **gültig**, if $\mathcal{K}, v \models \psi$ für alle $\mathcal{K}$ und alle v. $\psi \equiv \varphi$, if $[|\psi|]^{\mathcal{K}} = [|\varphi|]^{\mathcal{K}}$ für alle zu ψ u. φ passende Tr.systeme $\mathcal{K}$.
Bisimulation Seien $\mathcal{K} = (V, (E_a)_{a\in A}, (P_i)_{i\in I})$ und $\mathcal{K}' = (V', (E_a)'_{a\in A}, (P_i)'_{i\in I})$ TS. Eine **Bisimulation** zwischen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ ist eine Relation $Z \subseteq V \times V'$, so dass für alle $(v, v') \in Z$ gilt: (1) $v \in P_i \iff v' \in P_i'$ für alle $i \in I$. (2) **Hin:** Für alle $a \in A, w \in V$ mit $v \xrightarrow{a} w$ ex. ein $w' \in V'$ mit $v' \xrightarrow{a} w'$ und es ist $(w, w') \in Z$. **Her:** Für alle $a \in A, w' \in V'$ mit $v' \xrightarrow{a} w'$ ex. ein $w \in V$ mit $v \xrightarrow{a} w$ und es ist $(w, w') \in Z$.
Def.$\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', u'$, if a bisim. Z between $\mathcal{K}$ and $\mathcal{K}'$ ex. with $(u, u') \in Z$.
Lemma 4.8. II gewinnt das Bis.Spiel auf $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ von (u, u') aus gdw $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', u'$.
n-Bisimularität: $\sim_n$. Für $n \in \mathbb{N}$ sind folgende zwei Aussagen äquivalent: (i) II gewinnt das n-Züge-BS von (v, v') aus. (ii) $\mathcal{K}, u \sim_n \mathcal{K}', u'$.
Satz 4.9. Für alle Krip.Strukturen $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ mit Zuständen v bzw. v' gilt: Wenn $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', u'$, dann ist $\mathcal{K}, u \sim_n \mathcal{K}', u'$ für alle n. Die Umkehrung gilt jedoch nicht: es gibt $\mathcal{K}, v$ und $\mathcal{K}', v'$, so dass $\mathcal{K}, u \sim_n \mathcal{K}', u'$, aber $\mathcal{K}, u \not\sim \mathcal{K}', u'$
Modaltiefe:(1) md(ψ) =0 für al. Formel ψ (2): md($\neg\psi$) = md(ψ) (3): md($\psi \circ \varphi$) = max (md (ψ), md(φ)) (4): md($\langle a\rangle\psi$) = md($[a]\psi$) = md(ψ) + 1.
Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ zwei KS und $v \in \mathcal{K}, v' \in \mathcal{K}'$: (1): $\mathcal{K}, v \equiv_{ML} \mathcal{K}', v'$ if for all $\psi \in$ ML gilt: $\mathcal{K}, v \models \psi \iff \mathcal{K}', v' \models \psi$. (2): $\mathcal{K}, v \equiv_{ML}^n \mathcal{K}', v'$ if for all $\psi \in$ ML mit qd(ψ) $\leq n$ gilt: $\mathcal{K}, v \models \psi \iff \mathcal{K}', v' \models \psi$.
Satz 4.12: Für KS $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ und $u \in \mathcal{K}, u' \in \mathcal{K}'$ gilt: (1): $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', u' \Longrightarrow \mathcal{K}, u \equiv_{ML} \mathcal{K}', u'$. (2):$\mathcal{K}, u \sim_n \mathcal{K}', u' \Longrightarrow \mathcal{K}, u \equiv_{ML}^n \mathcal{K}', u'$.
Satz 4.14 Seien $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ endlich verzweigte TS. Dann ist $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', u' \iff \mathcal{K}, u \equiv_{ML} \mathcal{K}', u'$
4.3 Ein TS $\mathcal{K} = (V, (E_a)_{a\in A}, (P_i)_{i\in I})$ mit einem ausgezeichneten Knoten w ist ein Baum, wenn (1): $E_a \cap E_b = \emptyset$ für

theorie.

Φ eine Menge von Formeln. (1) Φ hat die **Endliche-Modell-Eigenschaft** (EME), wenn jede erfüllbare Formel $\varphi \in \Phi$ ein endliches Modell besitzt. (2) Φ über TS. Φ hat die **Baummodell-Eigenschaft** (BME), wenn jde erfüllbare Formel in Φ ein Modell hat, welches ein Baum ist. (3) Analog: *Endliche-Baummodell-Eigenschaft*.

Abwicklung: Sei $\mathcal{K} = (V^{\mathcal{K}}, (E_a^{\mathcal{K}})_{a\in A}, (P_i^{\mathcal{K}})_{i\in I})$ eine Kripkestruktur und $v \in V^{\mathcal{K}}$. Die Abwicklung von $\mathcal{K}$ von v aus ist die Kripkestruktur $\mathcal{T}_{\mathcal{K},v} = (V^{\mathcal{T}}, (E_a^{\mathcal{T}})_{a\in A}, (P_i^{\mathcal{T}})_{i\in I})$ mit $\natural : V^{\mathcal{T}} = \{\bar{v} = v_0 a_0 v_1 a_1 v_2 \dots v_{m-1} a_{a_m - 1} v_m : m \in \mathbb{N}, v_0 = v, v_i \in V^{\mathcal{K}}, a_i \in A, (v_i, v_{i+1}) \in E_{a_i}^{\mathcal{K}} \text{ für alle } i < m\}$ $\quad \natural : E_a^{\mathcal{T}} = \{(\bar{v}, \bar{w}) \in V^{\mathcal{T}} \times V^{\mathcal{T}} : \bar{w} = \bar{v}aw \text{ für ein } w \in V^{\mathcal{K}}\}$ $\quad \natural : P_i^{\mathcal{T}} = \{\bar{v} = v_0 a_0 \dots v_m \in V^{\mathcal{T}} : v_m \in P_i^{\mathcal{K}}\}$. Mit end$(\bar{v})$ bezeichnen wir den letzten Knoten auf dem Pfad $\bar{v}$. Damit ist $\bar{v} \in P_i^{\mathcal{T}} \iff \text{end}(\bar{v}) \in P_i^{\mathcal{K}}$.

