Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 99/00

1. Übung Mathematische Logik
Abgabe: Dienstag, den 19.10.1999 in der Vorlesung
Übungstermin: Freitag, den 22.10.1999 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1: 3 Punkte

Gegeben sei die Interpretation $\mathfrak{I}$, so dass $\mathfrak{I}(X_1) = 1, \quad \mathfrak{I}(X_2) = 1, \quad \mathfrak{I}(X_3) = 0, \quad \mathfrak{I}(X_4) = 1$. Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie durch $\mathfrak{I}$ erfüllt wird. Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $\varphi_1 := (X_1 \vee (X_2 \wedge \neg X_3)) \wedge ((\neg X_4 \vee (X_3 \to X_2)) \wedge (X_4 \leftrightarrow X_1))$
2. $\varphi_2 := \neg((X_1 \to X_3) \vee (X_4 \wedge \neg(\neg(\neg(X_3 \wedge \neg X_2) \wedge (\neg X_4 \vee \neg(X_1 \to X_3))))$
3. $\varphi_3 := (X_1 \to (X_3 \vee \neg X_4)) \to (\neg X_1 \vee \neg(\neg X_3 \wedge \neg X_4))$

Aufgabe 2: 4 Punkte

Geben Sie einen (möglichst effizienten) Algorithmus an, welcher zu einer gegebenen Formel $\psi \in \mathrm{AL}$ und einer gegebenen Interpretation $\mathfrak{I}$ den Wahrheitswert $\mathfrak{I}(\psi)$ berechnet. Beurteilen Sie die Laufzeit und den Bedarf an Speicherplatz des Algorithmus.

Aufgabe 3: 4 Punkte

Geben Sie eine *induktive* Definition für die Menge der Unterformeln einer aussagenlogischen Formel an. Zeigen Sie:

(a) Formeln der Länge n haben höchstens n Unterformeln.

(b) Formeln der Tiefe n haben höchstens $2^{n+1} - 1$ Unterformeln.

(c) Es existieren für jedes $n \in \mathbb{N}$ Formeln der Tiefe n mit genau $2^{n+1} - 1$ Unterformeln.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Zeigen Sie das Prinzip der eindeutigen Lesbarkeit von Formeln, d.h. zeigen Sie, dass es zu jedem Wort über dem Alphabet $\tau \cup \{0, 1, \neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow, (,)\}$ höchstens eine Möglichkeit gibt, es als Formel zu interpretieren. Zeigen Sie ferner, dass das Prinzip der eindeutigen Lesbarkeit von Formeln erhalten bleibt, wenn wir die sog. *polnische Notation* verwenden, welche ganz ohne Klammern auskommt. Die Regel (3) in der Definition der aussagenlogischen Formeln wird dabei ersetzt durch

(3)′ Wenn ψ und φ aussagenlogische Formeln sind, dann auch die Ausdrücke $\neg\psi$, $\wedge\psi\varphi$, $\vee\psi\varphi$, $\to \psi\varphi$ und $\leftrightarrow \psi\varphi$.

Man zeige andererseits, dass die eindeutige Lesbarkeit nicht mehr gewährleistet ist, wenn in der Definition der aussagenlogischen Formeln die Klammern einfach weggelassen werden, d.h. wenn mit ψ und φ auch die Ausdrücke $\psi \wedge \varphi$, $\psi \vee \varphi$, $\psi \to \varphi$ und $\psi \leftrightarrow \varphi$ als Formeln zugelassen werden.

Aufgabe 5: (∗) 5 Punkte

Beweisen Sie das *aussagenlogische Interpolationstheorem*: Sei $\psi \to \varphi$ eine aussagenlogische Tautologie. Dann existiert eine aussagenlogische Formel ϑ mit $\tau(\vartheta) \subseteq \tau(\psi) \cap \tau(\varphi)$, so dass $\psi \to \vartheta$ und $\vartheta \to \varphi$ Tautologien sind. Hinweis: Führen Sie einen Induktionsbeweis über die Anzahl der Aussagenvariablen, die in ψ, aber nicht in φ vorkommen.

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 99/00

2. Übung Mathematische Logik
Abgabe: Dienstag, den 2.11.1999 in der Vorlesung oder am Lehrstuhl
Übungstermin: Freitag, den 5.11.1999 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1: 3 Punkte

(a) In einem Chemielabor stehen die Apparaturen zur Verfügung, um folgende chemische Reaktionen durchzuführen:

$$\begin{array}{ccc} MgO + H_2 & \rightarrow & Mg + H_2O \\ C + O_2 & \rightarrow & CO_2 \\ H_2O + CO_2 & \rightarrow & H_2CO_3 \end{array}$$

Ferner sind in dem Labor folgende Grundstoffe vorhanden: MgO, H_2, O_2 und C. Man beweise (durch geeignete Anwendung des Hornformel-Algorithmus), dass es unter diesen Voraussetzungen möglich ist, H_2CO_3 herzustellen.

(b) Man wende den Markierungsalgorithmus auf folgende Formeln an:

1. $\psi_1 := (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_4) \wedge \neg X_5 \wedge (\neg X_3 \vee X_1) \wedge X_3 \wedge X_2 \wedge (\neg X_6 \vee X_4) \wedge X_6$
2. $\psi_2 := (\neg X_2 \vee \neg X_1 \vee X_3) \wedge X_5 \wedge (\neg X_3 \vee X_4 \vee \neg X_5) \wedge X_2 \wedge X_1 \wedge (\neg X_4 \vee X_6)$

Aufgabe 2: 4 Punkte

(a) Zwei Formeln heissen *erfüllbarkeitsäquivalent*, wenn beide erfüllbar oder beide unerfüllbar sind. Zeigen Sie, dass erfüllbarkeitsäquivalente Formeln nicht unbedingt äquivalent sein müssen.

