Aussagenlogik

• Die Menge **AL** der aussagenlog. Formeln ist induktiv definiert durch (1) $0, 1$ (Boolsche Konst.) $\in$ AL (2) τ (meist feste, abzählbar unendliche Menge von Aussagenvar.) $\subseteq$ AL (3) $\psi, \varphi \in$ AL $\Rightarrow$ Wörter $\neg\psi, (\psi \wedge \varphi), (\psi \vee \varphi), (\psi \to \varphi) \in$ AL.
• **(Formel-)Tiefe:** (1)$d(\psi) := 0$ für atomare ψ. (2) $d(\neg\psi) := d(\psi) + 1$. (3) $d((\psi \circ \varphi)) := 1 + \max(d(\psi), d(\varphi))$.
• Für jede Formel $\psi \in$ AL sei $\tau(\psi) \subseteq \tau$ Menge der in ψ tatsächl. vorkomm. Aussagenvar.
• Statt $[\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$ schreibt man auch $\mathcal{I} \models \psi$: "$\mathcal{I}$ erfüllt ψ".
• $\psi(X_1, \ldots, X_n)$ bedeutet: $\tau(\psi) \subseteq \{X_1, \ldots, X_n\}$. Sei $\mathcal{I}(X_1) = w_1, \ldots, \mathcal{I}(X_n) = w_n$. Schreibe: $[\![\psi(w_1, \ldots, w_n)]\!]$oder $[\![\psi(\mathbf{w})]\!]$für $[\![\psi]\!]^{\mathcal{I}}$.
• Falls $\Phi = \emptyset$: $\bigwedge \Phi = 1, \bigvee \Phi = 0$. Bei $\bigwedge \Phi, \bigvee \Phi$ muss Φ immer endlich sein!
• Formel ψ **erf.** gdw. $\neg\psi$ keine **Tautologie**. $\models \psi$: ψ ist Tautologie.
• Jede Formel $\psi(X_1, \ldots, X_n) \in$ AL def. eine **Boolsche Fkt.** $h_\psi \in B^n (f : \{0,1\}^n \to \{0,1\})$ durch die Vorschrift $h_\psi(w_1, \ldots, w_n) := [\![\psi(w_1, \ldots, w_n)]\!]$. (1.7) Zu jeder Fkt. $f \in B^n$ gibt es eine Formel $\psi(X_1, \ldots, X_n)$ mit $h_\psi = f$.
• **Literal:** Aussagenvar. X oder Negation $\neg$X, $\overline{X} := \neg X$.
• Aus Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in$ AL bilde neue Formel $f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ deren Semantik lautet: $[\![f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]\!]^{\mathcal{I}} := f([\![\varphi_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots, [\![\varphi_n]\!]^{\mathcal{I}})$.
• Menge $\Omega \subseteq B$ von Boolschen Fkt. **funktional vollständig**, wenn sich daraus jede Boolsche Fkt. $f : B^n \to B (n \geq 1)$ (im Sinne von 1.7) def. lässt. **f. v.:** $\{\wedge, \vee, \neg\}, \{\wedge, \neg\}, \{\vee, \neg\}, \{\to, \neg\}, \{\to, 0\}, \{\wedge, \oplus, 1\}, \{|\}, | := (\psi|\varphi) \equiv \neg(\psi \wedge \varphi)$. **nicht f.v.:** $\{\wedge, \vee, \to\}$.
• **Horn-Formel:** Eine Horn-Formel $\psi \in$ AL ist eine Formel $\psi = \bigwedge_i \bigvee_j Y_{ij}$ in KNF, wobei jede Disjunktion $\bigvee Y_{ij}$ höchstens ein positives Literal enthält.
• **Horn-Formel mit Implikationen:** (1) $\neg X_1 \vee \ldots \vee \neg X_k \vee X \equiv X_1 \wedge \ldots \wedge X_k \to X$. Für $k = 0$ als $1 \to X$. (2) $\neg X_1 \vee \ldots \vee \neg X_k \equiv X_1 \wedge \ldots \wedge X_k \to 0$.
• **Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln:** Wenn (1) nicht vorhanden, erf., indem alle X_i mit 0 bewertet. Wenn (2) nicht vorhanden, erf., indem z.B. alle X_i mit 1 bewertet. Sonst, markiere alle X_i , die auf rechter Seite von $1 \to X_i$. Dann, falls irgendwo linke Seite komplett markiert, markiere auch die rechte. Abbruch, falls in (2) ganze linke Seite markiert. Sonst output: "ψ erfüllbar" und kleinstes Modell ("alle Markierten auf Eins").
• **Semantische Folgerungsbeziehung:** $\Phi \models \psi$ ("ψ folgt aus Φ") gdw. jede zu $\Phi \cup \{\psi\}$ passende Interpret., welche Modell von Φ ist, auch Modell von ψ ist. Wenn $\Phi = \{\varphi\}$ schreibe: $\varphi \models \psi$.
• **Kompaktheits- oder Endlichkeitssatz:** Sei $\Phi \subseteq$ AL, $\psi \in$ AL. (i) Φ erf. gdw. jede endl. Teilmenge von Φ erf. (ii) $\Phi \models \psi$ gdw. eine endl. Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ex., so dass $\Phi_0 \models \psi$.
• **Zorn:** Sei (A, <) eine nicht-leere partielle Ordnung, in der jede Kette nach oben beschränkt ist. Dann besitzt (A, <) ein maximales Element.
• **König:** Sei T endl. verzweigter Baum mit Wurzel w, in dem bel. lange endl. Wege ex. Dann ex. unendl. Weg in T von w aus. Baum endl. verzweigt, wenn von jedem v nur endl. viele Kanten.
• **Klauselmenge:** Klausel C: endl. Menge von Literalen. $\Box$: leere Klausel. Endl. Klauselmenge $K(\psi) := \{C_1, \ldots, C_m\}$ mit ψ in KNF und jeder Disjunktion Klausel C_i zugeordnet durch $C_i = \{Y_{ij} : j = 1, \ldots, m_i\}$.$K = \emptyset$ erf. Wenn $\Box \in$ K, dann K unerf.
• **Einheitsres. für Horn-Formeln:** Ist **vollständig** (alle gültigen Objekte können abgeleitet werden). Die leere Klausel $\Box$ und die Klauseln $\{X\}$ sind auch **Horn-Klauseln**.
• Ein Beweiskalkül ist **korrekt**, wenn keine falschen Aussagen darin ableitbar sind.
• **Sequenzenkalkül:** Γ, Δ für $\Gamma \cup \Delta$ und Γ, ψ für $\Gamma \cup \{\psi\}$. Sequenz: $\Gamma \Rightarrow \Delta$ für endl. $\Gamma, \Delta \subseteq$ AL; Sequenz gültig, wenn jedes Modell von Γ auch Modell mind. einer Formel von Δ. $\mathcal{I}$ falsifiziert Sequenz, wenn $\mathcal{I}$ alle Formeln aus Γ wahr und alle aus Δ falsch macht. **Axiome**: $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$. Für Γ, Δ Mengen von Aussagenvar.: $\Gamma \Rightarrow \Delta$ falsifizierbar gdw. $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$. $\Gamma \Rightarrow \emptyset$ gültig gdw. Γ unerfüllbar. $\emptyset \Rightarrow \Delta$ gültig gdw. $\bigvee \Delta$ ($\bigvee_{\delta \in \Delta} \delta$) gültig.

Schlussregeln:

$(\neg \Rightarrow)\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow \neg)\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$

$(\vee \Rightarrow)\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \vartheta \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow \vee)\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta}$

$(\wedge \Rightarrow)\dfrac{\Gamma, \psi, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \wedge \vartheta \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow \wedge)\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta}$

$(\to \Rightarrow)\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \quad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \to \vartheta \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow \to)\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \to \vartheta}$

• Sei $\Phi \subseteq$ AL Formelmenge. Ein $\psi \in$ AL ist ableitbar aus der **Hypothesenmenge** Φ ($\Phi \vdash \psi$), wenn endl. Teilmenge Γ von Φ ex., so dass die Sequ. $\Gamma \Rightarrow \psi$ im SK ableitbar ist. Insbesondere ψ aus leerer Hypothesenmenge ableitbar ($\vdash \psi$), wenn $\emptyset \Rightarrow \psi$ in SK ableitbar.
• Ableitungsbaum vollst., wenn alle Blätter pos. (mit Axiom beschriftet) oder neg. (mit Sequ. $\Gamma \Rightarrow \Delta$ beschriftet ist, wobei Γ und Δ disjunkte Mengen von Aussagenvar.).