Lemma 4.18 Es gilt $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{T}_{K,v}, v$. **Satz 4.10**: ML hat die Baummodell-Eigenschaft.

Satz 4.21: Zu jeder erfuellbaren Formel $\psi \in$ ML existiert eine endliche Baumstruktur $\mathcal{T}, v$ mit Tiefe $\leq$ mdψ und Verzeigungsgrad $\leq |C(\psi)|$, so dass $\mathcal{T}, v \models \psi$. Insbesondere hat ML also die endliche BAummodell-Eigenschaft.

Lemma 4.22 Der Teilbaum $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}$ sei so konstrtuiert, dass folgende Bedingungen erfuellt sind. (1) Fuer jeden Nachfolger w von v in $\mathcal{T}'$ gilt $\mathcal{T}', w \models S(w)$. (2) Fuer jede Formel der Form $\langle a \rangle \varphi \in S(v)$ existiert im Baum $\mathcal{T}'$ ein a-Nachfolger $w_{\langle a \rangle \varphi}$ von v so dass $\mathcal{T}', w_{\langle a \rangle \varphi} \models \varphi$. Dann gilt $\mathcal{T}', w_{\langle a \rangle \varphi} \models S(v)$

Satz 4.23 Es gibt einenAlgorithmus, wlcher zu einem gegebenen endlichen Transitionssystem $\mathcal{K}$ und einer Formel $\psi \in$ ML in Zeit $O(\|K\| \cdot |\psi|)$ die Extension $[|\psi|]^{\mathcal{K}}$ berechnet.

Satz 4.24 Das Erfuellbarkeitsproblem fuer ML ist entscheidbar

Das Erfuellbarkeitsproblem fuer ML ist entscheidbar.

4.5 CTL see HowTos.

Kapitel 5

FO-axiomatisierbar: Eine Struktur $\mathcal{K}$ heißt $\sim$, wenn eine Satzmenge $\Phi \subseteq FO(\tau)$ existiert, so dass $\mathcal{K} = Mod(\Phi)$.Wenn Φ endlich für $\mathcal{K}$ ist, dann endlich axiomatisierbar. **Beispiel**: Nummer

Definierbarkeit(in einer Struktur): Sei $\psi(x_1, \cdots, x_r) \in FO(\tau)$ und $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Dann definiert ψ in $\mathfrak{A}$ die r-stellige Relation $\psi^{\mathfrak{A}} := \{(a_1, \cdots a_r) : \mathfrak{A} \models \psi(a_1, \cdots, a_r)\} \subseteq A^r$.

Def. Eine Realtion $R \subseteq A^r$ auf dem Univ. einer τ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist *(elem.) definierbar* in $\mathfrak{A}$, wenn $R = \psi^{\mathfrak{A}}$ für eine Formel $\psi \in FO(\tau)$. Eine Funktion $f : A^r \to A$ heißt elem. definierbar, wenn ihr Graph R_f elementar definierbar ist.

Beispiel:

Lemma 5.3: Das Hinzufügen definierbarer Relationen/Funktionen zu einer Struktur bringt keinen Gewinn an Ausdrucksstärke.

Das Isomorphilemma 5.4: Sei $\pi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$ ein Isomorphismus von τ-Strukturen. Dann gilt für alle $\psi(x_1, \cdots, x_n) \in FO(\tau)$ und alle $a_1, \cdots, a_n \in A$: $\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \cdots, a_n) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi(\pi a_1, \cdots, \pi a_n)$. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorphe τ-Strukturen, so gilt für alle τ-Sätze ψ: $\mathfrak{A} \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi$. Axiom. Modellklassen sind immer isomorph-abgeschlossen: für jede Klasse $\mathcal{K} = Mod(\psi)$ und alle Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ gilt: $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}, \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$.

Lemma 5.5: Sei π ein Automorphimus einer τ-Struktur $\mathfrak{A}$ und $\psi \in FO(\tau)$. Dann ist π auch ein Isomorphismus der expandierten Struktur $(\mathfrak{A}, \psi^{\mathfrak{A}})$.

Relationale Algebra: See **HowTos**.

5.4 Theorie u. elem. äq. Strukturen: Def. Eine **Theorie** ist eine erfüllbare Menge $T \subseteq FO(\tau)$ von Sätzen, die unter $\models$ abgeschlossen ist, d.h., es gilt für alle τ-Sätze ψ : $T \models \psi \Rightarrow \psi \in T$.

Eine Theorie T ist vollständig, wenn für jeden Satz $\psi \in FO(\tau)$ entweder $\psi \in T$ oder $\neg\psi \in T$. Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. Die **Theorie von** $\mathfrak{A}$ ist $Th(\mathfrak{A}) := \{\psi : \mathfrak{A} \models \psi\}$. $Th(\mathfrak{A})$ ist vollständig. Die Theorie einer τ-Modellklasse $\mathcal{K}$ ist $Th(\mathcal{K}) = \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{K}} Th(\mathfrak{A})$. Wenn Φ ein Axiomsystem für $\mathcal{K}$ ist, dann ist $Th(\mathcal{K}) = \{\psi : \Phi \models \psi\}$.

Def.: Zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind **elementar äquivalent**($\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), wenn $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$. d.h. wenn für alle τ-Sätze ψ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi$.

Lemma 5.12: Eine Theorie ist vollständig gdw. alle ihrer Modelle elem. äqu. sind.

Def. Quantorenrang $qr(\psi)$: die maximale Schachtelungstiefe von Quantoren in der gegebenen Formel.

