Kapitel 1: Aussagenlogik

Induktiver Aufbau
$0, 1 \in AL$ (Boolsche Konstanten)
$\tau \subseteq AL$ (Variablen)
$\psi, \varphi \in AL$.Dann $\neg\psi, (\psi \wedge \varphi), (\psi \vee \varphi), (\psi \rightarrow \varphi), (\psi \leftrightarrow \varphi) \in AL$

AL-Interpretation, Modellbeziehung
Interpretation: $\mathcal{J} : \sigma \rightarrow \{0, 1\}, \sigma \subseteq \tau$
passendes $\mathcal{J}$: zumindest jede Variable aus ψ wird belegt
$\mathcal{J}(0) = 0, \mathcal{J}(1) = 1, \mathcal{J}(\neg\psi) = 1 - \mathcal{J}(\psi), \mathcal{J}(\psi \wedge \varphi) = min(\mathcal{J}(\psi), \mathcal{J}(\varphi)), \mathcal{J}(\psi \vee \varphi) = max(\mathcal{J}(\psi), \mathcal{J}(\varphi)), \mathcal{J}(\psi \rightarrow \varphi) = \mathcal{J}(\neg\psi \vee \varphi), \mathcal{J}(\psi \leftrightarrow \varphi) = \mathcal{J}((\psi \rightarrow \varphi) \wedge (\varphi \rightarrow \psi))$
Modellbeziehung $\mathcal{J} \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{J}(\psi) = 1$ ($\mathcal{J}$erfüllt ψ), $\mathcal{J} \models \Phi$ gdw. $\mathcal{J} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$
Tautologie (allgemeingültig): $\models \psi$ für alle $\mathcal{J}$
erfüllbar: es existiert $\mathcal{J}$ mit $\mathcal{J} \models \psi$
logisch äquivalent: $\psi \equiv \varphi$ gdw. $\mathcal{J} \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{J} \models \varphi$

Koinzidenzlemma
Wenn $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}'$ zwei zu ψ passende Interpretationen sind mit $\mathcal{J}(X) = \mathcal{J}'(X)$ für alle $X \in \tau(\psi)$, dann gilt $\mathcal{J}(\psi) = \mathcal{J}'(\psi)$.

Äquivalente Normalformen: DNF ($\vee \wedge Y_i$) und KNF ($\wedge \vee Y_i$), Y_i Literale

Funktionale Vollständigkeit
zu jeder Formel gibt es eine boolsche Funktion, z.B.
$f_{0000}(00) = 0, f_{0010}(00) = 0, f_{0000}(01) = 0, f_{0010}(01) = 0$
$f_{0000}(10) = 0, f_{0010}(10) = 1, f_{0000}(11) = 0, f_{0010}(11) = 0$
$\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ nicht fkt.vollst., da für alle mit den diesen Junktoren gebildeten $\psi(X_1, \ldots, X_n)$ gilt: $\psi[1, \ldots, 1] = 1$. $\neg$ kann nicht dargestellt werden.

Hornformeln: KNF mit folgenden Disjunktionen:
(1) $\neg X_1 \vee \cdots \vee \neg X_k \vee X \equiv X_1 \wedge \cdots \wedge X_k \rightarrow X$
(2) $\neg X_1 \vee \cdots \vee \neg X_k \equiv X_1 \wedge \cdots \wedge X_k \rightarrow 0$

Erfüllbarkeitstest für Hornformeln (Algorithmus)
$N = \emptyset, M := \{X \in \tau(\psi) : \psi$ enthält C_i der Form $(1 \rightarrow X)\}$
while $N \neq M$ do begin
$N := M$
$M := M \cup \{X : \psi$ enthält C_i der Form $(X_1 \wedge \ldots \wedge X_k) \rightarrow X$ mit $\{X_1, \ldots, X_k\} \subseteq M\}$
if ψ enthält C_i der Form $(X_1 \wedge \ldots \wedge X_k) \rightarrow 0$ mit $\{X_1, \ldots, X_k\} \subseteq M$ then output(ψ unerfüllbar)
end
output(ψ erfüllbar mit $\mathcal{J}_M$)
M definiert Belegung $\mathcal{J}_M$ mit $\mathcal{J}_M(X) = 1$ gdw. $X \in M$.