Strukturen und Homomorphismen

Seien $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ τ-Strukturen.
• A Menge, $A^0 = \{\Box\}$ ($\Box$: leeres Tupel).
• **Nullstell. Rel. (Boolsche Rel. oder Aussagen):** $R_0 = \emptyset$ (falsch) und $R_1 = \{\Box\}$ (wahr). **Nullstell. Fkt.** (Konstanten): $f : \{\Box\} \to A$ werden durch einzigen Fkts.wert $f(\Box)$ best. **Graph einer n-stelligen Fkt.**: $f : A^n \to A$ ist (n+1)- stell. Rel. $G_f := \{(\overline{a}, b) \in A^{n+1} : f(\overline{a}) = b\}$.
• $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$
• **Mächtigkeit:** Mengen A, B **gleichmächtig**, wenn bij. Abb. von A nach B ex. A **abzählbar**, wenn surj. Abb. $f : \mathbb{N} \to A$ ex. Jede abzählbare Menge entweder endl. oder gleichmächtig zu $\mathbb{N}$. Keine Menge gleichmächtig zu ihrer Potenzmenge. Pot($\mathbb{N}$) überabzählbar.
• **Signatur:** (Symbolmenge, Vokabular) $\tau = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n(\tau) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^n(\tau)$, R, F $n-$stell. Fkt. bzw. Rel. τ **relational**, wenn sie nur Rel.symbole enthält bzw. **funktional** oder **algebraisch**, wenn sie nur Fkts.symbole enthält. Nullstell. Fkts.symbole heißen Konst.symbole.
• **τ-Strukt.** $\mathcal{A}$: (1) Univ. (Träger) A (nichtleer). (2) Interpret.fkt., die jedem Rel.- bzw. Fkts.-symbol Rel. $P^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ bzw. Fkt. $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ zuordnet. **τ-Algebra:** Strukt. mit funkt. Sign.
• $\mathcal{A}$ **Substruktur** von $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$): (1) $A \subseteq B$. (2) $\forall n \in \mathbb{N}, R \in R^n(\tau)$: $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}} \cap A^n$. (3) $\forall n \in \mathbb{N}, f \in F^n(\tau) : f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{B}}_{|A}$, d.h. $f^{\mathcal{A}}$ Restriktion von $f^{\mathcal{B}}$ auf A. Wenn $\mathcal{A}$ Substruktur von $\mathcal{B}$, dann $\mathcal{B}$ **Erweiterung** von $\mathcal{A}$. Das Universum jeder Substruktur ist τ-abgeschlossen. Zu jeder nichtleeren, τ-abgeschlossenen Teilmenge $A \subseteq B$ gibt es genau eine Substruktur von $\mathcal{B}$ mit Träger A die (**von A in $\mathcal{B}$ induzierte Substruktur**).
• $\sigma \subseteq \tau$ Sign., dann **σ-Redukt** $\mathcal{B} \restriction \sigma$ von $\mathcal{B}$ ist σ-Struktur, die aus $\mathcal{B}$ erhalten, wenn Rel. und Fkt. in $\tau - \sigma$ weggelassen. Ist $\mathcal{A}$ Redukt einer τ-Struktur $\mathcal{B}$, dann $\mathcal{B}$ **τ-Expansion** von $\mathcal{A}$.
• **$\emptyset$-Struktur** mit Universum A ist A selber.
• **Unger. Graph**: $\tau_G = \{E\}$-Strukt. $G = (V, E^G)$ und: (1) keine Schlingen: $\forall v \in V$: $(v, v) \notin E^G$. (2) Symm.: $\forall u, v \in V : (u, v) \in E^G \Rightarrow (v, u) \in E^G$. Bei **ger. Graphen** nur (1).
• **Lin. u. part. Ord.:** part. Ord. $\{<\}$-Strukt. $(A, <)$, mit: (1) für kein $a \in A$ ist $a < a$ (Irreflex.). (2) wenn $a < b, b < c$, dann $a < c$ (Transit.). (3) Also, wenn $a < b$, dann nicht $b < a$ (Antisymm.). Lin. oder totale Ord. erfüllt noch (4) für alle a, b entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$ (Vergleichbark.). Lin. Ord. **dicht**, wenn zu zwei bel. $a < b$ immer c ex. mit $a < c < b$. **Wohlord.**: lin. Ord. $(A, <)$ ohne unendl. absteigende Ketten.
• **Wortstrukt.**: Wort $w = w_0 \ldots w_{n-1}$ über Alph. Γ Strukt. $\mathcal{B}(w)$ der Sign. $\{<\} \cup \{P_a : a \in \Gamma\}$ zugeordn. Univ.: $\{0, \ldots, n-1\}$, $<$ übliche Ord. und $P_a := \{i < n : w_i = a\}$ (einstell.).
• **Homomorph.:** (strukturerhaltende) Abb. $\pi : A \to B$ ist Hom. von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, wenn (1) Für jedes Rel.symbol $R \in R^n(\tau)$ und alle $\overline{a} \in A^n$ gilt: $\overline{a} \in R^{\mathcal{A}} \Rightarrow \pi(\overline{a}) \in R^{\mathcal{B}}$. (2)Für jedes Fkts.symbol $f \in F^n(\tau)$ und alle $\overline{a} \in A^n$ gilt: $\pi f^{\mathcal{A}}(\overline{a}) = f^{\mathcal{B}}(\pi(\overline{a}))$. **starker Hom.:** (1)' Für jedes Rel.symbol $R \in R^n(\tau)$ und alle $\overline{a} \in A^n$ gilt: $\overline{a} \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \pi(\overline{a}) \in R^{\mathcal{B}}$. **Einbettung:** inj., starker Hom. **Isomorph.:** bij., starker Hom. π Isomorph., $\pi : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$, dann $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.
Automorph.: $\pi : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$. Wenn π Einbett., dann $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$. Menge aller Automorph. einer Strukt. $\mathcal{A}$ bilden bzgl. Hintereinanderausf. Gruppe mit neutr. Elem. $1_{\mathcal{A}}$ (**Identität**), die **Automorph.gruppe** oder Symm.gruppe von $\mathcal{A}$: Aut($\mathcal{A}$). Strukt. $\mathcal{A}$ **starr**, wenn Aut($\mathcal{A}$) = $\{1_{\mathcal{A}}\}$.
• Bem.: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ lässt sich π auf natürl. Weise zu einer Abb. $A^n \to B^n$ erweitern, mit $\pi(a_1, \ldots, a_n) := (\pi a_1, \ldots, \pi a_n)$.

Syntax und Semantik der Prädikatenlogik (FO)

Sei τ Signatur.
• Alph(τ) := {Rel.- und Fkts.symbole in τ, VAR = $\{v_0, v_1, \ldots\}$ (fest, abzählbar unendl.), $=, \neg, \wedge, \vee, \to, \exists, \forall, (,)\}$. **$\{\tau$-Terme$\}$** := T($\tau$): (1) VAR $\subseteq$ T(τ). (2) Sind $t_1, \ldots, t_n$ τ-Terme und $f \in F^n(\tau)$, auch $ft_1, \ldots, ft_n$ τ-Term, $n \in \mathbb{N}$. In **Grundterm** treten keine Var. auf. $t(x_1, \ldots, x_n)$ meint, dass $x_1, \ldots, x_n$ paarweise versch. sind und dass in t keine anderen Var. als diese vorkommen. **$\{\tau$-Formeln$\}$** :=FO(τ): (1) Sind t_1, t_2 τ-Terme, dann $t_1 = t_2$ τ-Formel. (2) Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme aus T(τ) und $P \in \tau$ n-stelliges Rel.symbol, dann $Pt_1 \ldots t_n$ τ-Formel. (3) Wenn ψ τ-Formel, auch $\neg\psi$. (4) Wenn ψ, φ τ-Formeln, dann auch $(\psi \wedge \varphi), (\psi \vee \varphi), (\psi \to \varphi)$. (5) Wenn $\psi \in$ FO(τ), $x \in$ VAR, dann auch $\exists x\psi, \forall x\psi \in$ FO(τ).
• **Atome**: nur (1),(2). **Literale**: Atome und deren Neg. **quant.freie Formeln:** nur (1)-(4).
• $\psi(x_1, \ldots, x_k)$: höchstens $x_1, \ldots, x_k$ freie Var. in ψ. **τ-Satz:** τ-Formel ohne freie Var.
• Wenn τ abzählbar, dann auch Alph(τ). Dann auch Alph(τ)* und damit T(τ), FO(τ).
• Eine **τ-Interpret.** ist Paar $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$, wobei $\mathcal{A}$ τ-Strukt. und $\beta : X \to A$ Belegung von Var. durch Elemente von $A.X = Def(\beta) \subseteq$ VAR.

