Scheinklausur zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. W. Plesken **(SS05)**

Name	Vorname	Matrikelnummer	Studienfach	Fachsemester
....	....	....	....	.....

A1		A2		A3		A4		A5	
A6		A7		A8		A9			
A10		A11		A12		A13		$\sum$	

Informationen Die erste Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra II besteht, wer mindestens 28 der zu erreichenden 61 Punkte erhält. Einen Übungsschein in Linearer Algebra II bekommt, wer mindestens 50% der Übungsaufgaben sinnvoll bearbeitet hat, und diese Klausur oder die Nachholklausur am Anfang des nächsten Semesters besteht.

Bearbeitungszeit: 150 Minuten.

Die Ergebnisse dieser Klausur und die Einsichttermine werden spätestens am Donnerstag, den 21.07.2005 ausschließlich durch Veröffentlichung auf den Internetseiten des Lehrstuhls B bekannt gegeben.

Bitte beachten Sie, daß Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden. Die Begründungen haben einen wesentlichen Einfluß auf die Bewertung der einzelnen Aufgaben.

Hilfsmittel sind nicht zugelassen! Das B-Team wünscht Ihnen viel Erfolg!

Aufgabe 1. (8 Punkte) Bestimme die JORDAN-Normalform einer Matrix $A \in K^{3\times 3}$ mit $\mu_{\widetilde{A}} = x^3 - 2 \in K[x]$ für $K \in \{\mathbb{F}_3, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Aufgabe 2. (1+1+3 Punkte) Betrachte die folgenden affinen Unterräume von $\mathcal{A}_4(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &:= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_a, \\ \mathcal{A}_2 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R}) | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, x_1 - x_2 - x_3 = -1 \right\}. \end{aligned}$$

Bestimme $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}_1)$, $\mathrm{Dim}(\mathcal{A}_2)$ und $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.

Aufgabe 3. (4 Punkte) Sei $\tilde{\mathcal{V}}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über $K := \mathbb{F}_3$ mit Basis B. Betrachte den projektiven Raum $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{V}})$ und $P_1 := K^*(B_1 + B_2 + B_3)$, $P_2 := K^*(B_1 + B_2 + 2B_4)$, $P_3 := K^*(2B_1 + 2B_2 + B_3 + 2B_4)$, $P_4 := K^*(B_3 + B_4)$. Berechne das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Aufgabe 4. (5 Punkte) Sei $\mathcal{V} = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Bestimme alle $f \in \mathcal{V}$ mit $f''' = -3f'' + 4f$.

Aufgabe 5. (4 Punkte) Seien $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ endlich erzeugte $\mathbb{F}_3$-Vektorräume mit Basen B und C. Bestimme den Tensorrang von $X := B_1 \otimes (2C_1 + C_2 + C_4) + B_2 \otimes (C_1 + C_2 + C_3) + (B_3 + B_4) \otimes (2C_2 + C_3 + C_4) \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$.

Aufgabe 6. (4 Punkte) Sei

$$N := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}.$$

Bestimme Matrizen $L, P, U \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ mit $LPU = N$, dabei ist L eine untere Dreiecksmatrix, P eine Permutationsmatrix und U eine obere Dreiecksmatrix.

Aufgabe 7. (1+1+3 Punkte) Sei $\mathcal{E} := \mathcal{E}_3$ der 3-dimensionale EUKLIDische affine Raum mit dem Standardskalarprodukt. Seien G und H die folgenden affinen Unterräume von $\mathcal{E}$ mit

$$H := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} | x_1 + x_2 + x_3 = 1\},\ G := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_a.$$

Berechne $\operatorname{Dim} H$, $\operatorname{Dim} G$ und $d(H, G)$.

Aufgabe 8. (3+1 Punkte) Sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2(\mathbb{Q})$ der 2-dimensionale affine Raum über $\mathbb{Q}$, und $N := \operatorname{Null}(2\,xy^2 + x^2 + 4\,xy - 3\,y^2 - 6\,y - 2)$. Bestimme die Tangentengleichungen an N im Punkt $P := (1, -1, 1)^{\mathrm{tr}} \in N$. Ist der Punkt $P \in N$ regulär?

Aufgabe 9. (5 Punkte) Bestimme die affine Normalform der reellen Quadrik in $\mathcal{A}_3(\mathbb{Q})$, die durch die Nullstellenmenge des Polynoms $p = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_3^2 - x_1 + x_3 + 2$ gegeben ist.

Aufgabe 10. (4 Punkte) Beweise: In einer projektiven Ebene über dem Körper K, schneiden sich zwei verschiedene Geraden in genau einem Punkt.

Aufgabe 11. (5 Punkte) Sei G eine Gruppe, die auf der Menge M operiert. Weiter sei $m \in M$, und $S := \operatorname{Stab}_G(m)$. Zeige: Die Bahnen von G auf $Gm \times M$ bei der üblichen diagonalen Operation stehen in Bijektion zu den Bahnen von S auf M.

Aufgabe 12. (4 Punkte) Bestimme das Minimalpolynom von $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, wobei $\otimes$ das KRONECKER-Produkt von Matrizen ist.

Aufgabe 13. (4 Punkte) Sei $\mathcal{V}$ ein 4-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit Basis B und $\mathcal{U}$ ein 2-dimensionaler Teilraum. Nach Definition werden die PLÜCKER-Koordinaten von $\mathcal{U}$ beschrieben durch homogene Koordinaten im 5-dimensionalen projektiven Raum: $(a_{1,2} : a_{1,3} : a_{1,4} : a_{2,3} : a_{2,4} : a_{3,4})$. Genauer:

$$\mathcal{U} = \langle \sum a_i B_i, \sum b_j B_j \rangle \mapsto ((a_1 b_2 - a_2 b_1) : \ldots : (a_3 b_4 - a_4 b_3)).$$

Bestimme den 2-dimensionalen Teilraum $\mathcal{U}$ des 4-dimensionalen Vektorraumes $\mathcal{V}$ mit den PLÜCKER-Koordinaten

$$(a_{1,2} : a_{1,3} : a_{1,4} : a_{2,3} : a_{2,4} : a_{3,4}) = (2 : 6 : 4 : 2 : 8 : 20)$$

bezüglich der Basis B.