Def.: zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind *m-äquivalent*($\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$), wenn für alle Sätze ψ mit $qr(\psi) \leq m$ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \psi$. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen, und $\bar{a} = a_1, \cdots, a_r$, $\bar{b} = b_1, \cdots, b_r$ Tupel von Elementen aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$. Dann ist $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv (\mathfrak{B}, \bar{b})$, wenn für alle τ-Tupel $\psi(x_1, \cdots, x_r)$ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$ gdw. $\mathfrak{B} = \psi(\bar{b})$. Analog $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathfrak{B}, \bar{b})$.

5.5: EF-Spiele

Def.: $Loc(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$: lokaler Isomorphismus. Spiel: nach m Zügen: $a_1, \cdots, a_m \in \mathfrak{A}$ und $b_1, \cdots, b_m \in \mathfrak{B}$. Die Dupl. gewinnt die Partie, wenn die Menge $\{(a_1, b_1), \cdots, (a_m, b_m)\}$ ein lokaler Isom. von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist. Andernfalls hat

Satz von E.F. 5.16: Sei τ endlich u. relational, $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ τ-Strukturen. (1) Folgende Aussagen sind äquivalent: *(i)*$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$ *(ii)* Die Dupl. gewinnt das EF-Spiel $G(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$. (2) Für alle $m\in\mathbb{N}$ sind die folgenden Aussagen äq.: *(i)*$\mathfrak{A}\equiv_m\mathfrak{B}$ *(ii)* Die Dupl. gewinnt das EF-Spiel $G_m(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$.
Satz 5.17: Seien $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ τ-Strukturen, $\bar{a}=a_1,\cdots,a_r\in A,\bar{b}=b_1,\cdots,b_r\in B$. Wenn es eine Formel $\psi(\bar{x})$ mit $qr(\psi)=m$ gibt, so daß $\mathfrak{A}\models\psi(\bar{b})$ und $\mathfrak{B}\models\neg\psi(\bar{b})$, dann hat der Herausf. eine GS für $G_m(\mathfrak{A},\bar{a},\mathfrak{B},\bar{b})$. (1): Die Dupl. gewinnt $G(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\Rightarrow\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$. (2): Die Dupl. gewinnt $G_m(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\Rightarrow\mathfrak{A}\equiv_m\mathfrak{B}$.
Kapitel 6
Sequenzkalkül: Mit $\varphi\in FO(\tau)$ oder $\Gamma\subseteq FO(\tau)$ sind immer Sätze gemeint.
Def. Eine *Sequenz* ist eine Ausdruk $\Gamma\Rightarrow\Delta$. Sie heißt korrekt, wenn jedes Model von Γ auch ein Modell mindestens einer Formel aus Γ ist. Wenn $\Gamma\Rightarrow\Delta$ nicht gültig ist, dann ex. eine $\mathfrak{I}$, in der alle Formel an Γ wahr u. an Δ falsh sind. $\mathfrak{I}$ falsifiziert $\Gamma\Rightarrow\Delta$. **Def.** Die Menge der ableitbaren Sequenzen von SK sind induktiv durch die Axiome und Schlußregeln definierte Sequenzmenge, d.h. die kleinste Menge, wlche die Axiome umfaßt und mit jede Instanz der oberen zeile einer SChlussregel auch die entsprechende Instanz der unteren Zeile enthält.
Korrektheit: Es können nur gültige Objekte abgeleitet werden. **Vollständigkeit:** Es können alle gütligen Objekte abgeleitet werden.
Sei $\Phi\subseteq AL$. ψ ist *ableitbar* aus der Hypothesenmenge $\Phi(\Phi\vdash\psi)$, wenn eine endliche Teilmenge Γ von Φ ex., so dass $\Gamma\Rightarrow\psi$ in SK ableitbar ist. Insbesondere ist ψ aus der leeren Hypothesenmenge ableitbar $(\vdash\psi)$, wenn die Sequenz $\emptyset\Rightarrow\psi$ in SK ableitbar werden.