(b) Welche der folgenden Formeln sind äquivalent bzw. erfüllbarkeitsäquivalent? Begründen Sie Ihre Antworten.

1. $\psi_1 := \neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3 \vee \neg X_4 \vee X_5$
   $\psi_2 := (\neg X_1 \vee X_2 \vee Y_1) \wedge (\neg Y_1 \vee \neg X_3 \vee Y_2) \wedge (\neg Y_2 \vee \neg X_4 \vee X_5)$
2. $\psi_1 := (X_1 \rightarrow (X_2 \rightarrow X_3)) \rightarrow ((X_3 \rightarrow X_2) \vee (X_3 \rightarrow X_5))$
   $\psi_2 := (X_1 \wedge (X_2 \wedge \neg X_3)) \vee (\neg X_3 \vee X_2 \vee X_5)$
3. $\psi_1 := (X_1 \vee ((X_2 \rightarrow X_3) \vee X_4)) \rightarrow (X_5 \wedge (X_3 \rightarrow X_6))$
   $\psi_2 := (X_1 \wedge (\neg X_2 \vee X_3 \vee X_4)) \vee (\neg X_5 \vee \neg X_3 \vee X_6)$

Aufgabe 3: 4 Punkte

Führen Sie einen alternativen Beweis für den Satz, dass es zu jeder Funktion $f \in B^n$ eine Formel $\psi(X_1, \ldots, X_n)$ mit $h_\psi = f$ gibt. Zeigen Sie dazu per Induktion nach n, dass es mindestens 2^{2^n} nicht-äquivalente aussagenlogische Formeln $\psi(X_1, \ldots, X_n)$ gibt. (Hinweis: $2^{2^{n+1}} = (2^{2^n})^2$).

Aufgabe 4: 4 Punkte

Die zu $f \in B^n$ *duale Funktion* ist definiert durch $f^\delta(x_1, \ldots, x_n) := \neg f(\neg x_1, \ldots, \neg x_n)$.

(a) Geben Sie die zu $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$ dualen Funktionen an.

(b) Eine Funktion f ist *selbstdual*, wenn $f^\delta = f$. Sei T_k^n die n-stellige Boolesche Funktion mit

$$T_k^n(x_1, \ldots, x_n) = 1 \iff |\{i : x_i = 1\}| \geq k.$$

Beschreiben Sie die zu T_k^n duale Funktion. Für welche n, k ist T_k^n selbstdual?

(c) Die Funktion $sel \in B^3$ sei definiert durch $sel(u, v, w) = v$, wenn $u = 0$ und $sel(u, v, w) = w$, wenn $u = 1$. Zeigen Sie, dass $\{sel, 0, 1\}$ funktional vollständig ist.

Aufgabe 5: 4 Punkte

Sei $A \subseteq \{0,1\}^*$ eine unendliche Menge von Wörtern. Zeigen Sie, dass es eine unendliche Folge $w_0, w_1, w_2, \ldots$ gibt, so dass jedes w_i ein Anfangsstück von w_{i+1} und von mindestens einem Wort aus A ist.
(Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von König.)

Aufgabe 6: Zusatzpunkte: 5 Punkte

Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ eine Formelmenge, $X \in \tau(\Phi)$ eine Aussagenvariable. X heisst *explizit definierbar* in Φ, wenn eine Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ existiert, welche X nicht enthält, so dass $\Phi \models X \iff \varphi$. (In Modellen von Φ ist also der Wahrheitswert von X durch eine Formel, die nicht von X abhängt, explizit festgelegt). Demgegenüber heisst X *implizit definierbar* in Φ, wenn für alle Modelle $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}'$ von Φ gilt: Wenn $\mathfrak{I}(Z) = \mathfrak{I}'(Z)$ für alle Ausssagenvariablen $Z \neq X$, dann auch $\mathfrak{I}(X) = \mathfrak{I}'(X)$. (In Modellen von Φ ist also der Wahrheitswert von X durch die Wahrheitswerte der andern Variablen implizit festgelegt).
Beweisen Sie das *aussagenlogische Definierbarkeitstheorem*: Wenn X implizit in Φ definierbar ist, dann ist X auch explizit in Φ definierbar.
Hinweis: Die Formelmenge Φ' entstehe dadurch, dass man X in allen Formeln von Φ durch eine neue Aussagenvariable $X' \notin \tau(\Phi)$ ersetzt. Die implizite Definierbarkeit von X in Φ besagt dann, dass $\Phi \cup \Phi' \models X \iff X'$. Benutzen Sie den Kompaktheitssatz um Φ durch eine endliche Formelmenge zu ersetzen und verwenden Sie das aussagenlogische Interpolationstheorem (Übung 1 Aufgabe 5) um eine explizite Definition von X in Φ zu konstruieren.

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 99/00

3. Übung Mathematische Logik

Abgabe: Dienstag, den 16.11.1999 in der Vorlesung oder am Lehrstuhl
Übungstermin: Freitag, den 19.11.1999 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1: 7 Punkte

(a) Gegeben sei die Formel $\varphi := (X_2 \to X_1) \wedge (X_5 \to X_4) \wedge (X_4 \vee \neg X_3) \wedge (X_2 \vee X_3) \wedge \neg X_4 \wedge (X_1 \to X_5)$. Wandeln Sie φ in eine äquivalente Formel φ' in konjunktiver Normalform um und berechnen Sie $Res^*(\varphi')$.

(b) Eine KNF-Formel ist in m-KNF, wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionsklauseln mit je höchstens m Literalen ist, d.h. wenn sie die Form $\bigwedge_i (Y_{i1} \vee \cdots \vee Y_{ir_i})$ mit $r_i \leq m$ hat.