• Ein **Modell** von ψ ist eine Interpret. $\mathcal{I}$, so dass Frei(ψ) $\subseteq Def(\beta)$ und $[\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$. Schreibe: $(\mathcal{A}, \beta) \models \psi$ oder $\mathcal{A} \models \psi[\beta]$ "ψ gilt in $\mathcal{A}$ unter Belegung β".
• $\psi \in$ FO(σ) gehört auch zu FO(τ), wenn $\sigma \subseteq \tau$. Interpret. $(\mathcal{A}, \beta)$ **passend** für ψ, wenn alle Fkts.- und Rel.symbole von ψ in Sign. von $\mathcal{A}$ und alle freien Var. von ψ zu $Def(\beta)$ gehören.
• Sei $(\mathcal{A}, \beta)$ Interpret., die $x_1, \ldots, x_k$ durch Elem. $a_1 = \beta(x_1), \ldots, a_k = \beta(x_k)$ bewertet. Schreibe meistens: $\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_k)$.
• Φ Menge von τ-Sätzen. **Modellkl.** von Φ (Mod(Φ)): alle τ-Strukt. $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \models \Phi$. Kl. $\mathcal{K}$ von τ-Strukt. **axiom.** durch Φ, wenn $\mathcal{K}$= Mod(Φ), Φ **Ax.system** für $\mathcal{K}$. Bsp.: (1) Kl. aller unger. Graphen ist Modellkl. von $\Phi = \{\forall x \neg Exx, \forall x \forall y(Exy \to Eyx)\}$. (2) Kl. aller Gruppen $(G, \circ, e, ^{-1})$ ax. durch: $\Phi = \{\forall x \forall y \forall z(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z), \forall x(x \circ e = x), \forall x(x \circ x^{-1} = e)\}$. (3) Ax.system für Kl. aller lin. Ordnungen $\Phi = \{\forall x \neg x < x, \forall x \forall y \forall z(x < y \wedge y < z \to x < z), \forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)\}$. (4) $\mathcal{K}_{\geq n}$ $(n \geq 2)$: Kl. aller τ-Strukt. mit mind. n Elem. und ax. durch: $\varphi_{\geq n} := \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$. $\mathcal{K}_\infty$: Kl. aller unendl. τ-Strukt. axiom. durch $\Phi_\infty = \{\varphi_{\geq n} : n \in \mathbb{N}\}$. (5) Graph bipartit gdw. enthält keinen Zyklus ungerader Länge.
• $(A, <)$ **diskret**, wenn $-$ zu jedem a, außer dem kleinsten, ein $b < a$ ex., so dass kein c mit $b < c < a$ ex. und $-$ zu jedem a, außer dem größten, ein $b > a$ ex., so dass kein c mit $b < c < a$ ex. In Ax.systemen diskret: $\forall x(\neg\exists y(x < y) \vee \exists y(x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y)))$ und $\forall x(\neg\exists y(y < x) \vee \exists y(y < x \wedge \neg\exists z(z < x \wedge y < z)))$.
• **Semantische Folgerungsbeziehung:** Sei $\Phi \subseteq$ FO(τ), $\psi \in$ FO(τ). "ψ folgt aus Φ" ($\Phi \models \psi$) gdw. jede zu $\Phi \cup \{\psi\}$ passende Interpret., die Modell von Φ, auch Modell von ψ. Wenn $\Phi = \{\varphi\}$ auch $\varphi \models \psi$. ψ allg.gültig, dann $\emptyset \models \psi$.ψ, φ log. äqu. ($\psi \equiv \varphi$), wenn $\psi \models \varphi$ und $\varphi \models \psi$.
• ψ Formel mit Frei(ψ) = $\{x_1, \ldots, x_k\}$. **existentieller Abschluss:** der Satz $\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi$. **universeller Abschluss:** der Satz $\forall x_1 \ldots \forall x_k \psi$. (1) Formel erfüllbar gdw. existentieller Abschluss erfüllbar. (2) Formel allgemeingültig gdw. universeller Abschluss allgemeingültig.
• **Subst.:** Fkt. ρ : VAR $\to$ T(τ). (I.d.R. lässt ρ alle bis auf endlich viele $x \in$ VAR fest. ("ρ hat endlichen Support"). Subst., die $x_1, \ldots, x_k$ auf Terme $t_1, \ldots, t_k$ abb. auch als: $x_1/t_1, \ldots, x_k/t_k$. $t[x/s]$: jedes Vorkomm. von x in Term t durch s ersetzen. Op. auf Termen: Subst. auf eindeutige Weise zu Fkt. $\overline{\rho}$: T(τ) $\to$ T(τ) fortsetzen. Alle Vorkomm. von x in t durch $\rho(x)$ ersetzen. $\overline{\rho}$ angew. auf t : $t[\rho]$. Es ist: $ft_1 \ldots t_n[\rho] = ft_1[\rho] \ldots t_n[\rho]$. Op. auf Formeln: Anwend. einer Subst. $\rho = [x_1/t_1, \ldots, x_k/t_k]$ auf ψ führt zu neuem $\psi[\rho]$, indem simultan alle freien Vorkomm. der x_i durch die Terme t_i ersetzt werden, sofern keine Kollision. Kollision dann, wenn freies Vorkomm. zu ersetzender Var. x_j in Unterformel $\exists y\varphi$ oder $\forall y\varphi$ und Term t_j die Var. y enthält. Um Kollision aufzulösen, ersetze in $\exists y\varphi$ geb. Var. y durch neue, nicht in ψ und $t_1, \ldots, t_k$ vorkomm. Var. und führe Subst. durch. Simultane Subst. und Hintereinanderausführen von Subst. einzelner Var. sind unterschiedlich. Simuliere simultane Subst. durch Komposition einzelner Subst.
• Sei $\mathcal{I}$ Interpret. und $\rho = (x_1/t_1, \ldots, x_k/t_k)$ eine Subst., so dass $[\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}$ def. sind (wenn alle Var. von $t_1, \ldots, t_k$ in Def(β)). Dann $\mathcal{I} \circ \rho = (\mathcal{A}, \beta[x_1/ [\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots, x_k/ [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}])$ neue Interpret. über Strukt. $\mathcal{A}$, die Var. $y \in$ Def(β) $\cup \{x_1, \ldots, x_k\}$ durch $[\![\rho(y)]\!]^{\mathcal{I}}$ bewertet.
• **Subst.lemma:** Für jeden Term $t \in$ T(τ), jede Formel $\psi \in$ FO(τ), jede Subst. ρ : VAR $\to$ T(τ), jede zu $t[\rho]$ bzw. $\psi[\rho]$ passende Interpret. $\mathcal{I}$ gilt: (1) $[\![t[\rho]]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t]\!]^{\mathcal{I} \circ \rho}$. (2) $\mathcal{I} \models \psi[\rho] \Leftrightarrow (\mathcal{I} \circ \rho) \models \psi$.
• **reduzierte Formeln:** enthalten kein $\wedge, \to, \leftrightarrow, \forall$.
• Formel in **NNF**, wenn aus Literalen nur mit Junkt. $\vee, \wedge$ und Quant. $\exists, \forall$ aufgebaut.
• Eine Formel ist **termreduziert**, wenn sie nur Atome der Form $R\overline{x}$, $f\overline{x} = y$, $x = y$ enthält.
• ψ **bereinigt**, wenn keine Var. in ψ sowohl frei wie gebunden auftritt, und wenn keine Var. mehr als einmal quantifiziert wird. (Gebundene Var. können umbenannt werden.)
• Eine Formel ist in **PNF**, wenn sie bereinigt ist und die Form $Q_1x_1 \ldots Q_rx_r\varphi$ hat, φ quantorenfrei und $Q_i \in \{\exists, \forall\}$. **Präfix:** Anfangsstück $Q_1x_1 \ldots Q_rx_r$.
• **Skolem-Normalform:** Zu jeder Formel $\psi \in$ FO(σ) lässt sich eine Formel $\varphi \in$ FO(τ) mit $\tau \subseteq \sigma$ konstr., so dass: (1) $\varphi = \forall y_1 \ldots \forall y_s\varphi'$, φ' quantorenfrei. (2) Frei(ψ) = Frei(φ). (3) $\varphi \models \psi$. (4) Zu jedem Modell von ψ ex. Expansion, die Modell von φ ist. Methode: ψ in PNF. Entferne $\exists$ von links nach rechts, indem je eins entfernt, und in ψ die vorher ex.quant. Var. durch Fkt. von allen Var., die an den Allquant. vor dem entf. Ex.quant. standen, ersetzt.
• **Auswertungsspiel:** FO-Satz ψ (in NNF) und dazu passende Struktur $\mathcal{A}$ def. Auswert.spiel MC($\mathcal{A}$, ψ) zwischen Verifiziererin V und Falsifizierer F. Pos. des Spiels sind Paare (φ, β), φ Unterformel von ψ und Bewertung β : Frei(φ) $\to A$. Für $\varphi = \varphi(\overline{x})$ und $\beta : \overline{x} \to \overline{a}$ schreibe $\varphi(\overline{a})$ für (φ, β). Spiel beginnt bei Pos. ψ. Sei $\varphi(\overline{a})$ aktuelle Pos. Weiter geht es abhängig von φ: $-$ wenn φ Literal, dann Ende. Falls $\mathcal{A} \models \varphi(\overline{a})$ gewinnt V, sonst F. $-$ Bei $(\vartheta \vee \mu)$ kann V zu ϑ oder μ ziehen. $-$ Bei $(\vartheta \wedge \mu)$ kann F zu ϑ oder μ ziehen. $-$ Bei $\exists x\vartheta(x, \overline{b})$ wählt V ein $a \in A$ und zieht zu $\vartheta(a, \overline{b})$. $-$ Bei $\forall x\vartheta(x, \overline{b})$ wählt F ein $a \in A$ und zieht zu $\vartheta(a, \overline{b})$.
• **Spielgraph** $\mathcal{G}$: $\mathcal{G}$= (V, V_0, E); V: alle Spielpos.; $V_0 \subseteq V$ Pos., an denen Sp. 0 am Zug; analog zu V_0 : $V_1 := V - V_0$; $E \subseteq V \times V$: alle möglichen Züge. Für Pos. v sei $vE = \{w : (v, w) \in E\}$ die Menge der unmittelb. Nachfolgerpos. Pos. v mit $vE = \emptyset$ ist **Endpos.**. Wenn im Spiel Endpos. erreicht wird, hat Sp. verloren, der am Zug ist (aber nicht ziehen kann). Für $\sigma \in \{0, 1\}$ ist die Menge T_σ der Endpos., an denen Sp. σ gewinnt, def. durch $T_\sigma = \{v \in V_{1-\sigma} : vE = \emptyset\}$. **Partie** mit Anfangspos. v_0 ist endl. oder unendl. Pfad $(v_0, \ldots, v_m)$ bzw. $(v_0, \ldots)$, so dass $(v_{i-1}, v_i) \in E$ für alle $i > 0$ und v_m Endpos. ist. Spiel **fundiert**, wenn alle Partien endl. sind. (Dies ist bei Auswertungsspielen für FO der Fall.)
• **Strategie** für Sp. σ ist Fkt. $f : \{v \in V_\sigma : vE \neq \emptyset\} \to V$, so dass $(v, f(v)) \in E$. Wenn Sp. σ jede Partie mit Anfangspos. v_0 gewinnt, wenn er mit Strat. f spielt, dann f **Gewinnstrat.** von Pos. v_0 aus. **Gewinnregion** von Sp. σ ist $W_\sigma := \{v$: Sp. σ hat Gewinnstrat. von Pos. v aus$\}$. Spiel **determiniert**, wenn von jeder Pos. ein Sp. Gewinnstrat. hat, also $W_0 \cup W_1 = V$.
• Für jeden FO-Satz ψ und jede dazu passende Strukt. $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A} \models \psi$ gdw. V hat Gewinnstrat. für MC($\mathcal{A}$, ψ) von Anfangspos. ψ.