Die *Axiome* sind von Form $\Gamma,\psi\Rightarrow\Delta,\psi$. *Schlussregel*: die von AL plus $+,=,S,\exists,\forall$. **Schluregel des SK**: See How-Tos.
Def. Sei $\Phi\subseteq FO(\sigma)$ eine Menge von Sätzen. Ein Satz ψ ist *ableitbar* aus dem Axiomsystem $\Phi(\Phi\vdash\psi)$, wenn für eine endliche Teilmenge Γ von Φ ex., so dass die Sequenz $\Gamma\Rightarrow\psi$ im SK ableitbar ist. Eine Sequenz $\Gamma\Rightarrow\Delta$ ist ableitbar aus Φ, wenn es eine ableitbare Sequenz $\Gamma,\Gamma'\Rightarrow\Delta$ gilt mit $\Gamma'\subseteq\Phi$.
Satzmenge Φ heißt inkonsistent, wenn jeder Satz ableitbar ist. Ink. Menge sind unerfüllbar. Sonst heißt Φ *konsistent*. Φ ist konsistent $\Leftrightarrow$ jede endliche Teilmenge von Φ konsistent ist.
Satz 6.4 (VS-Satz für SK): Für jede Satzmenge $\Phi\subseteq FO(\sigma)$ und jeden Satz $\psi\in FO(\sigma)$ gilt: *(i)* $\Phi\models\psi\Leftrightarrow\Phi\vdash\psi$ *(ii)*Φ erfüllbar $\Leftrightarrow\Phi$ konsistent.
Satz 6.12 LS-Satz: Jeder erfüllbare, abzählbare Satzmenge hat ein abzählbares Modell.
Satz 6.13:KP-Satz der FO: Für jede Menge $\Phi\subseteq FO(\tau)$ und jedes $\psi\in FO(\tau)$ *(i)*$\Phi\models\psi$ gdw. eine endliche Teilmenge $\Phi_0\subseteq\Phi$ ex., so daß $\Phi_0\models\psi$.*(ii)* Φ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$ jede endliche Teilmenge von Φ ist erfüllbar. **Beweis:** Aus der Definition der Ableitungsbeziehung folgen die entsprechenden systaktischen Aussagen unmittelbar: *(i)*$\Phi\vdash\psi$ gdw. $\Phi_0\vdash\psi$ für eine endliche Teilmenge $\Phi_0\subseteq\Phi$. *(ii)* Φ ist konsistent gdw. jede endliche Teilmenge von Φ konsistent. Da nach VS-Satz eine Formelmenge erfüllbar ist gdw. sie konsitent ist, und die Folgerungsbeziehung $\models$ mit der Ableitungsbeziehung $\vdash$ zusammenfällt, ergeben sich die semantische Aussagen des KP-Satzes.
Satz 6.14: Die Klasse der Körper der Charak. 0 ist nicht endlich axiom.
Satz 6.15: Sei $\Phi\subseteq FO(\tau)$ eine Satzmenge mit beliebig großen endlichen Modellen. Dann hat Φ auch ein unendliches Modell.
Korollar 6.16: Die Klasse aller endlichen τ-Strukturen ist nicht FO-axiom.21730 Graedel, 21715 Dietmar
Satz 6.18. $\uparrow$-Satz von L-S: Φ besitzt ein unendliches Modell. Dann gibt es zu jeder Menge M ein Model $\mathfrak{D}\models\Phi$ über einen Universum D, welches mindestens so mächtig wie M ist.
Lemma 6.19 $\{\mathfrak{B}:\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}\}$ ist die kleinste ax. Modellklasse, die $\mathfrak{A}$ enthält.
Lemma 6.20: Sei $\mathfrak{A}$ eine unendliche Struktur. Dann gibt es eine Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B}$, aber $\mathfrak{A}\ncong\mathfrak{B}$. Insbesonder ist die Isomorphisklasse $\{\mathfrak{A}:\mathfrak{A}\cong\mathfrak{B}\}$ von $\mathfrak{A}$ nicht FO-axiom..
Satz 6.21: $\exists$ ein abzählbares Nichtstandardmodell der Arithmetik. **Satz 6.22**: Das PCP ist unendscheidbar. **Satz 6.23 Church, Turing**: Das Gültigkeitsproblem (damit auch das Erfüllbarkeitsproblem) der FO ist unendscheidbar.
Beispiele und HowTos
FO-axiom. Klassen
(1): Die Kl. der Äquivalenzstruktur mit genau drei equ. klassen:
$\varphi_{eq}:=\forall xExx\wedge\forall x\forall y(Exy\rightarrow Eyx)\wedge\forall x\forall y\forall z(Exy\wedge Eyz\rightarrow Exz)$
$\varphi:=\exists x\exists y\exists z(\neg Exy\wedge\neg Exz\wedge\neg Eyz)\wedge\forall u(\exists xu\vee\exists yu\vee\exists zu)\quad\varphi_1=\varphi_{eq}\wedge\varphi$
(2): Die Kl. der transitiven ungerichteten Graphen, die nicht zshg. sind.
$\forall x\neg Exx\wedge\forall x\forall y(Exy\rightarrow Eyx)\wedge\forall x\forall y(Exy\wedge Eyz\wedge y\neq z\rightarrow Exz)\wedge\exists x\exists y(x\neq y\rightarrow\neg Exy)$
(3): Die Kl. der ungerichteten, unedlichen Graphen: unendl. axiom. aber nicht endl.

(4): Die Kl. der ungerichteten, zykelfreien Graphen: unendl. axiom.:
$\varphi_{graph} \wedge \{\varphi^n_{cyc} : n \in \mathbb{N}, n > 2\}$ mit$\varphi^n_{cyc} := \exists x_1 \cdots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i < n} E x_i x_{i+1} \wedge E x_n x_1)$
(5): $\mathcal{K}_1 := \{(A, f) \mid f$ ist injektiv, aber nicht surjektiv$\}$ $\forall x \forall y (fx = fy \to x = y) \wedge \exists x \forall x \forall y (fy \neq x)$
(6):$\mathcal{K}_2 := \{(A, f) \in \mathcal{K}_1 \mid$ A endlich$\}$ $\mathcal{K}_2 = \emptyset$ $\Phi_2 = \{0\}$, $\mathcal{K}_2$ ist endl. axiom.
(7): $\mathcal{K}_6 := \{(A, f) \mid |\{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}| \leq 753$ für alle $a \in A\}$
$\Phi_6 := \{\forall a \bigvee_{i=0}^{752} \bigvee_{j=1}^{753} f^i(a) = f^j(a)\}$ ist ein endliches Axiomsystem für $\mathcal{K}_6$
(8): Die Kl. aller Gruppen $(G, \circ, e, ^{-1})$: $\Phi_{Gruppe} = \{\forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ z) \circ z), \forall x (x \circ e = x), \forall x (x \circ x^{-1} = e)\}$
(9): τ eine Signatur, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K}_{ge}$ die Klasse der τ-Strukturen mit min. n Elementen. $\mathcal{K}_{\geq n} (n > 2)$ ist axiom. durch $\varphi_{\geq n} : \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$.
(10): Klasse $\mathcal{K}_\infty$ aller unendlichen τ-Strukturen: $\Phi_\infty = \{\varphi_{\geq} : n \in \mathbb{N}\}$.
(11): Die Klasse der Körper mit Char. p: $\psi_{k\ddot{o}rper} \wedge \chi_p$.
(12): Die Kl. der ACF: $\Phi_{ACF} = \{\varphi_{k\ddot{o}rper}\} \cup \{\varphi_n : n \geq 1\}$
(13): $(A, <)$, **diskret**: $\forall x (\neg y (x < y) \vee \exists y (x < y \wedge \neg \exists z (x < z \wedge z < y)))$ und $\forall x (\neg \exists y (y < x) \vee \exists y (y < x \wedge \neg \exists (z < x \wedge y < z)))$
(14): L.O., in denen über u. unter jedem Element unendliche viele Elemente haben. (für jedes Element gibt es ein größeres Element, d.h. jedes Element e hat unendlich viele d's mit $d > e$)
$\Phi_{l.o.} = \{\forall x \neg x < x, \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x), \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \to x < z)\}$.
$\Phi = \Phi_{l.o.} \cup \{\forall x \exists y (x < y), \forall x \exists y (y < x)\} \Rightarrow$ endl. axiom..
(15) L.O., deren Intevall alle nicht dicht sind.
$\Phi = \Phi_{l.o.} \cup \{\forall x \forall y \exists u \exists v (x < y \to x \leq < v \leq y \wedge \neg \exists z (u < z \wedge z < v))\}$.
(16) Die Kl. $\mathcal{K}_8$ aller Strukturen, welche zu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ elem. äq. sind.
$\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +, \cdot) := \{\varphi \in FO : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \models \varphi\}$