Semantische Folgerungsbeziehung
$\Phi \models \psi$ gdw. jede zu $\Phi \cup \{\psi\}$ passende Interpretation, welche Modell von Φ ist, auch Modell von ψ ist.

Endlichkeitssatz (Kompaktheitssatz)
(1) Φ ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.
(2) $\Phi \models \psi$ gdw. eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ existiert mit $\Phi_0 \models \psi$.

Lemma von Zorn
Sei $(A, <)$ eine nicht-leere partielle Ordnung in der jede Kette nach oben beschränkt ist. Dann besitzt $(A, <)$ min. ein maximales Element.

Lemma von König
Sei T ein endlich verzweigter Baum mit Wurzel w, in dem es beliebig lange endliche Wege gibt. Dann gibt es auch einen unendlichen Weg in T, der bei w beginnt.

$\mathcal{G}$ **ist k-färbbar** wenn es $f : V \rightarrow \{1, \ldots, k\}$ gibt, so daß $f(p) \neq f(q)$ für alle Kanten p, q.

Resolution (KNF, Klauselmenge)
syntaktisches Verfahren, um Unerfüllbarkeit von Formeln nachzuweisen, indem positive und negative Literale der Klauseln gegeneinander ausgespielt werden und die leere Klauselmenge abgeleitet wird.
Resolutionslemma: Sei K Klauselmenge, $C_1, C_2 \in K$ und C Resolvente von C_1, C_2. Dann sind K und $K \cup \{C\}$ äquivalent.
Resolutionssatz: Eine Klauselmenge K ist unerfüllbar gdw. $\Box \in Res^*(K)$.

Einheitsresolution für Hornformeln: einelementige Klausel mit Klauselmenge resolvieren (vgl.Resolution, zeigt im Gegensatz zu Hornformel-Algorithmus nur Unerfüllbarkeit an)

AL-Sequenzenregeln: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$, jeweils im Antezedens und Sukzedens (vgl. FO-SK)
Sequenz: $\wedge\Gamma \Rightarrow \vee\Delta$
Axiom: $\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \psi$
Schlussregel besteht aus Prämisse und Konklusion
$\mathcal{J}$ falsifiziert die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$, falls $\mathcal{J}$ alle Formeln aus Γ, aber keine aus Δ wahr macht.
$\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist gültig, falls jedes Modell von Γ auch Modell mindestens einer Formel aus Δ ist.
Korrektheit: aus gültigen Sequenzen können nur gültige Sequenzen abgeleitet werden (da Axiome gültig und Schlussregeln korrekt sind)
Vollständigkeit: alle gültigen Sequenzen können abgeleitet werden.

Kapitel 2: Strukturen und Homomorphismen

Abzählbarkeit: Bijektion auf natürliche Zahlen, Diagonalisierungsargument als Gegenbeweis
$f : A \rightarrow B$ bijektiv: $\forall a \forall a'(a \neq a' \rightarrow fa \neq fa') \wedge \forall b \exists a(fa = b)$, $a, a' \in A, b \in B$

Eine Struktur besteht aus Universum und Interpretationsfunktion, welche Funktionen (0-st.Fkt. sind Konstanten) und Relationen aus der Signatur über der Struktur interpretiert (auf das Universum bezieht)
Relationale Strukturen (nur Relationssymbole), algebraische Strukturen (nur Funktionssymbole), Signatur: der Vorrat an Funktionen und Relationen (funktionale Signatur: Algebra)

Substruktur (dual: Erweiterung): Einschränkung des Universums, Restriktion der Funktionen, Relationen auf die Werte, die im eingeschränkten Universum vorkommen
Redukt (dual: Expansion): Einschränkung der Signatur (Weglassen der Funktionen und Relationen, die nicht im Schnitt der Signaturen liegen)

Beispielstrukturen
Mengen sind Strukturen mit leerer Signatur.
Graph $\mathcal{G} = (V, E)$, für $u, v \in V$ gilt: $(\forall v \neg Evv) \wedge (\forall u \forall v(Euv \rightarrow Evu))$
partielle Ordnung: irreflexiv $(\forall a \neg a < a)$, transitiv $(a < b \wedge b < c \rightarrow a < c)$
Transitionssystem
Arithmetik $\tau_{ar} = \{+, \cdot, 0, 1\}$
Boolsche Algebra $BA(A) = \{\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, A\}$
Gruppe $\mathcal{G} = (G, \circ, e, ^{-1})$

Aktiver Domain: anstelle des (möglicherweise unendlichen) Universums betrachtet man $ad(\mathcal{D})$, welcher aus denjenigen Objekten besteht, die in einer der Relationen bzw. Funktionen vorkommen.