Modallogik

• **ML** (mit Akt. aus A und atom. Eigensch. P_i(für $i \in I$)): (1) alle Formeln aus AL mit Auss.var. P_i sind in ML. (2) Wenn $\psi, \varphi \in$ ML, dann auch $\neg\psi, (\psi \vee \varphi), (\psi \wedge \varphi), (\psi \to \varphi)$. (3) Wenn $\psi \in$ ML, $a \in A$, dann auch $< a > \psi, [a]\psi$ in ML. Wenn $|A| = 1$, schreibe $\Diamond\psi$ (möglicherweise ψ), $\Box\psi$ (notwendigerweise ψ).
• **Trans.system** oder **Kripkestruktur** mit Akt. aus A und atom. Eigensch. $\{P_i : i \in I\}$ ist Strukt. $\mathcal{K} = (V, (E_a)_{a \in A}, (P_i)_{i \in I})$ mit Univ. V, zweistell. Rel. $E_a \subseteq V \times V (a \in A)$ (Trans. zw. Zust.) und einstell. Rel. $P_i \subseteq V (i \in I)$ (Eigensch. der Zust.). Statt $(u, v) \in E_a$ auch $u \xrightarrow{a} v$.
• Sei $\mathcal{K}$ Trans.system, $\psi \in$ ML und v Zust. von $\mathcal{K}$. **Modellbez.** $\mathcal{K}, v \models \psi$ (ψ gilt im Zust. v von $\mathcal{K}$): (1) $\mathcal{K}, v \models P_i$ gdw. $v \in P_i$. (2) Bedeut. von $\neg\psi, (\psi \wedge \varphi), (\psi \vee \varphi), (\psi \to \varphi)$ wie üblich. (3) $\mathcal{K}, v \models < a > \psi$, wenn w ex. mit $(v, w) \in E_a$ und $\mathcal{K}, w \models \psi$. (4) $\mathcal{K}, v \models [a]\psi$ gdw. für alle w mit $(v, w) \in E_a$ gilt: $\mathcal{K}, w \models \psi$. Für jedes ψ, jedes Tr.system $\mathcal{K}$ **Extension**: $[\![\psi]\!]^{\mathcal{K}} := \{v : \mathcal{K}, v \models \psi\}$.
• $vE_a := \{w : (v, w) \in E_a\}$: Menge aller a-Nachfolger von v.
• Zu jeder Formel $\psi \in$ ML ex. Formel $\psi^*(x)$ in FO^2, so dass für alle Trans.systeme $\mathcal{K}$ und alle Zust. v von $\mathcal{K}$ gilt: $\mathcal{K}, v \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{K} \models \psi^*(v)$. $\psi^*(y)$ erhält man aus $\psi^*(x)$, indem man freie und gebundene Vorkommen von x durch y ersetzt, und umgekehrt. $\psi \in$ ML $\mapsto \psi^*(x) \in FO^2$: (1) $P_i \mapsto P_ix$. (2) $\neg\psi \mapsto \neg\psi^*(x)$. (3) $(\psi \circ \varphi) \mapsto (\psi^*(x) \circ \varphi^*(x))$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$. (4) $< a > \psi \mapsto \exists y(E_axy \wedge \psi^*(y))$. (5) $[a]\psi \mapsto \forall y(E_axy \to \psi^*(y))$.
• **Erf., Gültigk., Äqu.:** Formel $\psi \in$ ML **erf.**, wenn Trans.system $\mathcal{K}$ und Zust. v von $\mathcal{K}$ ex., so dass $\mathcal{K}, v \models \psi$. Ist **gültig**, wenn $\mathcal{K}, v \models \psi$ für alle $\mathcal{K}$ und alle v. Formeln ψ, φ **äqu.** ($\psi \equiv \psi$), wenn $[\![\psi]\!]^{\mathcal{K}} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{K}}$ für alle zu ψ, φ passenden Trans.systeme $\mathcal{K}$.
• **NNF:** Jedes $\psi \in$ ML ist äqu. zu Formel, in der Negation nur auf atom. Eigensch. P_i.
• **Bisim.:** Seien $\mathcal{K}$= $(V, (E_a)_{a \in A}, (P_i)_{i \in I})$ und $\mathcal{K}' = (V', (E'_a)_{a \in A}, (P'_i)_{i \in I})$ Trans.systeme. Bisim. zw. $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ ist Rel. $Z \subseteq V \times V'$, so dass für alle $(v, v') \in Z$ gilt: (1) $v \in P_i \Leftrightarrow v' \in P'_i$ für alle $i \in I$. (2) **Hin:** Für alle $a \in A, w \in V$ mit $v \xrightarrow{a} w$ ex. $w' \in V'$ mit $v' \xrightarrow{a} w'$ und $(w, w') \in Z$. **Her:** Für alle $a \in A, w' \in V'$ mit $v' \xrightarrow{a} w'$ ex. $w \in V$ mit $v \xrightarrow{a} w$ und $(w, w') \in Z$.
• Seien $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ Kripkestrukt., $u \in V, u' \in V'$.$(\mathcal{K}, u)$ und $(\mathcal{K}', u')$ **bisimilar** $(\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', u')$, wenn Bisim. Z zw. $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ ex., so dass $(u, u') \in Z$.
• **Bisim.spiel:** Sp. I, II spielen auf $\mathcal{K}$,$\mathcal{K}'$, auf denen je ein Spielstein. In Anfangspos. Steine auf u bzw. u'. I bewegt Stein in $\mathcal{K}$ oder $\mathcal{K}'$ entlang Trans. zu neuem Zust. II antwortet entlang "gleicher" Trans. in jeweils anderer Strukt. I verl., wenn zu Knoten kommt, von dem keine Trans. weg. II verl., wenn nicht mit entsprech. Akt. antworten kann. Am Anfang und nach jedem Zug geprüft, ob für aktuelle Pos. (1) gilt. Wenn nicht, gew. I. II gew., wenn nie verl.
• II gewinnt das Bisim.spiel auf $\mathcal{K}$,$\mathcal{K}'$ von (u, u') aus gdw. $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', u'$.
• II gewinnt n-Züge-Bisim.spiel, wenn Strat. hat, um n Züge lang zu spielen ohne zu verl. **n-Bisimilarität:** Seien $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ mit v, v' Kripkestrukt. $-$ $\mathcal{K}, v \sim_0 \mathcal{K}', v'$ gdw. für alle $i \in I$: $v \in P_i \leftrightarrow v' \in P'_i$. $-$ $\mathcal{K}, v \sim_{n+1} \mathcal{K}', v'$ gdw. (i) $\mathcal{K}, v \sim_n \mathcal{K}', v'$ (ii) $\forall$ w mit $v \xrightarrow{a} w$ ex. w' mit $v' \xrightarrow{a} w'$ mit $\mathcal{K}, w \sim_n \mathcal{K}', w'$. (iii) $\forall$ w' mit $v' \xrightarrow{a} w'$ ex. w mit $v \xrightarrow{a} w$ mit $\mathcal{K}, w \sim_n \mathcal{K}', w'$.
• Für alle $n \in \mathbb{N}$ äquivalent: (1) II gewinnt n-Züge-Bisim.spiel von (v, v') aus. (2) $\mathcal{K}, v \sim_n \mathcal{K}'v'$.
• Für alle Kripkestrukt. $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ mit Zust. v bzw. v' gilt: Wenn $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}, v$, dann $\mathcal{K}$, $v \sim_n \mathcal{K}', v'$ für alle n. Umkehrung gilt nicht: es ex. $\mathcal{K}, v; \mathcal{K}', v'$, so dass $\mathcal{K}, v \sim_n \mathcal{K}', v'$, aber $\mathcal{K}, v \not\sim \mathcal{K}', v'$.
• **Modaltiefe:** (1) md(ψ) = 0 für $\psi \in$ AL. (2) md($\neg\psi$) = md(ψ) (3) md($\psi \circ \varphi$) = max(md(ψ), md(φ)) für $\circ \in \{\vee, \wedge, \to\}$. (4) md($< a > \psi$) = md($[a]\psi$)=md($\psi$)+1.
• Seien $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ Kripkestrukt., $v \in \mathcal{K}, v' \in \mathcal{K}'$. (1) $\mathcal{K}, v \equiv_{ML} \mathcal{K}', v'$, wenn für alle $\psi \in$ ML gilt: $\mathcal{K}, v \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{K}'$, $v' \models \psi$. (2) $\mathcal{K}, v \equiv^n_{ML} \mathcal{K}', v'$, wenn für alle $\psi \in$ ML mit md(ψ)$\leq n$ gilt: $\mathcal{K}, v \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{K}', v' \models \psi$.
• Für Kripkestrukt. $\mathcal{K}$,$\mathcal{K}'$ und $u \in \mathcal{K}$,$u' \in \mathcal{K}'$ gilt: (1) $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', u' \Rightarrow \mathcal{K}, u \equiv_{ML} \mathcal{K}', u'$. (2) $\mathcal{K}, u \sim_n \mathcal{K}', u' \Rightarrow \mathcal{K}, u \equiv^n_{ML} \mathcal{K}', u'$.
• **Bisim.invarianz der ML:** Wenn $\mathcal{K}, v \models \psi$ und $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$, dann auch $\mathcal{K}', v' \models \psi$.