Strukturen

(1)Mengen: Sei $\tau = \emptyset$. Die $\emptyset$-Struktur mit Universum A ist einfach A.
(2)Graphen: keine Schlingen; Symmetrie. (3) Eine lineare Ordnung ist **dicht**, wenn zu zwei beliebigen Elementen $a < b$ immer ein c exists mit $a < c < b$. Eine **Wohlordnung** ist eine lineare Ordnung $(A, <)$ ohne unendliche absteigende Ketten: Es gibt keine unendlihce Folge $a_0, a_1, a-2, \cdots$ in A so dass $a_{i+1} < a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. $(\mathbb{N}, <)$ ist eine Wohlordnung während $(\mathbb{Z}, y)$ oder $(\mathbb{Q}^+, <)$ keine sind.
(5): Garaph bipartit gdw. es enthält keinen Zyklus ungerader Länge.

Homomorphismus & Automorphismus

Um Lemma 5.5 anzuwenden, muß man zuerst einen Automorphismus finden. Hier ein paar Tricks:
(1): Für $(\mathbb{N}, \cdot)$: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; 2^a \cdot 3^b \cdot c \longmapsto 2^b \cdot 3^a \cdot c; 0 \longmapsto 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{N}, a, b \geq 0, 2 \not| c, 3 \not| c$.
(2): Für $(\mathbb{Z}, <) : f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; z \longmapsto z + 1$.
(3): Für $(\mathbb{Q}, \cdot) : f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}; q \longmapsto q/2$.
(4): Für $(\mathbb{Q}, +) : f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}; q \longmapsto 1/q$.
(5): Für $\leq$ in$(\mathbb{Q}, +) : q \longmapsto -q$.
(6): Für $(\mathbb{Q}^+, \cdot) \overset{f}{\cong} (\mathbb{Z}[X], +)$: Jedes $a \in \mathbb{Q}^+$ kann auf eindeutige Weise als Produkt $a = p_0^{z_0} \cdot p_1^{z_1} \cdots p_m^{z_m}$ mit p_i ist die i-te Primzahl und $z_i \in \mathbb{Z}$. Setze $f(a) = z_0 + z_1 x + z_2 x^2 \cdots + Z_m x^m \in \mathbb{Z}[X]$.
(7)Zur Begründung:$\mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{B}$, f ist keine Einbettung: $\mathfrak{A}$ kann nicht isomorph sein zu eine Substruktur von $\mathfrak{B}$.
(8) Jede abzählbare, dichte, lineare Ord. ohne Endpunkte ist isomorph zu $(\mathbb{Q}, <)$
(9) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, <)$, $\mathfrak{B} := (P(\mathbb{N}), \subseteq)$ $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, a \mapsto (0, \ldots, a-1)$ ist sogar ein starker Homomorphismus.

FO-Axiomatisierbar: HowTo

1. Für endliche axiomatisierbare Klassen: Axiomsystem angeben! Vgl. Beispiele.
2: Dann müssen wir zwischen Fälle unterscheiden:Fall 1: nicht FO-axiom.: (i): alle endlichen Klassen $\rightsquigarrow$ KP-Satz zeige mit$\Phi \cup \{\psi_{\geq n}, n \in \mathbb{N}\}$.
(ii): alle abzählbaren Klassen $\rightsquigarrow$ Löwenheim-Skolem: $(\mathbb{N}, +)$ ist abzählbar!
(iii): alle üeberabzählbaren Klassen $\rightsquigarrow$ Satz 6.12. Angenommen ist Φ ein Modell, dann hat Φ ein abzählbares Modell. Widerspruch!
(iv): **Satz von E-F:** Wichtige Methode, um zu zeigen, dass eine MK $\mathcal{K}$ nicht elementar definierbar ist. Wenn es gelingt, Strukturen $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$ zu finden, so dass Dupl. das Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt, dann folgt, dass kein FO-Satz $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unterscheiden kann, damit auch kein FO-Satz $\mathcal{K}$ axiomatisiert. Eine Stärkere Variante der EF-