Wie gross kann $Res^*(\varphi)$ höchstens werden, wenn φ eine 2-KNF Formel ist? Zeigen Sie, dass die Resolutionsmethode ein Polynomialzeit-Entscheidungsverfahren für die Erfüllbarkeit von 2-KNF-Formeln liefert. Funktioniert das auch für 3-KNF-Formeln?

(c) Sei $\psi(X_1, \dots, X_n)$ eine Formel in 2-KNF und sei $G(\psi)$ der gerichtete Graph mit Knotenmenge $V = \{X_1, \dots, X_n, \neg X_1, \dots, \neg X_n\}$ und mit einer Kante von einem Literal Y zu einem Literal Z genau dann, wenn eine der Klauseln von ψ äquivalent ist zu $(Y \to Z)$.

Konstruieren Sie $G(\psi)$ für $\psi := X_1 \wedge (\neg X_1 \vee X_2) \wedge (X_3 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_3 \vee \neg X_2)$.

(d) Welchen graphentheoretischen Operationen auf $G(\psi)$ entspricht die Resolventenbildung? Formulieren Sie ein graphentheoretisches Kriterium für die Unerfüllbarkeit von 2-KNF-Formeln.

Hinweis: Für die Teilaufgaben a) bis c) gibt es 4 Punkte. Die 3 Punkte für Teil d) sind Zusatzpunkte.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Ein ungerichteter Graph $\mathfrak{G} := (G, E)$ heißt *k-färbbar*, wenn es eine Funktion $f : G \to \{1, \dots, k\}$ gibt, so dass $f(p) \neq f(q)$ für alle Kanten $(p, q) \in E$ ist. Man zeige, dass ein unendlicher Graph $\mathfrak{G}$ k-färbbar ist, wenn jeder endliche Untergraph von $\mathfrak{G}$ k-färbbar ist.

Aufgabe 3: 4 Punkte

(a) Man zeige mit der Resolutionsmethode, daß $\varphi := X \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee [(X \vee Z) \to (Y \wedge Z)]$ eine Tautologie ist.

(b) Sei Φ eine endliche Menge von KNF-Formeln, und sei ψ eine DNF-Formel. Wie kann man mit Hilfe der Resolutionsmethode untersuchen, ob $\Phi \models \psi$?

(c) Zeigen Sie, dass die Einheitsresolution für allgemeine (d.h. nicht Horn-)Formeln in KNF *nicht* vollständig ist.

Aufgabe 4: 5 Punkte

Die Quantifizierte Aussagenlogik QAL erweitert die Aussagenlogik um Existenz- und Allquantoren über Aussagenvariablen, so dass Formeln der Art $\exists X_i \psi(X_1, \dots, X_n)$ bzw. $\forall X_i \psi(X_1, \dots, X_n)$ gebildet werden können, welche "es gibt ein X_i, so dass ψ" bzw. "für alle X_i gilt ψ" ausdrücken sollen.

(a) Geben sie präzise induktive Definitionen für die Syntax und die Semantik von QAL an (analog zu den Definitionen für AL).

(b) Zeigen Sie, dass jede Formel aus QAL zu einer Formel aus AL äquivalent ist.

(c) Überlegen Sie, welche Auswirkung die Transformation einer QAL-Formel in eine äquivalente AL-Formel auf die Formellänge hat.

Aufgabe 5: 6 Punkte

(a) Weisen Sie die Korrektheit des Sequenzenkalküls beispielhaft an den Regeln $(\neg \Rightarrow)$, $(\Rightarrow \wedge)$ und $(\rightarrow\Rightarrow)$ nach.

(b) Konstruieren Sie Beweise oder falsifizierende Interpretationen für die folgenden Sequenzen:

   (a) $(\psi \wedge \neg\varphi), (\psi \rightarrow \varphi), (\vartheta \rightarrow \eta), \psi \Rightarrow \vartheta$

   (b) $(X \rightarrow Y) \Rightarrow (Y \rightarrow Z)$

(c) Weisen Sie die Korrektheit der folgenden Regel nach:

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \text{(Schnittregel)}$$

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 99/00

4. Übung Mathematische Logik

Abgabe: Dienstag, den 7.12.1999 in der Vorlesung oder bis Ende der Vorlesung am Lehrstuhl
Übungstermin: Freitag, den 10.12.1999 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1: 6 Punkte

Welche der folgenden Mengen sind abzählbar, welche überabzählbar?

(a) Die Menge aller *endlichen* Teilmengen von $\mathbb{N}$.

(b) Die Menge aller Graphen mit Knotenmenge $\mathbb{N}$.

(c) Die Menge alles Isomorphieklassen endlicher Graphen.

(d) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(e) Die Menge aller *unendlichen* $0-1$-Folgen.

(f) Die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$.

Aufgabe 2: 6 Punkte

Seien f und g einstellige Funktionssymbole, $\tau = \{f, g\}$ und seien $\mathfrak{A} := (A, f^{\mathfrak{A}}, g^{\mathfrak{A}}), \mathfrak{B} := (B, f^{\mathfrak{B}}, g^{\mathfrak{B}})$ τ-Strukturen mit

- $A = \{0,1\}^*, f^{\mathfrak{A}}(w) = w0, g^{\mathfrak{A}}(w) = w1,$
- $\mathfrak{B} = \mathbb{N}, f^{\mathfrak{B}}(n) = 2n, g^{\mathfrak{B}}(n) = 3n.$

(a) Welche der folgenden Funktionen $h : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ sind Homomorphismen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$?

(i) $h(w) = 0$ für alle w.

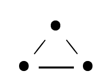
(ii) $h(w) = |w|$, wobei $|w|$ die Länge von w bezeichnet.