- Trans.system endl. verzweigt, wenn für alle Zust. v und alle Akt. a die Menge vE_a endl. Jedes endl. Trans.system endl. verzweigt.
- Seien $\mathcal{K}$,$\mathcal{K}'$ endl. verzweigte Trans.systeme. Dann $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', u' \Leftrightarrow \mathcal{K}, u \equiv_{ML} \mathcal{K}', u'$.
- Trans.system $\mathcal{K}$ mit ausgezeichnetem Knoten w ist **Baum**, wenn (1) $E_a \cap E_b = \emptyset$ für alle Akt. $a \neq b$. (2) für $E = \bigcup_{a \in A} E_a$ ist (V, E) ein (ger.) Baum mit Wurzel w (s. König).
- Φ Menge von Formeln (irgendeiner Logik). (1) Φ hat **EME**, wenn jede erf. Formel $\varphi \in \Phi$ endl. Modell hat. (2) Wenn Φ über Trans.systeme spricht (d.h. nur ein-,zweistell. Rel.), dann hat Φ **BME**, wenn jede erf. Formel in Φ Modell hat, das Baum ist. (3) Analog **EBME**.
- FO hat weder EME noch BME. FO^2 hat EME.
- **Unendlichkeitsaxiome:** erf. Formeln, die nur unendl. Modelle haben.
- Sei $\mathcal{K}$ Kripkestrukt., $v \in V^{\mathcal{K}}$. **Abwicklung** von $\mathcal{K}$ von v aus ist Kripkestrukt. $\mathcal{T}_{\mathcal{K},\mathrm{v}}$. $\mathrm{end}(\overline{v})$: letzter Knoten auf Pfad $\overline{v}$. Damit $\overline{v} \in P_i^{\mathcal{T}} \Leftrightarrow \mathrm{end}(\overline{v}) \in P_i^{\mathcal{K}}$. Es gilt $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{T}_{\mathcal{K},\mathrm{v}}, v$.
Abw. von $\mathcal{K}$ vom Zust. v aus, besteht aus allen Pfaden in $\mathcal{K}$, die bei v beginnen. Dabei jeder Pfad als separates Objekt angesehen, d.h. selbst wenn zwei Pfade überschneiden, wird jeder zu einem neuen Zust. in der abgewickelten Strukt., und jeder Zust. aus $\mathcal{K}$, der auf einem Pfad von v aus erreicht wird, wird neu zu Abwicklung hinzugefügt, unabh. davon, ob schon mal erreicht.
- ML hat die BME. Jede Klasse von bisim.-invarianten Formeln hat BME.
- Für jedes $\psi \in$ ML def. wir für alle $n \in \mathbb{N}$ Formelmenge $C_n(\psi)$: (1) $\psi \in C_0(\psi)$. (2) Wenn $\neg\varphi \in C_n(\psi)$, dann $\varphi \in C_n(\psi)$. (3) Wenn $(\varphi \wedge \vartheta) \in C_n(\psi)$ oder $(\varphi \vee \vartheta) \in C_n(\psi)$, dann $\varphi, \vartheta \in C_n(\psi)$. (4) Wenn $< a > \varphi \in C_n(\psi)$ oder $[a]\varphi \in C_n(\psi)$, dann $\varphi \in C_{n+1}(\varphi)$. Sei $C(\psi) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_j(\psi)$. **Abschluss** $C_j(\psi)$ enthält die Formeln aus ML, die für Auswertung von ψ wesentlich; $C_j(\psi)$ sind dabei die Formeln, die in ψ innerhalb von j verschachtelten Modaloperatoren vorkomm. Beachte, dass $|C(\psi)| \leq |\psi|$ und dass $C_n(\psi) = \emptyset$ für alle $n >\mathrm{md}(\psi)$.
- Zu jedem erf. $\psi \in$ ML ex. endl. Baumstrukt. $\mathcal{T}, v$ mit Tiefe $\leq\mathrm{md}(\psi)$ und Verzweigungsgrad $\leq |C(\psi)|$, so dass $\mathcal{T}, v \models \psi$ (Ex. nur endl. viele solche.). Insbesondere hat ML EBME.
- **Model-Checking-Problem:** Geg. $\psi \in$ ML, endl. Trans.system $\mathcal{K}$ und Zustand v von $\mathcal{K}$. Entscheide, ob $\mathcal{K}, v \models \psi$.
- **(endl.) Erf.:** Geg. $\psi \in$ ML. Entscheide, ob (endl.) Modell für ψ ex. (Für Logiken mit EME beide Probleme identisch. Für FO unentscheidbar.)
- **Auswertungsproblem:** Geg. ψ, endl. Trans.system $\mathcal{K}$. Berechne Extension $[\![\psi]\!]^{\mathcal{K}}$. (Auswert.- und Model-Checking-Probl. effizient aufeinander reduzierbar. Für ML effizient lösbar.)
- **Subsumtionsproblem:** Zu geg. ψ, φ entscheide, ob jedes Modell von ψ auch Modell von φ. (Dies genau dann nicht, wenn $\psi \wedge \neg\varphi$ erfüllbar. Lässt sich auf Erfüllbarkeit reduzieren.)
- Erfüllbarkeitsprobl. für ML, CTL entscheidbar. Für AL nicht effizient lösbar.
- Erreichbarkeit nicht in ML und FO formalisierbar, in CTL definierbar.
- **CTL:** CTL operiert auf Trans.systemen mit nur einer Trans.rel. E. Vor.: E terminiert nicht, d.h. zu jedem $u \in V$ ex. ein v, so dass $(u, v) \in E$.
- **Syntax von CTL:** (1) alle aussagenlog. Formeln über $\{P_i : i \in I\}$ sind in CTL. (2) CTL abgeschlossen unter $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$. (3) Wenn $\psi, \varphi \in$ CTL, dann auch $\mathrm{EX}\psi$, $\mathrm{AX}\psi$, $\mathrm{E}(\psi \mathrm{U} \varphi)$, $\mathrm{A}(\psi \mathrm{U} \varphi)$.
- **Semantik von CTL:** Sei $\mathcal{K}$ Kripkestrukt., $v \in V$. Dann gilt: (1) $\mathrm{EX}\psi := \Diamond\psi$. (2) $\mathrm{AX}\psi := \Box\psi$. (3) $\mathcal{K}, v \models \mathrm{E}(\psi\mathrm{U}\varphi)$, wenn Folge $v = v_0 v_1 \ldots$ gibt (mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle i) und $n \geq 0$ ex., so dass $\mathcal{K}, v_n \models \varphi$ und $\mathcal{K}, v_m \models \psi$ für alle m mit $0 \leq m < n$. (4) $\mathcal{K}, v \models \mathrm{A}(\psi\mathrm{U}\varphi)$, wenn für alle unendl. Pfade $v = v_0 v_1 \ldots$ gibt (mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle i) und $n \geq 0$ ex. mit $\mathcal{K}, v_n \models \varphi$ und $\mathcal{K}, v_m \models \psi$ für alle m mit $0 \leq m < n$.
- $\mathrm{F}\psi := (1\mathrm{U}\psi)$: irgendwann ψ (auf dem Pfad); $\mathrm{G}\psi := \neg\mathrm{F}\neg\psi$: immer ψ (auf dem Pfad);
- CTL invariant unter Bisim., kann nicht in FO eingebettet werden, hat EME, Erfüllbarkeitsprob. entscheidb. (in exponent. Zeit). CTL-Formeln effizient auswertbar.
- A: für alle Pfade, E: es gibt Pfad, X: im nächsten Zustand