die Dupl. das Spiel $G_m(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ gewinnt. Annahme: $\mathcal{K}$ elem. axiom. $\Rightarrow$ Widerspruch: Sei $m = qr(\psi)$. Nach dem Satz von EF ist $\mathfrak{A}_m \equiv \mathfrak{B}_m$. Also $\mathfrak{A}_m \models \psi$ gdw. $\mathfrak{B}_m \models \psi$. Das ist unmöglich, da $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{B}_m \notin \mathcal{K}$. Eigenschaften, welche Rekursion (oder unbeschränkte Iteration) erfordern sind i.A. nicht FO-defnierbar.
Fall 2: FO-axiom., aber nicht endlich: Axiomsystem angeben u. dann zeigen, dass das System nicht endlich ist.
(i): Mit KP-Satz. S. oben. (ii):Konstruiere zwei Strukturen $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}, \mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$, aber $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ Nach KP-Satz gilt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, also unmöglich.
Beispiele (a): $\mathcal{K}_3 := \{(A, f) \mid A\,\text{überabählbar}\}$
$\mathcal{K}_3$ nicht axiom., weil jeder erfüllbare abzälbare Satzmenge auch ein abz. Modell hat.
(b): $\mathcal{K}_4 := \{(A, f) \mid (A, f) \cong (\mathbb{N}, s)\}$, wobei $s(n) := n+1$
$\mathcal{K}_4$ nicht ax., da unedliche Struktur nur für endliches Isomophie axiom. ist.
(c): $\mathcal{K}_5 := \{(A, f) \mid f^{-1}(a)\,\text{ist unendlich für ein}\,a \in A\}$
$\Phi = \{\psi_n, n \in \mathbb{N}\}, \psi_n := \exists y_1, \cdots \exists y_n \bigwedge_{i=1}^n f(y_i) = a \bigwedge_{1 \le i < j \le n} y_i \neq y_j$ Aber nicht endl. axiom.
(d): Die Kl. der Körper mit Char. 0: $\Phi = \{\varphi_{k\ddot{o}rper}\} \cup \{\neg\chi_p : p\,\text{Primzahl}\}$
CTL-HowTo
ALLEGEMEINES:
$\star EX\psi :\equiv \Diamond\psi$ $\quad\star F\psi := (1U\psi)$: irgendwan git ψ (auf dem Pfad)
$\star AX\psi :\equiv \Box\psi$ $\quad\star G\psi := \neg F\neg\psi$: Es gilt immer ψ (auf dem Pfad).
SPEZIELLES:
Kein Nachfolger $\equiv AX0 \equiv \Box 0$
jder erreichbare Zustand, auf allen Pfaden, an jedem Zustand $\equiv AG$
Ein Zustand mit Q ist erreichbar $\equiv EFQ$
Es gibt einen direkten Nachfolger $\equiv EX1$
Ein Zustand P gilt immer vor $Q \equiv PUQ$
Wenn am direkten Nachfolger Q gilt, dann am aktuellen Zustand P $\equiv AG(EXQ \to P)$
höchstens ein Zustand vorkommt, an dem P gilt $\equiv (P \to AG\neg P)$
An der Nachfolgeposition gilt immer P $\equiv AXP$
Es gibt einen P Nachfolger $\equiv EXP$
Alle Pfade der Länge 4 $\equiv AXAXAXAXQ \equiv \Box\Box\Box\Box Q$
P gilt dreimal direkt hintereinder $\equiv P \wedge Ex(P \wedge EXP)$
Regeln des Sequenzkalküls
$(\neg\Rightarrow)\, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \| \Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Gamma$ $\qquad (\Rightarrow,\neg)\, \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \| \Gamma \Rightarrow, \Delta, \neg\psi$
$(\vee\Rightarrow)\, \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta \| \Gamma, \psi \vee \vartheta \Rightarrow \Delta$ $\qquad (\Rightarrow\vee)\, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \vartheta \| \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta$
$(\wedge\Rightarrow)\, \Gamma, \psi, \vartheta \Rightarrow \Delta \| \Gamma, \psi \wedge \vartheta \Rightarrow \Delta$ $\qquad (\Rightarrow\wedge)\, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta \| \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta$
$(\to\Rightarrow) \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta \| \Gamma, \psi \to \vartheta \Rightarrow \Delta$ $\qquad (\Rightarrow\to) \Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta \| \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \to \vartheta$
Folgende sind SK nur für FO:
$(=)\Gamma, t = t \Rightarrow \Gamma \| \Gamma \Rightarrow \Delta$
$(S\Rightarrow)\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta \| \Gamma, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta$ $\qquad (\Rightarrow S)\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t) \| \Gamma, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')$
$(\exists,\Rightarrow)\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Gamma \| \Gamma, \exists x\psi(x) \Rightarrow \Delta$ (Wenn c in Γ, Δ und $\psi(x)$ nicht vorkommt)
$(\Rightarrow\exists)\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t) \| \Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\psi(x)$
$(\forall\Rightarrow)\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta \| \Gamma, \forall x\psi(x) \Rightarrow \Delta$ $\qquad (\Rightarrow\forall)\Gamma \Rightarrow \Delta, \Psi(c) \| \Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\psi(x)$ Wenn c in Γ, Δ und $\psi(x)$ nicht vorkommt.
RA $\Longleftrightarrow$ FO
Lemma 5.6 RA $\to$ FO (1) Für $R_j \in \tau$, setze $\psi_{R_j}(\bar{x}) := Rx_1 \cdots x_r$. (2) $\psi_{R\cup S}(\bar{x}) := \psi_R(\bar{x}) \vee \psi_S(\bar{x})$ und $\psi_{R-S}(\bar{x}) := \psi_R(\bar{x}) \wedge \neg\psi_S(\bar{x})$. (3) $\psi_{R\times S}(\bar{x}) := \psi_{R(x_1,\ldots,x_r)} \wedge \psi_S(x_{r+1}, \ldots, x_{r+s})$. (4) Für $S := \pi_{i_1,\ldots,i_s}$ setze $\psi_S(x_1, \ldots, x_s) := \exists y_1 \cdots \exists y_r(\psi_R(y_r$ $\bigwedge_{j=1}^s x_j = y_{i_j})$ (5) Für $S = \sigma_{i=j}(R)$ setze $\psi_S(\bar{x}) := \psi_R(\bar{x}) \wedge x_i = x_j$.
Schema: (i) Anzahl der Variablen markieren. (ii) Der Index von π sind Varialblen im Def., z.B. $\pi_{1,2,5} \Rightarrow \psi(x_1, x_2, x_5)$. (iii) Die übrigen Var. benutzt man in $\exists$. (iv) Alle Gleichung von σ wird in der Klammern ausgedrückt. (v) Die Anzahl der Variablen reduzieren. (vi) Sonsiges: (v.a) Univ = Ax_i, gilt immer als wahr. (v.b) wenn $\sigma_{i=j}$ vor dem regulären RA-Formel, bedeutet: $x_i = x_j \wedge$ für $x_i, x_j \in Def.$. (v.c) $\bigcup \Rightarrow \wedge$ (v.d) Wenn zwei Teilformel mit $\bigcup$ verbunden sind, die mit grösseren Anzahl von Variablen zuerst umformen. die mit der kleineren mit anderen Variablen umformen. Dann steht die Indexnummer von der kleineren die Indexnummern von der Definitionsvar..
Satz 5.9 FO $\Rightarrow$ RA (1) φ ein Autom der Form $x_i = x_j$ ist, dann setze $R_{\varphi,m} := \sigma_{ij}\text{Univ}^m$. (2) Ein Atom $\varphi := Rx_{xi_1} \cdots x_{i-s}$ wird gesetzt zu der Formel:$R_{\varphi,m} := \pi_{1,\ldots,m}\sigma_{m+1=i_1} \cdots \sigma_{m+s=i_s}(\text{Univ}^m \times R)$. (3) Für $\varphi = \neg\vartheta$ ist $R_{\varphi,m} :=$