Homomorphismus (strukturerhaltende Abbildung): $\pi : A \rightarrow B$ und:
(1) für $R \in R^n(\tau)$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt: $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{A}} \Rightarrow (\pi a_1, \ldots, \pi a_n) \in A$
(2) für $f \in F^n(\tau)$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt: $\pi f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{B}}(\pi a_1, \ldots, \pi a_n)$
starker Homomorphismus: es gilt sogar $\bar{a} \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \pi\bar{a} \in R^{\mathcal{B}}$
Einbettung: injektiver starker Homomorphismus
Automorphismus: bijektiver Homomorphismus (Isomorphismus) in der selben Struktur
Automorphismengruppe: starr, falls $Aut(\mathcal{A}) = \{1_{\mathcal{A}}\}$
$(\mathbf{Z}, +, 0) = \mathrm{Aut}((\mathbf{Z}, <))$

Äquivalenzrelation R: $Rxx, Rxy \rightarrow Ryx, Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz$
Äquivalenzklasse: $[a]_R := \{b : (a, b) \in R\}$
Kongruenzrelation:
(1) Wenn $[a_1] = [b_1], \ldots, [a_n] = [b_n]$, dann $[f^{calA}(a_1, \ldots, a_n)] = [f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n)]$
(2) $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathcal{A}}$
Äquivalenzklassen bzgl. einer Kongruenzrelation heißen Kongruenzklassen.
Quotientenstruktur $\mathcal{A}/_\sim$:
(1) Universum $A/_\sim := \{[a] : a \in A\}$ der Kongruenzklassen von A
(2) $f^{\mathcal{A}/\sim}([a_0], \ldots, [a_{n-1}]) := [f^{\mathcal{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})]$
(3) $([a_0], \ldots, [a_{n-1}]) \in R^{\mathcal{A}/\sim} \Leftrightarrow (a_0, \ldots, a_{n-1}) in R^{\mathcal{A}/\sim}$

Homomorphiesatz: Für jeden Homomorphismus $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen τ-Algebren ist $\mathcal{A}/_{E_\pi} \cong \pi(\mathcal{A})$

Kapitel 3: Syntax und Semantik der Prädikatenlogik

FO-Terme: $VAR \subseteq T(\tau)$, wenn $t_1, \ldots, t_n \tau$-Terme und $f \in F^n(\tau)$, so ist auch $ft_1 \ldots t_n$ ein τ-Term.
Grundterm: Term ohne Variablen (nur Funktionen bzw. Konstanten)

Formeln:
(1) Sind $t_1, t_2 \tau$-Terme, dann ist $t_1 = t_2$ eine τ-Formel.
(2) Sind $t_1, \ldots, t_n \tau$-Terme und $P \in R^n(\tau)$, so ist $Pt_1 \ldots t_n$ eine τ-Formel.
(3) Wenn ψ eine τ-Formel ist, dann auch $\neg\psi$.
(4) Wenn ψ und $\varphi \tau$-Formeln sind, dann auch $(\psi \wedge \varphi), (\psi \vee \varphi), (\psi \rightarrow \varphi)$ und $(\psi \leftrightarrow \varphi)$.
(5) Wenn ψ eine τ-Formel ist und $x \in VAR$, dann sind $\exists x\psi$ und $\forall x\psi \tau$-Formeln.
atomare Formeln: (1),(2) - Literale: (1),(2),(3) - quantorenfreie Formeln: (1),(2),(3)(4)

$x \in VAR$ ist **gebunden**, falls x in einer Unterformel der Form $\exists x\psi$ oder $\forall x\psi$ vorkommt, andernfalls heißt x **frei**.