Definierbarkeit in der Prädikatenlogik

- $\mathrm{Str}(\tau)$ Kl. aller τ-Strukt. Strukt.klasse $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Str}(\tau)$ ist **(FO-)axiom.**, wenn Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ ex., so dass $\mathcal{K}$=Mod(Φ). Wenn Ax.system Φ für $\mathcal{K}$ endl., können wir $\psi = \bigwedge\{\varphi : \varphi \in \Phi\}$ und $\mathcal{K}$ durch einzigen Satz axiom.; dann $\mathcal{K}$ **elementar** oder **endl. axiom.**. endl. axiom.: Graphen; Gruppen; lin., part., dichte lin., diskrete lin. Ordnungen, Ringe, Körper (mit Char. p (mit χ_p ist Satz: p-mal 1 addiert = 0) oder Klasse ACF (algebr. abgeschl. Körper)), Äqu.strukt.
- Sei $\psi(x_1, \ldots, x_r) \in \mathrm{FO}(\tau), \mathcal{A}$ τ -Strukt. Dann def. ψ in $\mathcal{A}$ r-stell. Rel. $\psi^{\mathcal{A}} := \{(a_1, \ldots, a_r) : \mathcal{A} \models \psi(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a_r})\} \subseteq \mathrm{A^r}$.
- Rel. $R \subseteq A^r$ auf Univ. einer τ-Strukt. $\mathcal{A}$ ist **(elem.) def.bar.** in $\mathcal{A}$, wenn $R = \psi^{\mathcal{A}}$ für Formel $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$. Fkt. $f : A^r \rightarrow A$ elem. def.bar., wenn Graph R_f elem. def.bar. Konst. a **termdef.bar.** in $\mathcal{A}$, wenn Grundterm $t \in \mathrm{T}(\tau)$ ex., so dass $t^{\mathcal{A}} = a$. Jede termdef.bare Konst. elem. def.bar. durch Formel $x = t$.
- Sei $\mathcal{A}$ eine τ-Strukt., $\mathcal{B}$ Expansion von $\mathcal{A}$ durch bel. viele, in $\mathcal{A}$ elem. def.bare Rel. und Fkt. Dann jede in $\mathcal{B}$ elem. def.bare Rel. oder Fkt. bereits in $\mathcal{A}$ elem. def.bar.
- **relativierte Quantoren:** (1) $(\exists x.\alpha)\psi$ für $\exists x(\alpha \wedge \psi)$. (2) $(\forall x.\alpha)\psi$ für $\forall x(\alpha \rightarrow \psi)$.
- **Isomorphielemma:** Sei $\pi : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ von τ-Strukt. Dann gilt für alle $\psi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{FO}(\tau)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$: $\mathcal{A}\models \psi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{B}\models \psi(\pi a_1, \ldots \pi a_n)$.
- $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ isom. τ-Strukt., dann für alle τ-Sätze ψ : $\mathcal{A}\models \psi \Leftrightarrow \mathcal{B}\models \psi$. Also axiom. Modellkl. immer isom.-abgeschl. D.h., für jede Kl. $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\psi)$ und alle Strukt. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{A} \in \mathcal{K}, \mathcal{A}\cong \mathcal{B}\Rightarrow \mathcal{B} \in \mathcal{K}$.
- Sei π Automorph. einer τ-Strukt. $\mathcal{A}$, $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$. Dann π auch Automorph. expandierter Strukt. $(\mathcal{A}, \psi^{\mathcal{A}})$.
- **RA:** Sei $\tau = \{R_1, \ldots, R_m\}$ (rel.). Terme von $\mathrm{RA}(\tau)$ aus Rel.symbolen von τ def.: (1) jedes Rel.symbol $R_j \in \tau$ ist Term von $\mathrm{RA}(\tau)$. Wenn R, S Terme von $\mathrm{RA}(\tau)$, auch (2) $(R \cup S), (R - S)$; (3) $(R \times S)$; (4) für $i_1, \ldots, i_s \leq r$: $\pi_{i_1,\ldots,i_s}(R)$; (5) für $i, j \leq r$: $\sigma_{i=j}(R)$.
- Jeden r-stell. Term $R \in \mathrm{RA}(\tau)$ kann man in Formel $\psi_R(x_1, \ldots, x_r) \in \mathrm{FO}(\tau)$ transform., so dass für alle τ-Strukt. $\mathcal{A}$ gilt: $R^{\mathcal{A}} = \{(a_1, \ldots, a_r) \in A^r : \mathcal{A} \models \psi_R(a_1, \ldots, a_r)\}$. Methode: (1) Für $R_j \in \tau$, setze $\psi_{R_j}(\overline{x}) := Rx_1 \ldots x_r$. (2) $\psi_{(R\cup S)}(\overline{x}) := \psi_R(\overline{x}) \vee \psi_S(\overline{x})$ und $\psi_{(R-S)}(\overline{x}) := \psi_R(\overline{x}) \wedge \neg\psi_S(\overline{x})$. (3) $\psi_{(R\times S)}(\overline{x}) := \psi_R(x_1, \ldots, x_r) \wedge \psi_S(x_{r+1}, \ldots, x_{r+s})$. (4) Für $S := \pi_{i_1,\ldots,i_s}(R)$ setze $\psi_S(x_1, \ldots, x_s) := \exists y_1 \ldots \exists y_r(\psi_R(y_1, \ldots, y_r)\wedge \bigwedge_{j=1}^{s} x_j = y_{i_j})$. (5) Für $S = \sigma_{i=j}(R)$, setze $\psi_S(\overline{x}) := \psi_R(\overline{x}) \wedge x_i = x_j$. FO mind. so ausdrucksstark wie RA.
- Für $\mathcal{A}= (A, R_1, \ldots, R_m)$ ist der **aktive Bereich** $\mathrm{ad}(\mathcal{A})$ als Menge der Elem. von $\mathcal{A}$, die in mind. einer Rel. R_i vorkommen, def. Der a.B. ist in der rel. Algebra (und damit in FO) def.bar, z.B. durch $\mathrm{aD} := \bigcup_{j=1}^{s} \bigcup_{i=1}^{r_j} \pi_i(R_j)$. Die durch den a.B. von $\mathcal{A}$ induzierte Substrukt. nennen wir **aktive Substrukt.** von $\mathcal{A}$.
- Für jeden r-stell. Term $R \subseteq \mathrm{RA}(\tau)$ und jede τ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $R^{\mathcal{A}} \subseteq (\mathrm{ad}(\mathcal{A}))^r$. Wenn also der aktive Bereich nicht mit A übereinstimmt, ist z.B. Rel. $A \times A$ nicht RA-def.bar. **RA^+**: Wie RA mit (0) Univ ist einstell. Term von $\mathrm{RA}^+(\tau)$. Für jede τ-Strukt. $\mathcal{A}$ ist $\mathrm{Univ}^{\mathcal{A}} := A$.
- Für jede Formel $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ und jedes $m \in \mathbb{N}$, so dass alle freien Var. von φ zu $x_1, \ldots, x_m$ gehören, gibt es m-stell. Term $R_{\varphi,m} \in \mathrm{RA}^+(\tau)$, so dass für alle τ-Strukt. $\mathcal{A}$ gilt: $R^{\mathcal{A}}_{\varphi,m} = \{(a_1, \ldots, a_m) \in A^m : \mathcal{A}\models \varphi(a_1, \ldots, a_m)\}$. Methode: ($\varphi$ sei reduziert.) (1) Wenn φ Atom der Form $x_i = x_j$, setze $R_{\varphi,m} := \sigma_{i=j}\mathrm{Univ}^m$. (2) Atom $\varphi := Rx_{i_1} \ldots x_{i_s}$ wird durch Term $R_{\varphi,m} := \pi_{1,\ldots,m}\sigma_{m+1=i_1} \cdots \sigma_{m+s=i_s}(\mathrm{Univ}^m \times R)$. (3) Für $\varphi = \neg\vartheta$ ist $R_{\varphi,m} := (\mathrm{Univ}^m - R_{\vartheta,m})$. (4) Für $\varphi = \vartheta \vee \mu$ ist $R_{\varphi,m} := (R_{\vartheta,m} \cup R_{\mu,m})$. (5) Für $\varphi = \exists x_i\vartheta$ unterscheide (i) $\varphi = \exists x_{m+1}\vartheta(x_1, \ldots, x_{m+1})$, setze $R_{\varphi,m} := \pi_{1,\ldots,m}R_{\vartheta,m+1}$. (ii) Für $\varphi = \exists x_i\vartheta(x_1, \ldots, x_m)$ mit $i \leq m$ setze $R_{\varphi,m} := \pi_{1,\ldots,i-1,m+1,i+1,\ldots,m}R_{\vartheta,m+1}$.
- **Theorie** ist erf. Menge $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ von Sätzen, die unter $\models$ abgeschl. ist, d.h. es gilt für alle τ-Sätze ψ: $T \models \psi \Rightarrow \psi \in T$. Th. **vollst.**, wenn für jeden Satz $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ entw. $\psi \in T$ oder $\neg\psi \in T$. Sei $\mathcal{A}$ τ-Strukt. Th. von $\mathcal{A}$ ist $\mathrm{Th}(\mathcal{A}):= \{\psi : \mathcal{A}\models \psi\}$. $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ ist vollst. Th. einer τ-Modellkl. $\mathcal{K}$ ist $\mathrm{Th}(\mathcal{K}) = \bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{K}} \mathrm{Th}(\mathcal{A})$. Sei Φ Ax.system für $\mathcal{K}$, dann $\mathrm{Th}(\mathcal{K}) = \{\psi : \Phi \models \psi\}$. Jede Th. T lässt sich zu vollst. Th. erweitern; für jedes Modell $\mathcal{A} \models \mathrm{T}$ ist $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ vollst. Erweiterung von T.
- Zwei τ-Strukt. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ **elementar äquivalent** ($\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), wenn $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$, d.h. wenn für alle τ-Sätze ψ gilt: $\mathcal{A}\models \psi \Leftrightarrow \mathcal{B}\models \psi$.
- Th. vollst. gdw. alle Modelle elem. äqu. Aus Isom.lemma folgt: isomorphe Strukt. elem. äqu.
- **Quantorenrang:** ($\mathrm{qr}(\psi)$ einer Formel ψ): (1) $\mathrm{qr}(\psi) = 0$ für quant.freie ψ. (2) $\mathrm{qr}(\neg\psi) = \mathrm{qr}(\psi)$. (3) $\mathrm{qr}(\psi \circ \varphi) = \max(\mathrm{qr}(\psi), \mathrm{qr}(\varphi))$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. (4) $\mathrm{qr}(\exists x\psi) = \mathrm{qr}(\forall x\psi) = \mathrm{qr}(\psi) + 1$.
- τ-Strukt. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ **m-äquivalent** ($\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$), wenn für alle τ-Sätze ψ mit $\mathrm{qr}(\psi)\leq m$ gilt: $\mathcal{A}\models \psi$ gdw. $\mathcal{B}\models \psi$. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ τ-Strukt. und $\overline{a} = a_1, \ldots, a_r, \overline{b} = b_1, \ldots, b_r$ Tupel von Elem. aus A bzw. B. Dann $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv (\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn für alle τ-Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_r)$ gilt: $\mathcal{A}\models \psi(\overline{a})$ gdw. $\mathcal{B}\models \psi(\overline{b})$. Analog def. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.
- Sei τ rel. Signatur, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ τ-Strukt. Ein **lokaler (partieller) Isomorphismus** von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist inj. Abb. $p : \mathrm{Def}(p) \rightarrow B$, wobei $\mathrm{Def}(p)\subseteq A$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, alle Rel.symb. $R \in R^n(\tau)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathrm{Def}(p)$ gilt: $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (pa_1, \ldots, pa_n) \in R^{\mathcal{B}}$. Die Menge aller lokalen Isom von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ wird mit $\mathrm{Loc}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ bezeichnet.
- Bild von p ist $\mathrm{Bild}(p):= \{pa : a \in \mathrm{Def}(p)\}$. Die leere Abb. p mit $\mathrm{Def}(p) = \mathrm{Bild}(p) = \emptyset$ ist lok. Isom. Ein nicht-leerer lok. Isom. ist Isom. zwischen den von $\mathrm{Def}(p)$ und $\mathrm{Bild}(p)$ induzierten Substrukt. von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Wir identifizieren lok. Isom. p oft mit seinem Graphen, d.h. mit $\{(a, pa) : a \in \mathrm{Def}(p)\}$. p **endlich**, wenn sein Graph endlich.
- **Spiel** $\mathrm{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: Sp.: Herausf. (I) und Dupl. (II) auf Spielfeld aus Strukt. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ gesp. mit $A \cap B = \emptyset$. Partie aus m Zügen. Im i-ten Zug best. I entweder Elem. $a_i \in A$ oder $b_i \in B$. II antwortet, indem Elem. aus jeweils anderer Strukt. wählt. II gew. Partie, wenn $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)\}$ lok. Isom. von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist. Sonst gew. I. Nach i Zügen in $\mathrm{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ Pos. $(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_i, \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_i)$ erreicht. Verbleib. Teilspiel mit $m - i$ Zügen: $\mathrm{G}_{m-i}(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_i, \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_i)$. Gewinnstrat. von I bzw. II für (Teil-)Spiel ist Fkt., die in jeder erreichb. Pos. mögliche Züge nennt, mit denen er Partie gew., egal wie anderer spielt. I bzw. II gew. $\mathrm{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, wenn Gewinnstrat. hat. Für jedes (Teil-)Spiel hat genau ein Sp. Gewinnstrat.
- **Spiel** $\mathrm{G}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: In jeder Partie best. I $m \in \mathbb{N}$, dann $\mathrm{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gespielt. I gew. $\mathrm{G}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gdw. $m \in \mathbb{N}$ ex., so dass er $\mathrm{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gew. II gew. $\mathrm{G}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gdw. sie für jedes $\mathrm{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ Gewinnstrat.
- **Satz (Ehrenfeucht, Fraisse)**: τ endl. und rel., $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ τ-Strukt. (1) Äqu. sind: (i) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ (ii) II gewinnt E-F-Spiel $\mathrm{G}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. (2) Für alle $m \in \mathbb{N}$ äquivalent: (i) $\mathcal{A}\equiv_m \mathcal{B}$ (ii) II gewinnt $\mathrm{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.
- Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ τ-Strukt., $\overline{a} = a_1, \ldots, a_r \in A, \overline{b} = b_1, \ldots, b_r \in B$. Wenn Formel $\psi(\overline{x})$ ex. mit $\mathrm{qr}(\psi)= m$, so dass $\mathcal{A}\models \psi(\overline{a})$ und $\mathcal{B}\models \neg\psi(\overline{b})$, dann hat I Gewinnstrat. für $\mathrm{G}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.
- Wenn es gelingt, Strukt. $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{B} \notin \mathcal{K}$ zu finden, so dass II das $G(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt, dann folgt, dass kein FO-Satz $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ unterscheiden kann, und damit auch kein FO-Satz $\mathcal{K}$ axiom.
- Konstruiere Folgen $(\mathcal{A}_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $(\mathcal{B}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von τ-Strukt. so, dass für alle $m, \mathcal{A}_m \in \mathcal{K}, \mathcal{B}_m \notin \mathcal{K}$ und II $G_m(\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m)$ gewinnt. Die Annahme, dass $\mathcal{K}$ endl. axiom. ist, also $\mathcal{K}$= Mod(ψ) für ein $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$, führt nun zu Widerspruch: Sei $m = qr(\psi)$. Nach Satz von E.-F. ist $\mathcal{A}_m \equiv_m \mathcal{B}_m$. Also $\mathcal{A}_m \models \psi$ gdw. $\mathcal{B}_m \models \psi$. Dies unmöglich, da $\mathcal{A}_m \in \mathcal{K}$, aber $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{K}$.
- Eigensch., die Rekursion (oder unbeschränkte Iteration) erfordern i.A. nicht FO-def.bar. Bsp.: (5.18) Sei $\tau = \{E\}$ (Graphensignatur). Es ex. keine Formel $\varphi(x, y) \in \mathrm{FO}(\tau)$, die in jeder τ-Struktur $\mathcal{A}= (A, E)$ die **transitive Hülle** von E def., d.h. für die gilt: $\mathcal{A}\models \varphi(a, b) \Leftrightarrow$ es gibt in $\mathcal{A}$ einen E-Pfad von a nach $b \Leftrightarrow$ es gibt $n > 0, c_0, \ldots, c_n \in A$ mit $c_0 = a, c_n = b$ und $(c_i, c_{i+1}) \in E \forall i < n$. **trans. Hülle**: kleinste Rel., die geg. Rel. enthält und die trans. ist.
- Es gibt keinen Satz $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$, so dass für jeden (endl., unger.) Graph $G = (V, E)$ gilt: $G \models \psi \Leftrightarrow G$ zus.hängend. Wenn Satz 5.18 falsch wäre, dann gäbe es eine Formel $\varphi(x, y)$, die in G ausdrückt, dass ein Pfad von x nach y ex. Aber dann würde $\psi := \forall x\forall y\varphi(x, y)$ ausdrücken, dass G zus.hängend ist. Bew.: Sei $\mathcal{A}_m$ Zyklus der Länge 2^m und $\mathcal{B}_m$ disjunkte Kopie zweier solcher Zyklen. II gew. $G_m(\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m)$.

