1. Gruppenübung zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. W. Plesken **(SS01)**

Aufgabe 1. Sei $(\mathfrak{V}, \Phi)$ ein unitärer Vektorraum mit Basis B, und es gelte

$$ {}_B\Phi^B = \begin{pmatrix} 4 & -2i-1 & -i+1 \\ 2i-1 & 2 & i \\ i+1 & -i & 1 \end{pmatrix}. $$

Bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{V}$. Zeige, daß φ mit

$$ {}^B\varphi^B = \begin{pmatrix} -i+1 & i & -1 \\ -2i-2 & 4 & 2i \\ -2 & 2i+1 & i+1 \end{pmatrix} $$

selbstadjungiert ist.

Aufabe 2. Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Welche der beiden folgenden Matrizen sind diagonalisierbar über K?

$$ A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in K^{3\times 3},\ B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in K^{3\times 3}. $$

Aufgabe 3. Sei $(\mathfrak{V}, \Phi)$ n-dimensionaler unitärer Raum mit Basis $B = (B_1, \dots, B_n)$. $\mathfrak{V}_{|\mathbb{R}}$ sei wie in der Vorlesung der $\mathbb{R}$-Vektorraum der durch die Einschränkung der Skalare von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{R}$ entsteht. Zeige:

1. $\mathfrak{V}_{|\mathbb{R}}$ ist ein $2n$-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B_{\mathbb{R}} = (B_1, iB_1, \dots, B_n, iB_n)$.

2. $\Phi_{\mathbb{R}} := \mathfrak{Re} \circ \Phi$ ist ein inneres Produkt auf $\mathfrak{V}_{\mathbb{R}}$, d. h. ist $\mathbb{R}$-linear, symmetrisch und positiv definit.

3. Zeige die erste Behauptung von Satz 1.8, d.h. für $V, W \in \mathfrak{V}$ gilt $\Phi(V,V)\Phi(W,W) - |\Phi(V,W)|^2 \geq 0$. Hinweis: betrachten Sie die Grammatrix für (V, W) und deren Determinante.

4. Wann gilt in 3.) die Gleichheit?

Aufgabe 4. Sei $(\mathfrak{V}, \Phi)$ ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum der Dimension $n > 1$. Sei $S^{n-1} := \{V \in \mathfrak{V} | \Phi(V,V) = 1\}$.

1. Zeige: S^{n-1} ist eine Bahn unter $\mathrm{U}(\mathfrak{V}, \Phi) := \{\varphi \in \mathrm{End}(\mathfrak{V}) | \varphi \text{ ist unitär } \}$, also der unitären Gruppe.

2. Offenbar operiert $\mathrm{U}(\mathfrak{V}, \Phi)$ dann auch auf $S^{n-1} \times S^{n-1}$ durch $(g, (V, W)) \mapsto (gV, gW)$. Zeige: $\angle(V, W)$ ist eine Invariante dieser Operation, die nicht trennend ist.

3. Zeige: $(V, W) \mapsto \Phi(V, W)$ ist eine trennende Invariante der Operation aus 2.).

Abgabe: Montag, 30.4.2001, in der Übung

Literatur zur Vorlesung

- Paul A. Fuhrmann: *A polynomial approach to linear algebra*, Springer
- Gerd Fischer: *Lineare Algebra*, Vieweg (1. Semester)
- Gerd Fischer: *Analytische Geometrie*, Vieweg
- Falko Lorenz: *Lineare Algebra I, II*, BI Wissenschaftsverlag
- Jänich: *Lineare Algebra*, Springer 2000 (1. Aufl. 1979) (1. Semester)
- Serge Lang: *Linear Algebra*, Springer (ursprünglich bei Addison Wesley 1966?)
- Peter Gabriel: *Matrizen, Geometrie, lineare Algebra*, Birkhäuser 1996
- Michael Artin: *Algebra*, Birkhäuser 1998.
- Egbert Brieskorn: *Lineare Algebra und anlytische Geometrie I,II*, Vieweg 1985
- Koecher, M.: *Lineare Algebra und analytische Geometrie*, 1985, 286 S., Springer
- Satake, I.: *Linear algebra*, 1975, 375 S., Marcel Dekker
- Berger, M.: *Geometry I* 1987, 427 S., Universitext
- Berger, M.: *Geometry II* 1987, 405 S., Universitext
- Stammbach, U.: *Lineare Algebra*, 1983, 256 S., Teubner (1. Semester)
- Brandl, R.: *Vorlesungen ueber Analytische Geometrie*, 1996, 404 S., Brandl
- Greub, W.: *Linear Algebra*, Springer GTM 23, 1974

2. Gruppenübung zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. W. Plesken **(SS01)**

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Jordannormalform J der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 4},\ B := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 4},$$

$$C := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in K^{4\times 4},\ K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}.$$

Geben Sie für A auch ein X an mit $X^{-1}AX = J$.