(iii) $h(w) = 2^{\#_0(w)}3^{\#_1(w)}$, wobei $\#_0(w)$ bzw. $\#_1(w)$ die Anzahl der Nullen bzw. Einsen in w bezeichnet.

(iv) $h(w) = 2^{|w|}$.

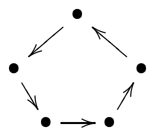
(b) Geben Sie für diejenigen h aus Aufgabe a), welche Homomorphismen sind, die Kongruenzrelation $E_h := \{(w, w') \ : \ h(w) = h(w')\}$ an und beschreiben Sie die Quotientenstruktur $\mathfrak{A}_{/E_h}$.

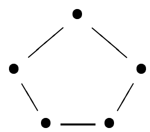
Aufgabe 3: 3 Punkte

Zeigen Sie: Ein Graph $\mathcal{G} = (V, E)$ ist 3-färbbar genau dann, wenn ein Homomorphismus $h : \mathcal{G} \longrightarrow$  existiert.

Aufgabe 4: 6 Punkte

Beschreiben Sie die Automorphismengruppen von

(a) 

(b) 

(c) $\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$

(d) $\bullet$ —— $\bullet$ —— $\bullet$ —— $\bullet$ —— $\bullet$ —— $\bullet$ —— $\bullet$

(e) $(\mathbb{N}, <)$

(f) $(\mathbb{R}, +, 0, 1)$

Aufgabe 5: 3 Punkte

(a) Sei $\tau = \{f, R\}$, wobei f ein 2-stelliges Funktionssymbol und R ein 3-stelliges Relationssymbol ist. Wieviele τ-Strukturen mit Universum $\{0, \ldots, n-1\}$ gibt es?

(b) Sei g ein einstelliges Funktionssymbol. Beschreiben Sie (durch graphische Darstellung) alle $\{g\}$-Strukturen mit Universum $\{0, 1, 2\}$.

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 99/00

5. Übung Mathematische Logik

Abgabe: Dienstag, den 11.1.2000 in der Vorlesung oder bis Ende der Vorlesung am Lehrstuhl
Übungstermin: Freitag, den 14.1.2000 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1: 7 Punkte

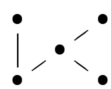
Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur mit Universum A. Eine Formel $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(\tau)$ definiert in der Struktur $\mathfrak{A}$ eine Menge $\varphi^{\mathfrak{A}}$ von Elementen, nämlich $\varphi^{\mathfrak{A}} := \{a \in A \ : \ \mathfrak{A} \models \varphi(a)\}$. So definiert z.B. die Formel $\varphi(x) := \neg\exists y(y < x)$ in der Struktur $(\mathbb{N}, <)$ die Menge $\{0\}$.

(a) Formalisieren Sie folgende Aussagen über Graphen.

(i) Es gibt einen Pfad der Länge 3.

(ii) Der Graph hat keinen Zyklus der Länge ≤ 7.

(iii) Der Graph enthält eine Kopie des folgenden Graphen als induzierten Untergraph.



(b) Geben Sie Formeln an, die folgende Knotenmengen definieren.

(i) Die Menge aller Knoten mit mindestens drei Nachbarn.

(ii) Die Menge aller Knoten in einer 3-Clique, die als induzierter Untergraph im gegebenen Graphen vorkommt.

(c) Sei $\mathfrak{B} := (B, R_1^{\mathfrak{B}}, \dots, R_k^{\mathfrak{B}})$ eine relationale τ-Struktur mit Universum B. Der *active domain* von $\mathfrak{B}$ ist definiert als die Menge aller Elemente $a \in B$, so dass es für mindestens ein i, j ein Tupel $(a_1, \dots, a_r) \in R_i^{\mathfrak{B}}$ gibt mit $a = a_j$. Geben Sie eine Formel $\varphi(x)$ an, die den active domain von τ-Strukturen definiert.

Aufgabe 2: 7 Punkte

(a) Gegeben sei die Struktur $\mathfrak{A} := (\{0,1,2\}, <)$, wobei $<$ als die natürliche Ordnung auf $\{0,1,2\}$ definiert sei. Weiterhin sei $\psi := \forall x(\forall y \ \neg x < y \lor \forall y \ \neg y < x)$ gegeben.

(i) Geben Sie den Spielgraphen für das Model Checking Spiel $\mathrm{MC}(\mathfrak{A}, \psi)$ an.

(ii) Geben Sie eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler an.

(b) Konstruieren Sie (auf der Basis des Auswertungsspiels) einen möglichst effizienten Auswertungsalgorithmus für FO-Sätze auf endlichen Strukturen. Schätzen Sie die Laufzeit und den Speicherbedarf des Algorithmus ab, abhängig von der Größe der gegebenen Struktur und der Länge (oder Komplexität) des gegebenen Satzes.

Aufgabe 3: 7 Punkte

(a) Wandeln Sie folgende Formeln zuerst in Pränex-Normalform und anschliessend in Skolem-Normalform um.

(i) $\forall x \forall y (Exy \to (\exists y Exy \wedge \exists z Eyz \wedge \neg z = x))$.

(ii) $\forall y (Eyy \to \exists x (Eyx \wedge \neg x = y)) \vee \forall y \exists x (Exy \wedge \neg \exists x Eyx)$.

(b) Wandeln Sie folgende Formel in positive Normalform um.

(i) $\neg \exists x (\forall y y < x \vee \forall y (\exists x' y < x' \wedge x' < x))$

(c) Geben Sie zu folgenden Formeln äquivalente termreduzierte Formeln an. Hierbei sind $+$ und f zweistellige und g ein dreistelliges Funktionssymbol.