FO-Interpretation, Modellbeziehung: $\mathcal{J}(\mathcal{A}, \beta)$ ordnet jedem

Term $t \in T(\tau)$ ein $t^{\mathcal{J}} \in A$ und jedem $\psi \in FO(\tau)$ ein $\mathcal{J}(\psi) \in \{0,1\}$ (induktiv) zu. $\mathcal{J} \models \psi : \psi$ gilt in $\mathcal{A}$ unter β

Koinzidenzlemma: $\psi \in FO(\sigma \cap \tau), (\mathcal{A}, \beta) = \mathcal{J}_\sigma, (\mathcal{A}', \beta') = \mathcal{J}_\tau$ mit:
(1) $\mathcal{A} \mid \sigma \cap \tau = \mathcal{A}' \mid \sigma \cap \tau$
(2) Frei(ψ) $\subseteq$ Def(β)$\cap$ Def(β') und $\beta(x) = \beta'(x)$ für alle $x \in$ Frei(ψ)
Dann: $\mathcal{A} \models \psi[\beta]$ gdw. $\mathcal{A}' \models \psi[\beta']$

Modellklasse $Mod(\Phi)$: Menge aller τ-Strukturen $\mathcal{A}$, die Modell zum Axiomensystem Φ sind.

Semantische Folgerungsbeziehung, Erfüllbarkeit, logische Äquivalenz wie in AL

Termalgebra $\mathcal{T}(X)$: τ sei funktionale Signatur, Universum ist die Menge aller τ-Terme mit Variablen aus $X \subseteq VAR$. Es gilt: $f^{\mathcal{T}(X)}(t_1, \ldots, t_n) := ft_1 \ldots t_n$

Substitution: simultane Ersetzung, ggf.gebundene Variablen umbenennen.
Eine Substitution $\rho : VAR \to T(\tau)$ hat **endlichen Support**, wenn sie nur endlich viele $x \in VAR$ verändert.
Substitutionslemma: $\rho = (x_1/t_1, \ldots, x_k/t_k)$
(1) $t[\rho]^{\mathcal{J}} = t^{\mathcal{J} \circ \rho}$ (2) $\mathcal{J} \models \psi[\rho] \Leftrightarrow (\mathcal{J} \circ \rho) \models \psi$
Ersetzungslemma: Erhaltung der Äquivalenz bei Substitution durch äquivalente Formeln

reduzierte Formel: Nur $\vee, \neg, \exists$ sind erlaubt.
positive NF: durch Hineinziehen der Negationen erreicht man eine Formel, die keine Negationen, außer in den Literalen, enthält. $\to, \leftrightarrow$ sind nicht erlaubt.
termreduzierte NF: durch Einführen neuer Funktions-,Relationssymbole erreicht man, daß Terme eine Maximaltiefe von eins haben (d.h. keine Verschachtelungen).
Pränex-NF: Quantoren nach außen ziehen, gleichnamige freie Variablen müssen substituiert werden. $\to, \leftrightarrow$ sind nicht erlaubt.
Skolem-NF: Entfernen der Existenzquantoren der Pränex-NF von außen nach innen, Ersetzen durch ein neues Funktionssymbol, das abhängig von den äußeren Variablen ist.

MC-Spiel, Regeln: ψ in pos.NF, Literal:Ende, $\vee$:V, $\wedge$:F, $\exists$:V, $\forall$:F
Spielgraph: Wurzel:Formel, Knoten:alle möglichen wählbaren Unterformeln, Blatt:Literal

Kapitel 4: Definierbarkeit und elementare Äquivalenz

$\mathcal{K}$ **FO-axiomatisierbar**: Existenz einer Satzmenge Φ, so daß $\mathcal{K} = Mod(\Phi)$
Jedes endliche Axiomensystem kann durch einen Satz ausgedrückt werden ($\wedge\varphi_i, \varphi_i \in \Phi$)
Beispiele: Graphen,Gruppen,lineare und partielle Ordnungen,Äquivalenzstrukturen,Ringe,Körper