Aufgabe 2. Beweisen Sie die folgende Bemerkung aus dem Beweis von Satz 1.14 aus der Vorlesung: Sei $\mathfrak{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum, $\alpha \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})$ mit $\chi_\alpha(x) = \mu_\alpha(x)$, dann gibt es ein $V \in \mathfrak{V}$ mit $\mu_{\alpha,V}(x) = \mu_\alpha(x)$.

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum, und $\alpha \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})$. Zeigen Sie

1. $C_{\mathrm{End}(\mathfrak{V})}(\alpha)$ ist der Kern der linearen Abbildung $\mathrm{End}(\mathfrak{V}) \to \mathrm{End}(\mathfrak{V}) : \gamma \mapsto \gamma\circ\alpha - \alpha\circ\gamma$.
2. $C_{\mathrm{End}(\mathfrak{V})}(\alpha)$ ist ein Teilring von $\mathrm{End}(\mathfrak{V})$, d. h. ist unter Multiplikation abgeschloßen, und $\alpha \in C_{\mathrm{End}(V)}(\alpha)$
3. Sei $\mu_\alpha(x) = p_1 \cdot p_2$ mit normierten Polynomen p_i, und $\mathrm{ggT}(p_1, p_2) = 1$. Setze $\mathfrak{V}_i := \mathrm{Kern}\, p_i(\alpha)$. Dann ist $C_{\mathrm{End}(\mathfrak{V})}(\alpha) \cong C_{\mathrm{End}(\mathfrak{V}_1)}(\alpha_{|\mathfrak{V}_1}) \oplus C_{\mathrm{End}(\mathfrak{V}_2)}(\alpha_{|\mathfrak{V}_2})$
4. Ist $\mu_\alpha(x) = \chi_\alpha(x)$, so ist $C_{\mathrm{End}(\mathfrak{V})}(\alpha) \cong K[x]/\mu_\alpha(x)$.
5. Wann ist $C_{\mathrm{End}(\mathfrak{V})}(\alpha)$ ein Körper?

Aufabe 4. Bestimmen Sie Vertreter X_i der Ähnlichkeitsklassen in $\mathbb{F}_2^{4\times 4}$. Geben Sie $C_{\mathbb{F}_2^{4\times 4}}(X_i)$ an für jedes X_i. Hinweis: es gibt in $\mathbb{F}_2[x]$ genau 1, 2, bzw. 3 irreduzibele, normierte Polynome vom Grad 2, 3, bzw. 4.

Abgabe: Montag, 07.05.2001, in der Übung

3. Gruppenübung zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. W. Plesken **(SS01)**

Aufgabe 1.

1. Betrachten Sie die Differentialgleichung $y'' + \mu y' + \frac{c}{m} y = 0$. Welche Lösungen hat diese Differentialgleichung in Abhängigkeit von den Parametern μ und $\frac{c}{m}$? Welcher Fall ist besonders? Wie zeichnet er sich algebraisch aus?

2. Lösen Sie die Differentialgleichung $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y^{(1)} - y = 0$.

3. Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

   mit $f_i \in C^\infty(\mathbb{C})$.

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Betrachte das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

mit $f_i \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{C})$. Zeige: Das System ist äquivalent zu r gewöhnlichen Differentialgleichungen für nur eine unabhängige Funktion, wobei r die Anzahl der Jordanblöcke von A ist. Was ist die Ordnung dieser r Differentialgleichungen? Zeige: Ist $\mu_{\overline{A}} = \chi_{\overline{A}}$, so ist das System äquivalent zu einer Gleichung.

Aufgabe 3. Sei $S_n := \{\nu \in \underline{n}^{\underline{n}} | \nu \text{ bijektiv }\}$. S_n ist nach Vorlesung eine Gruppe. Zeige, daß die folgenden Abbildungen Operationen der S_n induzieren, und bestimme die Bahnen und den Stabilisator eines Elementes jeder Bahn.