(i) $\forall y \exists x (x + x + x = y)$

(ii) $\forall x \exists y \exists z (gfxyfgxyyzx = fxx)$

Aufgabe 4: 5 Punkte

(a) Berechnen Sie $(\varphi)[\sigma]$ für folgende Paare von Substitutionen σ und Formeln ψ.

(i) $\varphi := \exists z Exz \wedge \forall z (Ezy \to \exists x Eyx)$.
$\sigma := \{x/fyy, y/hz\}$.

(ii) $\varphi := xy \wedge \forall z (Exz \to Ezy)$.
$\sigma := \{x/fzy, y/gx\}$.

(b) Zeigen Sie:

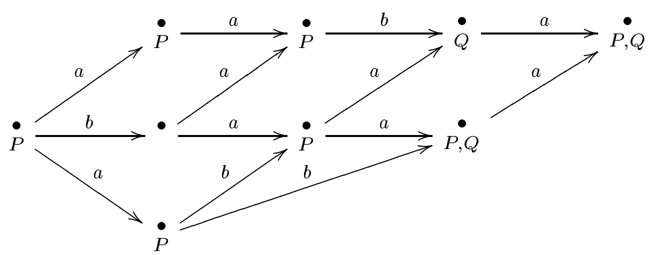
(i) $\varphi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n] = \varphi[x_1/t_1] \cdots [x_n/t_n]$ falls für alle $i \neq j$ x_i nicht in t_j vorkommt.

(ii) $\varphi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n] = \varphi[x_n/y][x_1/t_1, \ldots, x_{n-1}/t_{n-1}][y/t_n]$ falls y nicht in φ und den Termen $t_1, \ldots, t_n$ vorkommt.

(iii) Verallgemeinern Sie (b) so, dass $\varphi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$ aus φ mittels einer Komposition einfacher Substitutionen gewonnen werden kann.

Aufgabe 5: 3 Punkte

Gegeben sei folgendes Transitionssystem $T := (S, E_a, E_b, P, Q)$.



Geben Sie für jede der folgenden Formeln die Menge der Zustände von T an, an denen die Formel gilt und beschreiben Sie die Bedeutung der Formel.

(a) $\varphi(x) := \forall y (E_a xy \to Px) \wedge (E_b xy \to \neg Px))$.

(b) $\varphi(x) := \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (E_a x x_1 \wedge E_b x_1 x_2 \wedge Q x_3 \wedge \neg Q x_1 \wedge \neg Q x_2)$.

(c) $\varphi(x) := \exists y \exists y' (\neg y = y') \wedge E_a xy \wedge E_a xy' \wedge \neg \exists z (\neg y' = z \wedge \neg z = y \wedge E_a xz)$.

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 99/00

6. Übung Mathematische Logik

Abgabe: Dienstag, den 25.1.2000 in der Vorlesung oder bis Ende der Vorlesung am Lehrstuhl
Übungstermin: Freitag, den 28.1.2000 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1: 3 Punkte

Sei $\tau := \{$ *Prof, liest, Student, hört* $\}$ eine relationale Signatur mit nur zweistelligen Relationssymbolen. Sei weiterhin $\Sigma := \{a, \dots, z, A, \dots, Z\}$ das natürliche Alphabet. Wir betrachten τ-Strukturen über dem Universum $\mathbb{N} \cup \Sigma^*$, in denen die Relationssymbole wie folgt interpretiert seien. *Prof* enthält Paare (Name, PersNr), in denen jedem Professor eine Personalnummer zugeordnet wird. *liest* enthält Paare (PersNr, Vorlesung), die jedem Professor die von ihm gehaltenen Vorlesungen zuordnet. Analog enthält *Student* Paare der Form (Name, MatrNr) und *hört* Paare der Form (MatrNr, Vorlesung).
Geben Sie RA-Ausdrücke an, die folgende Mengen definieren.

(a) Die Menge $\{(Name, Vorlesung)$: Professor *Name* liest die Vorlesung *Vorlesung* $\}$.

(b) Die Menge $\{(Prof, Student)$: Student ist der Name eines Studenten der bei einem Professor namens *Prof* eine Vorlesung besucht.$\}$.

(c) Die Menge aller Vorlesungen, die nicht von allen Studenten gehört werden.

Aufgabe 2: 6 Punkte

Sei $\tau := \{R_1, R_2, R_3\}$ eine relationale Signatur, wobei R_1 4-stellig, R_2 3-stellig und R_3 2-stellig sei.

(a) Wandeln Sie folgende RA$^+$-Ausdrücke in FO-Formeln um.

(i) $\pi_{1,2,6}(\sigma_{4=7}((\pi_{1,2,4,5,7}(\sigma_{3=6}(R_1 \times R_2))) \times R_3))$

(ii) $\pi_{1,2}(\pi_{1,2,3,5}(\sigma_{3=4}(R_2 \times R_3)) \cup R_1)$

(iii) $\sigma_{4=6}(\sigma_{3=5}((Univ^4 - R_1) \times R_3))$

(b) Wandeln Sie folgende FO$[\tau]$-Formeln in RA^+-Ausdrücke um.

(i) $\varphi(x_1, x_2) := \exists x_3(R_1x_1x_1x_3x_2 \vee R_3x_1x_3)$

(ii) $\varphi(x_1, x_2) := \neg x_1 = x_2 \wedge \exists x_3(R_2x_1x_1x_3 \wedge R_3x_1x_2)$

(iii) $\varphi(x_1) := \exists x_2 \exists x_3(R_2x_1x_2x_3 \wedge R_3x_2x_3)$

Aufgabe 3: 4 Punkte

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei lineare Ordnungen mit $A \cap B = \varnothing$. Dann bezeichnen wir mit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ die lineare Ordnung $(A \cup B, <)$, welche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ so erweitert, dass jedes Element von $\mathfrak{B}$ grösser ist als alle Elemente von $\mathfrak{A}$.