Definierbarkeit
ψ definiert in $\mathcal{A}$ die Relation: $\psi^{\mathcal{A}} := \{(a_1, \ldots, a_r) : \mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_r)\} \subseteq A^r$
R elementar definierbar, falls $R = \psi^{\mathcal{A}}$, f elementar definierbar, falls $Graph(f)$ elementar definierbar ist.
Konstante a ist termdefinierbar, wenn Grundterm $t \in T(\tau)$ existiert mit $t^{\mathcal{A}} = a$

Relativierte Quantoren: $\exists x(\alpha \wedge \ldots)$ $\forall x(\alpha \to \ldots)$ oder $(\exists x.\alpha)\ldots$ $(\forall x.\alpha)\ldots$

Isomorphielemma: Sei $\pi : \mathcal{A} \tilde{\to} \mathcal{B}$ Isomorphismus von τ-Strukturen. Dann gilt für alle $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$:
$\mathcal{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \psi(\pi a_1, \ldots, \pi a_n)$
Es gilt weiterhin: $\mathcal{A} \in \mathcal{K}, \mathcal{A} \cong \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \in \mathcal{K}$

Relationale Algebra, RA:
$\pi_{1,2,3,4}\sigma_{5=2}\sigma_{6=1}\sigma_{7=1}\sigma_{8=4}\sigma_{9=4}(Univ^4 \times R)$ entspricht $\exists x_5 \ldots \exists x_9(Rx_5 \ldots x_9 \wedge x_5 = x_2 \wedge x_6 = x_1 \wedge x_7 = x_1 \wedge x_8 = x_4 \wedge x_9 = x_4)$
Formel $\varphi \to RA^+$, m sei die Anzahl der freien Variablen in φ:
$x_i = x_j$ zu $\sigma_{i=j} Univ^m$
$Rx_{i_1} \ldots x_{i_s}$ zu $\pi_{1,\ldots,m}\sigma_{m+1=i_1} \ldots \sigma_{m+s=i_s}(Univ^m \times R)$
$\neg\vartheta$ zu $(Univ^m - R_\vartheta)$
$\vee$ zu $\cup$
$\exists x_i\vartheta(x_1, \ldots, x_{m+1}), i = m+1$ zu $\pi_{1,\ldots,m}R_{\vartheta,m+1}$
$\exists x_i\vartheta(x_1, \ldots, x_m), i \leq m$ zu $\pi_{1,\ldots,i-1,m+1,i+1,\ldots,m}R_{\vartheta,m+1}$

Theorie: erfüllbare Satzmenge $T \subseteq FO(\tau)$ mit $T \models \psi \Rightarrow \psi \in T$
vollständige Theorie: entweder $\psi \in T$ oder $\neg\psi \in T$
$Th(\mathcal{A}) := \{\psi : \mathcal{A} \models \psi\}$
Eine Theorie ist vollständig, wenn alle ihre Modelle elementar äquivalent sind. Isomorphe Strukturen sind elem. äquivalent (vgl. Isomorphielemma).

elementare Äquivalenz $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$: $Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$, d.h. für alle $\psi : \mathcal{A} \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \psi$

Quantorenrang $qr(\psi)$: maximale Schachtelungstiefe der Quantoren in ψ
m-Äquivalenz: $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$ gdw. für ψ-Sätze mit $qr(\psi) \leq m : \mathcal{A} \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \psi$
lokaler Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$: $p : Def(p) \to B$ injektiv

Ehrenfeucht-Fraïsse-Spiel auf $\mathcal{A}, \mathcal{B}$: Herausforderer wählt Punkt aus beliebiger Struktur, Duplikatorin versucht lokalen Isomorphismus zu erzeugen durch die Wahl eines Punktes der jeweils anderen Struktur.
Duplikatorin gewinnt $\mathcal{G}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ bei Isomorphie. Gewinnstrategie: egal was der Gegner wählt, es gibt immer eine Zugfolge, die zum Gewinn führt. Variante: Bei $\mathcal{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gibt Herausforderer Zugzahl vor.
Satz E-F: Sei τ endlich, relational, $\mathcal{A}, \mathcal{B}\tau$-Strukturen.
(1) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ gdw. Die Duplikatorin gewinnt das E-F-Spiel $\mathcal{G}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
(2) $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$ gdw. Die Duplikatorin gewinnt $\mathcal{G}_m(\mathcal{A}\mathcal{B})$

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}\tau$-Strukturen, $\bar{a} = a_1, \ldots, a_r \in A, \bar{b} = b_1, \ldots b_r \in B$. Wenn es eine Formel $\psi(\bar{x})$ mit $qr(\psi) = m$ gibt, so aß $\mathcal{A} \models \psi(\bar{a})$ und $\mathcal{B} \models \neg\psi(\bar{b})$, dann hat der Herausforderer eine Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.