$\exists x_{m+1}\vartheta(x_1,\ldots,x_m+1)$ setzen wir $R_{\varphi,m} := \pi_{1,\ldots,m}R_{\vartheta,m+1}$ (5ii) für $\varphi = \exists x_i\vartheta(x_1,\ldots,x_m)$ mit $i \le m$ setzen wir: $R_{\varphi,m} := \pi_{1,\ldots,i-1,m+1,i+1,\ldots,m}R_{\vartheta,m+1}$

AL-Formel in Richtung Rechneraritmetik

Wichtig: $\alpha\oplus\beta := (\alpha\wedge\neg\beta)\vee(\neg\alpha\wedge\beta)$ $\alpha\leftrightarrow\beta := (\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)$

Damit erhalten wir: $x_i\wedge y_i \iff x_i,y_i$ müssen gleichzeitig 1 sein, um 1 zu bekommen; $\neg x_i\wedge\neg y_i : x_i,y_i$ müssen beide 0, um 1 zu bekommen.

Wenn es um **Addition** geht, ist die folgende Formel wichtig: $\mathrm{add}(\bar u,\bar v,\bar w) := \bigwedge_{i=0}^n w_i \leftrightarrow ((u_i\oplus v_i)\oplus \mathrm{carry}_i)\wedge w_{n+1}\leftrightarrow \mathrm{carry}_{n+1}$ $\mathrm{carry}_i := \bigvee_{j<i}((u_j\wedge v_j)\wedge\bigwedge_{j<k<i}(u_k\vee v_k))$

Etwas zu XOR: $X_1\oplus X_2\oplus\ldots\oplus X_n = 1$ if die Anzahl von X_i mit Wert 1 ungerade ist, sonst 0.

$5X = X+4X$, wobei $4=2^2$, d.h. $4X = X << 2$(Shifting)

Rechenregel

$\natural : \psi\wedge(\varphi\vee\vartheta)\equiv(\psi\wedge\varphi)\vee(\psi\wedge\vartheta)$ $\natural : \psi\vee(\varphi\wedge\vartheta)\equiv(\psi\vee\varphi)\wedge(\psi\wedge\vartheta)$

$\natural : \psi\to\varphi\equiv\neg\psi\to\neg\varphi$ $\natural : \forall x\psi\equiv\neg\exists x\neg\psi$ $\natural : \neg t_1 = t_2\equiv t_1\neq t_2$

$\natural : \psi\wedge(\psi\vee\varphi)\equiv\psi\vee(\psi\wedge\varphi)\equiv\psi$ **Absorption: WICHTIG!!!**

$\natural : \exists x(\psi\vee\varphi)\equiv\exists x\psi\vee\exists x\varphi$ $\natural : \forall x(\psi\wedge\varphi)\equiv\forall x\psi\wedge\forall x\varphi$ $\natural : \neg\exists x\psi\equiv\forall x\neg\psi$ $\natural : \neg\forall x\psi\equiv\exists x\neg\psi$ $\natural : \exists x\exists y\psi\equiv\exists y\exists x\psi$ $\natural : \forall x\forall y\psi\equiv\forall y\forall x\psi$.

Falls x nicht frei in ψ: $\star\psi\vee\exists x\varphi\equiv\exists x(\psi\vee\varphi)$ $\star\,\psi\wedge\exists x\varphi\equiv\exists x(\psi\wedge\varphi)$ $\star\,\psi\vee\forall x\varphi\equiv\forall x(\psi\vee\varphi)$ $\star\,\psi\wedge\forall x\varphi\equiv\forall x(\psi\wedge\varphi)$

HowTo: GS von den Knoten eines Graphes bestimmen:

Induktiver Aufbau der Gewinnmenge w_0 und w_1: (1) Alle Knoten, die keinen Nachfolger haben, ordnen wir zu w_i zu, wenn Spieler $1-i$ am Zug, aber nicht ziehen kann.

(2) Jetzt der Reihe nach die Vorgängerknoten ueberprüfen: Für ein Knoten v, an dem Spieler i am Zug ist, und an dessen Nachfolgerknoten(Pl!) hat jeweils Spieler $j_1,\ldots j_n$ eine GS, if $i = j_i$, dann gehört Knoten v zu Gewinnmenge i, sonst zu GM 1 - i . (3) Wiederholde (2) bis zur Wurzel.

HowTo: Auswertungsspiel:

(1) Formel ψ in NNF überführen ($\to$ eliminieren). (2) ψ in geeignete Unterformeln mit geeignete Varialblen zerlegen: Formel ohne Quantor geeignet konstruieren, Formel mit Quantor immer eine einstellige Formel. (3) Auswertungsspiel nach Regeln beginnen. Zum Schluss müssen die Blätter nach Relation u./o. Funktion ausgewertet werden: jeweils mit $\surd$ und $\times$ markieren. (4) Eine GS kann vom Graph dann abgelesen werden. **Entscheidbarkeit**

Das Erfuellbarkeitsproblem fuer ML ist entscheidbar. $\Rightarrow$ Satz 4.21

Das Erfuellbarkeitsproblem fuer FO ist **unentscheidbar** $\Rightarrow$ Satz 6.23

Das Auswertungsproblem (damit auch das Model Cheking Problem) for ML ist effizient loesbar $\Rightarrow$ Satz 4.23.

Das Auswertungsproblem fuer FO auf endlichen Strukturen ist unentscheidbar.