(a) Man zeige, dass für beliebige lineare Ordnungen $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ und für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Gewinnt Spieler II die Spiele $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ und $G_m(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$, so auch $G_m(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}')$.

(b) Gilt die Umkehrung auch? Das heißt, gewinnt Spieler II die Spiele $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ und $G_m(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$, wenn er das Spiel $G_m(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \mathfrak{A}' + \mathfrak{B}')$ gewinnt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4: 3 Zusatzpunkte + 6 Punkte

Gegeben seien folgende Paare von Strukturen:

(a) $\mathfrak{A}$:

$$\begin{tikzcd} & \bullet \\ \bullet \arrow[ur, "rot"] \arrow[dr, "blau"'] & \\ & \bullet \\ \bullet \arrow[r, "rot"] & \bullet \\ \bullet \arrow[r, "blau"] & \bullet \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{B}$:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "rot"] & \bullet \\ \bullet \arrow[r, "blau"] & \bullet \end{tikzcd}$$

(b) $\mathfrak{A}: 0 \longleftrightarrow 1 \longleftrightarrow 2 \longleftrightarrow 3 \longleftrightarrow 4 \longleftrightarrow 5 \longleftrightarrow 6$
$\mathfrak{B}: 0 \longleftrightarrow 1 \longleftrightarrow 2 \longleftrightarrow 3 \longleftrightarrow 4 \longleftrightarrow 5 \longleftrightarrow 6 \longleftrightarrow 7$

Zeigen Sie für beide Paare von Strukturen:

(i) Welches ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$, so dass Spieler I das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt. Begründen Sie ihre Antwort, indem Sie eine Strategie für Spieler I bzw. Spieler II in den entsprechenden Spielen angeben.

(ii) Geben Sie einen FO-Satz ψ mit Quantorenrang n an (n aus Teil *(i)*), der die Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ trennt, d.h. für den gilt: $\mathfrak{A} \models \psi$ aber $\mathfrak{B} \models \neg\psi$. Beachten Sie: ψ muss nicht in Pränex-Normalform sein!

Zeigen Sie für das Paar (a) von Strukturen:

(iii) (*) Jeder $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ trennende Satz in *Pränex-Normalform* hat mindestens Quantorenrang $n + 1$ für das in *(i)* gefundene n.

Aufgabe 5: 3 Punkte

Sei $\tau := \{P\}$, P ein einstelliges Relationssymbol. Der *Charakter* einer Struktur $\mathfrak{A} := (A, P^{\mathfrak{A}})$ ist das Paar (i, j) mit $i = |P^{\mathfrak{A}}|$, wenn $P^{\mathfrak{A}}$ endlich ist, $i = \infty$ sonst, und mit $j = |A - P^{\mathfrak{A}}|$, wenn $A - P^{\mathfrak{A}}$ endlich ist, $j = \infty$ sonst. Zeigen Sie, dass für zwei Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Spieler II das Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ genau dann gewinnt, wenn sie den gleichen Charakter haben. Wie ist die entsprechende Bedingung für das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$?

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 99/00

7. Übung Mathematische Logik
Abgabe: Dienstag, den 8.2.2000 in der Vorlesung oder bis Ende der Vorlesung am Lehrstuhl
Übungstermin: Freitag, den 11.2.2000 in den Übungsgruppen

Aufgabe 1: 5 Punkte

Ein alter Schlager:

"Everybody loves my baby, my baby loves nobody but me."

(a) Formalisieren Sie diese beiden Aussagen durch FO-Formeln φ_1, φ_2 der Signatur $\{\text{loves}, \text{me}, \text{mybaby}\}$.

(b) Zeigen Sie durch ein semantisches Argument, dass $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \text{me} = \text{mybaby}$.

(c) Geben Sie eine Ableitung der Sequenz $\varphi_1, \varphi_2 \Rightarrow \text{me} = \text{mybaby}$ an.

Aufgabe 2: 6 Punkte

(a) Beweisen Sie die Korrektheit der Quantorenregeln $(\exists \Rightarrow)$, $(\forall \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \forall)$. Zeigen Sie, dass in den Regeln $(\exists \Rightarrow)$ und $(\Rightarrow \forall)$ die Bedingung, dass c nicht in Γ, ψ und Δ vorkommt, nicht weggelassen werden kann.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Regel.

$$\frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \leftrightarrow \vartheta}$$

(c) Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls die Gültigkeit folgender Formeln:

(i) $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \psi$.

(ii) $\neg\exists x\varphi(x) \leftrightarrow \forall x\neg\varphi(x)$.

Hinweis: Die Gültigkeit von Formeln entspricht der Korrektheit gewisser Sequenzen.

Aufgabe 3: 3 Punkte

Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass die Klasse aller (endlichen oder unendlichen) zusammenhängenden Graphen nicht FO-axiomatisierbar ist.
Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe ein solches Axiomensystem Φ. Erweitern Sie Φ durch eine geeignete Menge von Formeln, so dass jede endliche Teilmenge - und damit auch die Gesamtmenge - ein Modell besitzt, das Modell der Gesamtmenge jedoch nicht zusammenhängend sein kann.

Aufgabe 4: 4 Punkte

Sei C eine Menge von Konstanten mit $c_0, c_1 \in C$. Sei ferner $T := \{c_i = c_j \;:\; c_i, c_j \in C - \{c_0\}\} \cup \{f^2c_0 = f^2c_1, f^5c_0 = fc_1\} \cup \{Rc_0, Rf^3c_1\}$, Σ der Abschluss von T unter Substitution und $\sim$ die von Σ induzierte Kongruenzrelation auf der Herbrandstruktur $\mathfrak{H}(\Sigma)$.