Anwendung: z.z.$\mathcal{K}$ nicht elementar definierbar: wenn $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{B} \notin \mathcal{K}$, aber Duplikatorin gewinnt $G_m(\mathcal{A}_m, \mathcal{B}_m)$, dann ist $\mathcal{K}$ nicht FO-axiomatisierbar.

Kapitel 5: Vollständigkeit und Kompaktheit

Sequenz,Korrektheit analog zu AL
Inkonsistenz: jeder Satz kann abgeleitet werden

Regeln des FO-Sequenzenkalküls

$(=)\dfrac{\Gamma, t = t \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(S \Rightarrow)\dfrac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow S)\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$

$(\neg \Rightarrow)\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow \neg)\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta\neg\psi}$

$(\vee \Rightarrow)\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \vartheta \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow \vee)\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta\psi \vee \vartheta}$

$(\wedge \Rightarrow)\dfrac{\Gamma, \psi, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \wedge \vartheta \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow \wedge)\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta}$

$(\to\Rightarrow)\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \to \vartheta \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow\to)\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta\psi \to \vartheta}$

$(\exists \Rightarrow)\dfrac{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\psi(x) \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow \exists)\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\psi(x)}$
wenn c nicht in Γ, Δ und $\psi(x)$

$(\forall \Rightarrow)\dfrac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\psi(x) \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow \forall)\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\psi(x)}$
wenn c nicht in Γ, Δ und $\psi(x)$

Korrektheitssatz für SK: siehe AL
Ableitbarkeit: Ein Satz ψ ist ableitbar aus $\Phi(\Phi \vdash \psi)$ gdw. endliches $\Gamma \subseteq \Phi$ existiert mit $\Gamma \Rightarrow \psi$ in SK ableitbar.

Vollständigkeitssatz: (1) $\Phi \models \psi \Leftrightarrow \Phi \vdash \psi$ (2) Φ erfüllbar gdw. Φ konsistent
Ordnet dem syntaktischen den entsprechenden semantischen Begriff zu. Beweisidee zu (1) $\Rightarrow$ klar, $\Leftarrow$ mit Kontraposition und unter Voraussetzung eines Modells $\mathcal{A} \models \Phi \cup \{\neg\psi\}$
Herbrandstruktur $\mathcal{H}(\Sigma)$ zur Modellkonstruktion für atomare Formeln
Σ ist abgeschlossen unter Substitution, wenn (1) $t = t \in \Sigma$ und (2) wenn $t = t', \psi(t) \in \Sigma$, dann auch $\psi(t')$
Hintikka
Satz(Löwenheim,Skolem): Jede erfüllbare, abzählbare Satzmenge hat ein abzählbares Modell.

Kompaktheitssatz:
(1) $\Phi \models \psi$ gdw. endl. Teilmenge Φ_0 existiert, so daß $\Phi_0 \models \psi$
(2) Φ ist erfüllbar gdw. jede endl. Teilmenge von Φ ist erfüllbar.
Beweisidee: zweimaliges Anwenden des Vollständigkeitssatzes, Definition der Ableitbarkeit.

Sei $\Phi \subseteq FO(\tau)$ eine Satzmenge mit beliebig großen endl. Modellen (d.h für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Modell $\mathcal{A} \models \Phi$ mit endl. $\mathcal{A}$ und $\mid \mathcal{A} \mid > n$). Dann hat Φ auch ein unendliches Modell.

Die Klasse aller endl. τ-Strukturen ist nicht FO-axiomatisierbar (endl. Gruppen,Graphen,Körper).

Aufsteigender Satz (L-S): Φ besitze ein unendliches Modell. Dann gibt es zu jeder Menge M ein Modell $\mathcal{D} \models \Phi$ über dem Universum D welches mindestens so mächtig wie M ist.