Vollständigkeitssatz, Kompaktheitssatz und Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

σ bel. Sign., $C := \{c_1, c_2, \ldots\}$ abz. viele, paarw. versch. Konst.symb. nicht in σ. $\psi(c_1, \ldots, c_n)$: $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ mit freien Var. $x_1, \ldots, x_n$ durch Satz $\psi(c_1, \ldots, c_n)$ ersetz. $\tau = \sigma \cup C$. $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ oder $\Gamma \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ meint Sätze bzw. Satzmengen. $\psi(x)$ meint: x kommt frei in ψ vor.
- **SK für FO:** Sequ. ist Ausdruck $\Gamma \Rightarrow \Delta$, wobei Γ, Δ endl. Satzmengen in $\mathrm{FO}(\tau)$. Sequ. **korrekt**, wenn jedes Modell von Γ auch Modell mind. einer Formel aus Δ. **Axiome:** alle Sequ. der Form $\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \psi$. **Schlussregeln:** die vom SK für AL und folgende:

$(\exists \Rightarrow)\dfrac{\Gamma,\psi(c)\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\exists x\psi(x)\Rightarrow\Delta}$, wenn c nicht in $\Gamma, \Delta, \psi(x)$ $\quad(\Rightarrow \exists)\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi(t)}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\exists x\psi(x)}$

$(\Rightarrow \forall)\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi(c)}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\forall x\psi(x)}$, wenn c nicht in $\Gamma, \Delta, \psi(x)$ $\quad(\forall \Rightarrow)\dfrac{\Gamma,\psi(t)\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\forall x\psi(x)\Rightarrow\Delta}$

$(S \Rightarrow)\dfrac{\Gamma,\psi(t)\Rightarrow\Delta}{\Gamma,t\doteq t',\psi(t')\Rightarrow\Delta}$ (Substitution) $\quad(\Rightarrow S)\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi(t)}{\Gamma,t\doteq t'\Rightarrow\Delta,\psi(t')}$ (Substitution)

$(=)\dfrac{\Gamma,t=t\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\Delta}$ (Gleichheitsregel)