(a) Beschreiben Sie Σ.

(b) Beschreiben Sie $\mathfrak{H}(\Sigma)$ und die kanonische Struktur $\mathfrak{A}(\Sigma)_{/\sim}$.

(c) Ist $\mathfrak{A}(\Sigma)$ ein Modell von T?

(d) Sei $T' := T \cup \{\exists x(Rx \wedge Rfx)\}$. Dann ist Σ auch der Abschluss von T' unter Substitution. Zeigen Sie: T' ist erfüllbar, aber $\mathfrak{A}(\Sigma) \not\models T'$.

Aufgabe 5: Zusatzpunkte: 6 Punkte

Sei $\mathfrak{A}$ ein abzählbares Nichtstandardmodell der Arithmetik. Sei ferner $\varphi(x,y) := x \neq y \wedge \exists z(x + z = y)$ und $(\mathfrak{A}, <^{\mathfrak{A}}) := (\mathfrak{A}, \varphi^{\mathfrak{A}})$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{A}, <^{\mathfrak{A}})$ ein Modell von $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}, <)$ ist. (Also ein abzählbares Nichtstandardmodell der geordneten Arithmetik.)

(b) Zeigen Sie, dass $(A, <^{\mathfrak{A}})$ keine Wohlordnung ist, d.h. eine unendlich absteigende Kette enthält.

(c) Beschreiben Sie die Ordnungsstruktur von $(A, <^{\mathfrak{A}})$: Betrachten Sie die Ordnung $(B, <^B)$ mit $B := \mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}^{>0}$ und $(a,b) <^B (a',b')$, wenn $b < b'$ oder wenn $b = b'$ und $a < a'$; also informell: $(B, <^B)$ ist zusammengesetzt aus $(\mathbb{N}, <)$ und dahinter abzählbar vielen, dicht hintereinander liegenden Kopien von $(\mathbb{Z}, <)$. Zeigen Sie, dass es eine Einbettung von $(B, <^B)$ in $(A, <^{\mathfrak{A}})$ gibt.

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

WS 99/00

Probeklausur
Mathematische Logik

Aufgabe 1: 7 Punkte

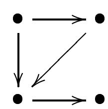
Welche der folgenden Klassen von Graphen sind FO-axiomatisierbar, welche endlich axiomatisierbar? Begründen Sie ihre Antworten und geben Sie gegebenenfalls ein Axiomensystem an.

$K_1 =$ die Klasse aller vollständigen Graphen. (Ein Graph heisst vollständig, wenn jeder Knoten mit jedem anderen Knoten verbunden ist.)

$K_2 =$ die Klasse aller Graphen mit Durchmesser 3. (Der Durchmesser eines Graphen ist der maximale Abstand zweier Punkte.)

$K_3 =$ die Klasse aller Graphen, welche einen Kreis der Länge 5 enthalten.

$K_4 =$ die Klasse aller endlichen Graphen in K_3.

$K_5 =$ die Klasse aller Graphen, welche zu  isomorph sind.

$K_6 =$ die Klasse aller Graphen, welche zu $(\mathbb{N}, E)$ ismomorph sind, wobei $E = \{(m,n) \ : \ m+1 = n$ oder $m-1 = n\}$ ist.

$K_7 =$ die Klasse aller Graphen, in denen jeder Knoten höchstens endlich viele Nachbarn hat.
Hinweis: Benutzen Sie den Kompaktheitssatz.

Aufgabe 2: 4 Punkte

Sei f ein einstelliges Funktionssymbol.

(a) Sei K_1 die Klasse der $\{f\}$-Strukturen mit der Eigenschaft, dass $|Bild(f)| = p$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Ehrenfeucht-Fraïssé, dass K_1 nicht endlich axiomatisierbar ist.

(b) Sei K_2 die Klasse der $\{f\}$-Strukturen mit der Eigenschaft, dass es für alle Elemente a ein $n \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $f^n(a) = a$ ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass K_2 nicht axiomatisierbar ist.

Aufgabe 3: 3 Punkte

Sei f ein 2-stelliges Funktionssymbol und P ein 2-stelliges Relationssymbol. Gegeben sei die $\{P, f\}$-Formel $\psi := \forall z[(fxz = y) \land (\forall x \forall y(Pxy \land Pyz) \rightarrow Pzz)]$.

(a) Bilden Sie $\psi[x/z, y/z, z/fxx]$.

(b) Geben Sie eine zu ψ äquivalente Formel φ in Pränex-Normalform an.

(c) Transformieren Sie φ zu einer Formel in Skolem-Normalform.

Aufgabe 4: 3 Punkte

Gegeben sei die Struktur $\mathfrak{A} := (\{0,1\}, +, 1)$, wobei $+$ als die Addition (mod 2) interpretiert sei, sowie die Formel $\psi := \exists x \forall y (y + y = x + 1 \land \exists z (y + z = x))$.

(a) Geben Sie den Spielgraphen für das Auswertungsspiel auf $\mathfrak{A}$ und ψ an.

(b) Geben Sie für einen der beiden Spieler eine Gewinnstrategie an. (Gewinnstrategien beginnen an der Wurzel!)

Aufgabe 5: 6 Punkte

Gegeben sei ein Transitionssystem $T = (S, E_a, E_b, P, Q)$, wobei E_a, E_b zweistellige und P, Q einstellige Relationssymbole seien.

(a) Definieren Sie folgende Mengen mittels FO-Formeln.

(i) Die Menge aller Knoten von denen ein aba-Pfad ausgeht.

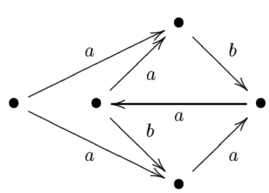
(ii) Die Menge aller Knoten an denen P gilt, Q aber nicht, mit mindestens zwei a-Nachfolgern an denen P gilt und genau einem b-Nachfolger an dem Q nicht gilt.