FO-Axiom.-Beispielloesung

(a): Die Klasse aller Strukturen, welche $(\mathbb{Q},+)$ isomorph sind, ist nicht FO-axiom., da jede Formelmenge Φ mit $(\mathbb{Q},+)\models\Phi$ laut Satz von LS auch ein ueberabzaehlbares Modell hat, welches nicht isomorph zu $(\mathbb{Q}),+$ sein kann.

(b): Graphen mit einem Hamiltonkreis ist nicht FO-Axiom., Gaebe es ein solches Axiomsystem Φ, so waere die Erweiterung zu $\Phi' := \Phi\cup\{\varphi_{\ge n} : n>1\}$ auch erfuellbar. Dies fuehrt zum Widerspruch, da ein Hamiltongraph endlich sind.

(c): Wir erhalten ein Axiomensystem fuer die Klasse der Strukturen (A,f), in denen die Formel $\varphi(x,y) := \exists z(fxz = y)$ eine lineare Ordnung definerit, indem wir im Axiomensystem $\Phi_<$ die Relation ¡ durch die folgende Formel φ ersetzen: $\Phi := \{\forall x\neg\varphi(x,x), \forall x\forall y\forall z(\varphi(x,y)\wedge\varphi(y,z)\to\varphi(x,z)), \forall x\forall y(\varphi(x,y)\vee\varphi(y,x)\wedge x=y)\}$.

(e): Die Klasse aller Substrukturen von $(R,<)$ ist nicht axiom., da nach dem aufsteigenden Satz von LS jede Formelmenge, die $(\mathbb{R},<)$ erfuellt, auch Modelle der Maechtigkeit $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}|$hat, welche nicht Substruktur von $(\mathbb{R},<)$ sein koennen.

(f): Die Klasse der Graphen, welche einen Zyklus enthalten, ist nicht FO-axiom.. Angenommen, es gaebe dafuer ein Axiomsystem Φ. Sei, fuer $n>1$, $\varphi_n := \exists\ldots x_n(\bigwedge_{i=1}^{n-1} Ex_iX_{i+1}\wedge Ex_nx_1)$. Laut KP-Satz waere dann die Formelmenge $\Phi\wedge\{\neg\varphi_n : n>1\}$ erfuellbar, ein Modell davon wuerde aber keine Zykel enthalten.

(g): Die Klasse der ungerichteten Graphen, in denen alle Knoten ungeraden Grad haben. KP-Satz: $\varphi_n(x)$ x hat Grad n. II gewinnt $G_m(\mathfrak{A}_m,\mathfrak{B}_m)$. Ein Graph erfuellt die Bedingung, das andere nicht. Es ist nicht endl. ax.. Nach Kompaktheitssatz: $\varphi_n(x)$:–x hat Grad n. Φ axiom. $\mathcal{K},\vartheta := \Phi\cup\{\forall x\neg\varphi_n(x), n$ ungerade. Jede Teilmenge zu ϑ ist erfuellbar, also auch ϑ selbst.

(h): Die Klasse der ungerichteten Graphen, so dass zu je zwei Konten x und y ein zykel existeirt, welcher beide

Nicht FO-axiom.. Angenommen, es exi ein Φ, welches deise Klasse axiomatisiert. Dazu definieren wir die Formelmenge $\Psi := \Phi \cup \{\varphi_{cyc}^n : n \in \mathbb{N}, n > 2\}$, welche zusaetzlich sagt, dass es fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ keinen Zykel dieser Laenge gibt. Sei nun $\Psi_0 \subseteq \Psi$ eine endliche Menge von Ψ, also $\Psi \subseteq \Phi \cup \{\varphi_{cyc}^3, \dots, \varphi_{cyc}^m\}$ fuer ein m. Dies ist natuerlich erfuellbar, indem man nur den gerichteten Zykel betrachtet mit $m+1$ Elementen. nach KP-Satz folgt nun, dass uch Ψ erfuellbar ist. Sei $\mathfrak{A}$ Modell von Ψ und somit auch von auch *Phi*, aber muss A muss zykelfrei sein. Widerspruch. (g): Die Theorie **linearen Ordnung, in denen jedes Intervall endlich** ist. Annahme Φ axiom. diese Theorie. $\Theta = \Phi \cup \{\psi_n(c,d) :\in \mathbb{N}\}$, $\psi_n(c,d) = \exists x_1 \cdots \exists x_n (c < x_1 \wedge \bigwedge_i x_i < x_{i+1} \wedge x_n < d)$. Jede endliche Teilmenge von Θ ist erfuellbar, also ist Θ selbst erfuellbar. Widerspruch! **Beweis der einfachen Richtungen von FO-KP-Satz:** (i):$\Leftarrow$: Angenommen es existiert eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models \psi$. Sei nun A ein Model von Φ, dann gilt insbesondere, dass A auch ein Modell von Φ_0 sein muss. Wegen $\Phi_0 \models \psi$ muss $A \models \psi$ gelten. Somit folgt insgesamt $\Phi \models \psi$. (ii) $\Rightarrow$: Sei A ein Modell von Φ, d.h., fuer alle $\phi \in \Phi$ gilt: $A \models \phi$. somit gilt naturelich auch $A \models \Phi_0$ fuer eine beliebige Teilmenge Φ_0 von Φ. Somit ist eine beliebige Teilmenge auch erfuellbar.Widerspruch!

Homomorphismus-Beispiele: Gegeben seien folgende Strukturen: $A := (\{0,1\}^*, f^A)$ mit $f(u,v) := uv$. $B := (N, f^B)$ mit $f(u,v) := u+v$ $C := (N, f)$ mit $f(u,v) := u \cdot v$. Geben Sie fuer jeds Paar von Strukturen einen Homomorphismus zwischen diesen an.

$\natural A \to B : h : u \mapsto |u|$ $\natural B \to C\, g : n \mapsto 2^n$ $\natural A \to C\, f := g \circ h$ $\natural B \to A\, f_1 : n \mapsto 0_n$ $\natural C \to B :\; f_2 : n \mapsto 0$ $\natural C \to A :\; f_3 : n \mapsto \lambda$(das leere Wort)