$t \doteq t$ meint: Es kann entweder $t = t'$ oder $t' = t$ verwendet werden.
- Menge **ableitbarer Sequ.**: kleinste Menge, die alle Axiome umfasst und mit jeder Instanz der oberen Zeile einer Schlussregel auch die entsprechende Instanz der unteren Zeile enthält. **Beweis** ist beschrift. Baum, so dass alle Blätter mit Axiomen, alle inneren Knoten mit der Konklusion einer Schlussregel und deren Kinder mit den Prämissen derselben Regel beschriftet.
- **Korrektheitssatz für den Sk:** Jede im SK ableitbare Sequ. gültig. Der Satz impliziert: Wenn $\Phi \vdash \psi$, dann auch $\Phi \models \psi$.
- Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\sigma)$ Satzmenge. Satz ψ **ableitbar** aus Axiomensystem $\Phi(\Phi \vdash \psi)$, wenn endl. Teilmenge Γ von Φ ex., so dass Sequ. $\Gamma \Rightarrow \psi$ im SK ableitbar. Sequ. $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ableitbar aus Φ, wenn ableitbare Sequ. $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ ex., mit $\Gamma' \subseteq \Phi$. Ableitbarkeit von Sequ. und von einzelnen Sätzen im Wesentlichen austauschbare Begriffe, denn Sequ. $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ableitbar aus Φ gdw. $\Phi \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$.
- Satzmengen Φ aus denen jeder Satz (der entsprechenden Signatur) ableitbar ist, heißen **inkonsistent**. Inkonsistente Mengen unerfüllbar, aufgrund Korrektheit von SK. Φ **konsistent** gdw. jede endl. Teilmenge von Φ konsistent.
- **Vollständigkeitssatz für den SK:** Für jede Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\sigma)$ und jeden Satz $\psi \in \mathrm{FO}(\sigma)$ gilt: (i) $\Phi \models \psi \Leftrightarrow \Phi \vdash \psi$. (ii) Φ erfüllbar $\Leftrightarrow \Phi$ konsistent.
- **Herbrandstruktur** zu Sign. τ ist τ-Strukt. $\mathcal{H}$, deren Univ. Menge aller Grundterme von τ ist und deren Fkts.symbole durch ihre natürl. Op. auf Termen interpret. Für n-stell. $f \in \tau$ ist $f^{\mathcal{H}}(t_1, \ldots, t_n) := ft_1 \ldots t_n$. Interpret. der Rel.symbole aus τ bel. Herbrandstrukt. $\mathcal{H}$ ist Strukt., deren algebraisches Redukt gerade Termalgebra über leerer Var.menge ist. Beachte: in $\mathcal{H}$ jeder Grundterm durch sich selbst interpret.: $t^{\mathcal{H}} = t$.
- Sei Σ Menge von atom. τ-Sätzen. Mit $\mathcal{H}(\Sigma)$ bezeichnen wir Herbrandstrukt. mit folgender Interpret. der Rel.symbole: für n-stell. $R \in \tau$ ist $R^{\mathcal{H}(\Sigma)} = \{(t_1, \ldots, t_n) : Rt_1 \ldots t_n \in \Sigma\}$.
- I.A. $\mathcal{H}(\Sigma)$ kein Modell von Σ: Seien t, t' zwei (syntaktisch) versch. Terme, so dass aber Σ die Formel $t = t'$ enthält. Dann ist $\mathcal{H}(\Sigma)$ Modell von $t \neq t'$, also kein Modell von Σ.
- Eine Menge Σ von atomaren Sätzen (in FO) ist **abgeschlossen unter Subst.**, wenn für jede atomare Formel $\psi(x)$ und alle Grundterme $t, t' \in T(\tau)$ gilt: (i) Σ enthält $t = t$. (ii) Wenn $t = t'$ und $\psi(t)$ zu Σ gehören, dann auch $\psi(t')$.
- Für bel. Grundterme $t, t' \in T(\tau)$ setze: $t \sim t'$ gdw. Σ enthält die Formel $t = t'$.
- Sei Σ abgeschlossen unter Subst. Dann ist $\sim$ Kongruenzrelation auf $\mathcal{H}(\Sigma)$.
- Bilde **Faktorstrukt.** $\mathcal{A}(\Sigma) := \mathcal{H}(\Sigma)/ \sim$. $[t]$ bezeichne Äqu.klasse von t bzgl. $\sim$; Universum von $\mathcal{A}(\Sigma)$ ist $\{[t] : t$ Grundterm in $T(\tau)\}$. In $\mathcal{A}(\Sigma)$ wird jeder Grundterm t durch seine Äqu.klasse interpret.: $t^{\mathcal{A}(\Sigma)} = [t]$. $\mathcal{A}(\Sigma)$ heißt das **kanonische Modell** von Σ.
- Für jeden atomaren Satz ψ aus $\mathrm{FO}(\sigma)$ gilt: $\mathcal{A}(\Sigma) \models \psi \Leftrightarrow \psi \in \Sigma$.
- **Löwenheim, Skolem:** Jede erf., abzählbare Satzmenge hat abzählbares Modell.
- **Kompaktheitssatz von FO:** Für jede Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau), \psi \in \mathrm{FO}(\tau)$. (i) $\Phi \models \psi$ gdw. endl. Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ex., so dass $\Phi_0 \models \psi$. (ii) Φ erf. gdw. jede endl. Teilmenge von Φ erf. Bew. (mit Vollst.satz): (i) $\Phi \vdash \psi$ gdw. $\Phi_0 \vdash \psi$ für endl. Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$. (ii) Φ kons. gdw. jede endl. Teilmenge von Φ kons. Da nach Vollst.satz Formelmenge erf. gdw. sie kons., und Folg.beziehung mit Ableit.beziehung zus.fällt, ergeben sich semant. Aussagen des Komp.satzes. Äqu. d. Auss.: Φ unerf. $\Leftrightarrow \Phi \models 0 \overset{(i)}{\Leftrightarrow}$ ex. endl. $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models 0$, Φ unerf. $\overset{(ii)}{\Leftrightarrow}$ ex. endl. unerf. $\Phi_0 \subseteq \Phi$.
- Kl. der Körper der Char.0 ist nicht endl. axiom. Bew.: Sei $\psi \in \mathrm{FO}(\tau_{ar})$ bel. Satz, der in allen Körpern der Char.0 gilt; also $\Phi_0 \models \psi$. Aus Komp.satz folgt, dass Primzahl q ex., so dass $\{\psi_{\text{Körper}}\} \cup \{\neg\chi_p : p < q, p \text{ Primzahl}\} \models \psi$. Also gilt ψ in allen Körpern mit hinreichend großer Char. und axiom. also nicht die Körper der Char.0.
- Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ Satzmenge mit bel. großen endl. Modellen (d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es Modell $\mathcal{A} \models \Phi$ mit endl. $\mathcal{A}$ und $|\mathcal{A}| > \mathrm{n}$). Dann hat ϕ unendl. Modell.
- Kl. aller endl. τ-Strukt. nicht FO-axiom. Ebenso Kl. aller endl. Gruppen, Körper, Graphen.
- Menge A mind. so mächtig wie Menge B ($|A| \geq |B|$), wenn inj. Fkt. $f : B \hookrightarrow A$ ex.
- **aufsteig. Satz von Löwenheim-Skolem:** Φ besitze unendl. Modell. Dann ex. zu jeder Menge M ein Modell $\mathcal{D} \models \Phi$ über einem Universum D, welches mind. so mächtig wie M ist.
- $\{\mathcal{B} : \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}\}$ ist kleinste axiom. Modellklasse, die $\mathcal{A}$ enthält. Nach Isomorphielemma sind isomorphe Strukt. auch elementar äquivalent.
- Sei $\mathcal{A}$ unendl. Strukt. Dann ex. Strukt. $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, aber $\mathcal{A} \ncong \mathcal{B}$. Insbesondere Isomorphiekl. $\{\mathcal{B} : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}\}$ von $\mathcal{A}$ nicht axiom. in FO.
- Arithmetik ist Theorie $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ der Strukt. $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$. Nichtstandardmodell der Arithmetik ist zu $\mathcal{N}$ äqu., aber nicht zu $\mathcal{N}$ isomorphe τ_{ar}-Strukt.
- Es gibt abzählbares Nichtstandardmodell der Arithmetik.
- Klass. Entsch.problem math. Logik: Konstr. Alg., die zu $\psi \in$ FO entsch., ob **Erf.:** sie erf. oder nicht. **Gültigk.:** ob sie allg.gültig. **Beweisbarkeit:** ob aus leerer Hypothesenmenge ableitb. (fester, vollst. Bew.kalkül für FO zugrunde). Alle äqu., da ψ erf. gdw. $\neg\psi$ all.gültig. Nach Vollst.satz Formel allg.gültig gdw. sie ableitbar.
- **PCP:** Geg.: Folge $F = (u_1, v_1), \ldots, (u_k, v_k)$ von Wortpaaren mit $u_i, v_i \in \{0, 1\}^*$. Frage: Ex. Indexfolge $i_1, \ldots, i_l$, so dass $u_{i_1}, \ldots, u_{i_l} = v_{i_1} \ldots, v_{i_l}$ (eine Lösung)?
- **Post:** Das PCP ist unentscheidbar. Bew.: Wir zeigen, dass man Eingaben für das PCP durch Reduktionsalg. in FO-Formeln transformieren kann, so dass geg. PCP-Eingabe eine Lösung zulässt gdw. resultierende FO-Formel allgemeingültig. Daraus folgt, dass kein Alg. die Gültigkeit von FO-Formeln entscheiden kann. Gäbe es einen solchen Entsch.alg., dann könnte man PCP lösen, indem man PCP mit Red.alg. auf FO-Formeln transformiert und dann mit Entsch.alg. best., ob erhaltene Formel allgemeingültig.
- **Church, Turing:** Gültigk.problem (und damit Erf.problem) von FO unentscheidbar.

Sonstiges

- $\psi \wedge (\varphi \vee \vartheta) \equiv (\psi \wedge \varphi) \vee (\psi \wedge \vartheta)$
- $\psi \vee (\varphi \wedge \vartheta) \equiv (\psi \vee \varphi) \wedge (\psi \vee \vartheta)$
- $\psi \rightarrow \varphi \equiv \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$
- $\psi \wedge (\psi \vee \varphi) \equiv \psi \vee (\psi \wedge \varphi) \equiv \psi$
- $\psi \rightarrow \varphi \equiv \neg\psi \vee \varphi$
- $\neg t_1 = t_2 : t_1 \neq t_2$
- $\forall x\psi \equiv \neg\exists x\neg\psi$
- $\exists x(\psi \vee \varphi) \equiv \exists x\psi \vee \exists x\varphi$
- $\forall x(\psi \wedge \varphi) \equiv \forall x\psi \wedge \forall x\varphi$
- Falls x nicht frei in ψ:
  - $\psi \vee \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \vee \varphi)$
  - $\psi \wedge \exists x\varphi \equiv \exists x(\psi \wedge \varphi)$
  - $\psi \vee \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \vee \varphi)$
  - $\psi \wedge \forall x\varphi \equiv \forall x(\psi \wedge \varphi)$
- $\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi$
- $\neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi$
- $\exists x\exists y\psi \equiv \exists y\exists x\psi$
- $\forall x\forall y\psi \equiv \forall y\forall x\psi$
- XOR: $(\varphi \oplus \psi) \equiv (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi)$
- Jede abz., dichte, lin. Ord. ohne Endpunkte isomorph zu $(\mathbb{Q}, <)$.
- AL $\leq$ ML $\leq \mathrm{FO}^2 \leq$ FO, ML $\leq$ CTL
- z.z.: Theorie o. Kl. nicht FO-axiom. Ann.: Φ axiom. diese. Bilde $\Theta = \Phi\cup$ geeign. Formelmenge. z.z.: jedes endl. $\Theta_0 \subseteq \Theta$ erf., z.B. durch G. Nach Komp.satz dann Θ erf. Widerspruch zu $G \models \Phi$.

LaTeXed by s.horsten