(b) Definieren Sie folgende Mengen mittels RA-Ausdrücken.

(i) Die Menge aller Knoten mit einem a-Vorgänger und einem b-Nachfolger.

(ii) Die Menge aller Knoten, von denen ein bba-Pfad ausgeht, auf dem die Knotenbeschriftung $(\{P, \neg Q\}, \{P, Q\}, \{Q, \neg P\}, \{\neg P, \neg Q\})$ auftritt. (Das bedeutet, der erste Knoten auf dem Pfad ist mit P, Q beschriftet, der nächste mit $Q, \neg P$ usw.)

(c) Gegeben sei folgendes Transitionssystem:



Geben Sie für jede der folgenden Formeln bzw. RA-Ausdrücke die definierte Menge von Knoten an und beschreiben Sie die Bedeutung der Formeln.

(i) $\psi(x) := \exists y \exists y' \exists z E_a xy \land E_b xy' \land y \neq y' \land E_b yz \land E_a y'z.$

(ii) $\pi_1 \sigma_{2=3} \sigma_{4=5} \sigma_{1=6} (E_a \times E_b \times E_a).$

Aufgabe 6: 5 Punkte

(a) Formulieren Sie den Resolutionssatz. Erläutern Sie die dabei auftretenden Begriffe.

(b) Wie verwendet man AL-Resolution um nachzuweisen, dass $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models \psi$, für AL-Formeln $\psi_1, \ldots, \psi_n, \psi$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, dass $\{Y \to X, U \land W \to Y, V \to U\} \models W \land V \to X$.

Aufgabe 7: 8 Punkte

(a) φ, ψ, ϑ seien aussagenlogische Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) $\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \psi$.

(ii) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \vartheta \equiv \varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \vartheta)$.

(iii) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \vartheta \equiv (\varphi \rightarrow \vartheta) \vee (\psi \rightarrow \vartheta)$.

(b) Geben Sie eine aussagenlogische Formel $\psi(X_3, \ldots, X_0)$ an, so dass $\mathfrak{I}(\psi) = 1$ gdw. die Dualzahl $\mathfrak{I}(X_3)\mathfrak{I}(X_2)\mathfrak{I}(X_1)\mathfrak{I}(X_0)$ durch 3 teilbar ist.

(c) Geben Sie eine aussagenlogische Formel $\psi(X_n, \ldots, X_0, Y_{n+1}, \ldots, Y_0)$ an, so dass $\mathfrak{I}(\psi) = 1$ gdw. die durch $\mathfrak{I}(X_n) \ldots \mathfrak{I}(X_0)$ gegebene Dualzahl um 1 kleiner ist als die durch $\mathfrak{I}(Y_{n+1}) \ldots \mathfrak{I}(Y_0)$ gegebene.

(d) Untersuchen Sie, ob die folgenden Systeme von Junktoren funktional vollständig sind.

(i) $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$

(ii) $\{sel, 0, 1\}$.

Dabei sei $sel(u, v, w) = v$, falls $u = 0$, und $sel(u, v, w) = w$, falls $u = 1$.

Aufgabe 8: 5 Punkte

(a) Beschreiben Sie, was eine korrekte Sequenz ist. Was ist eine korrekte Ableitungsregel für Sequenzen?

(b) Beweisen Sie (semantisch) die Korrektheit folgender Regeln:

(i)

$$(S \Rightarrow) \quad \frac{\Gamma, \psi(t) \rightarrow \Delta}{\Gamma, t = t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}.$$

(ii)

$$(\Rightarrow \wedge) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta}$$

(c) Beweisen oder widerlegen Sie mit Hilfe des Sequenzenkalküls die Gültigkeit folgender Formeln:

(i) $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \psi$.

(ii) $\neg\exists x \psi(x) \rightarrow \forall x \neg\psi(x)$.

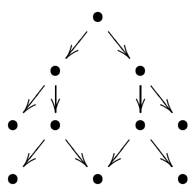
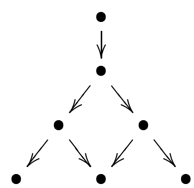
Aufgabe 9: 4 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass die τ_{ar}-Struktur $\mathfrak{N} := (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ keine echten Substrukturen enthält.

(b) Geben Sie alle Substrukturen von $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ an.

(c) Zeigen Sie, dass es keine τ_{ar}-Struktur $\mathfrak{A}$ gibt, so dass $(\mathbb{N}, +, 0, 1) \subset \mathfrak{A} \subset (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$.

Aufgabe 10: 4 Punkte

$\mathfrak{A}$:  $\mathfrak{B}$: 

(a) Welches ist das kleinste m, so dass Spieler I das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt?

(b) Finden Sie einen Satz ψ mit Quantorenrang m, so dass $\mathfrak{A} \models \psi$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi$.

Aufgabe 11: 3 Punkte

Untersuchen Sie für die unten angegebenen Tripel $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$, ob

(a) f ein Homomorphismus

(b) f ein Isomorphismus

(c) f eine Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ ist.

Dabei sei:

(i) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, max, min)$
$\mathfrak{B} := (\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap)$
$f(n) := \{0, \dots, n\}$

(ii) $\mathfrak{A} := (A, \cup, \cap)$ mit $A :=$ Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$
$\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, max, min)$
$f(X) := |X|$

(iii) $\mathfrak{A} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, Q)$ mit $Q := \{(n,m) \ : \ n$ und m sind teilerfremd $\}$
$\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, P)$, mit $P := \{p \ : \ p$ ist Primzahl $\}$.
$f(n,m) := (n \cdot m)! + 1$