1. $S_n \times \underline{n} \to \underline{n} : (\nu, i) \mapsto \nu(i)$.

2. $S_n \times \mathrm{Pot}(\underline{n}) \to \mathrm{Pot}(\underline{n}) : (\nu, X) \mapsto \nu(X)$.

3. Sei $\mathrm{Part}(\underline{n}) := \{\{X_1, \ldots, X_r\} : X_i \cap X_j = \emptyset \text{ für } X_i \neq X_j, \text{ und } \cup_{i \in \underline{r}} X_i = \underline{n}\} \subseteq \mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\underline{n}))$ die Menge der Partitionen von $\underline{n}$. Die Operation sei gegeben durch $S_n \times \mathrm{Part}(\underline{n}) \to \mathrm{Part}(\underline{n}) : (\nu, \{X_1, \ldots, X_r\}) \mapsto \{\nu(X_1), \ldots, \nu(X_r)\}$.

Aufabe 4. (Zusammenhang Differenzengleichungen und Differentialgleichungen) Sei K ein algebraisch abgeschloßener Körper mit $n \cdot 1 \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\mathfrak{V} = K[[x]]$ der Ring der Potenzreihen über K. Definiere die zwei linearen Abbildungen $\alpha : K[[x]] \to K[[x]] : \sum a_i x^i \to \sum a_{i+1} x^i$ (Schiebeoperator) und $\partial : K[[x]] \to K[[x]] : \sum a_i x^i \to \sum a_{i+1}(i+1)x^i$. Zeige: Es gibt einen Isomorphismus $\tau : K[[x]] \to K[[x]]$ mit $\tau \alpha \tau^{-1} = \partial$. Hinweis: Betrachten Sie die Basen $B := (1, x, x^2, \ldots)$ und $C = (0!, 1! \cdot x, 2! \cdot x^2, \ldots)$ von $K[[x]]$.

Abgabe: Montag, 14.05.2001, in der Übung

4. Gruppenübung zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. W. Plesken **(SS01)**

Aufgabe 1 Sei $\mathfrak{V}$ ein endlich dimensionaler K-Vektorraum mit Basen C und D mit

$$ {}^{C}\mathrm{id}^{D} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4\times 4},\ {}^{C}\mathrm{id}^{D} := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}. $$

Bestimme jeweils eine Basis B von $\mathfrak{V}$ und eine Permutation σ mit $F(B) = F(C) = F(D \circ \sigma)$.

Aufgabe 2

1. Sei $(\mathfrak{V}, \Phi)$ ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Zeige: $\mathrm{O}(\mathfrak{V}, \Phi)$ operiert transitiv auf der Menge der Fahnen von $\mathfrak{V}$. Ist F Fahne in $\mathfrak{V}$, so gilt $|\mathrm{Stab}_{\mathrm{O}(\mathfrak{V},\Phi)}(F)| = 2^n$.
2. Sei K algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathfrak{V}$ ein Vektorraum über K. Zeige: Für jedes $g \in \mathrm{GL}(\mathfrak{V})$ gibt es ein Fahne F mit $gF = F$. Warum braucht man die Voraussetzung an K?

Aufgabe 3 Sei $\mathfrak{V}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$. Zeige: $\mathrm{GL}(\mathfrak{V})$ operiert auf $\mathrm{Sesq}_+(\mathfrak{V})$ durch $(g, \Phi) \mapsto \Phi_g$ **$\mathbb{R}$-linear**, wobei $\Phi_g(V, W) := \Phi(gV, gW)$. Bestimme eine trennende Invariante für diese Operation.

Aufgabe 4 Sei $\mathfrak{V}$ ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, und setze $U_k(\mathfrak{V}) := \{\mathfrak{U} \leq \mathfrak{V} | \mathrm{Dim}\,\mathfrak{U} = k\}$.

1. Zeige : $\mathrm{GL}(\mathfrak{V})$ operiert transitiv auf $U_k(\mathfrak{V})$ durch $(g, \mathfrak{U}) \mapsto g(\mathfrak{U})$.
2. Somit operiert $\mathrm{GL}(\mathfrak{V})$ auch auf $U_k(\mathfrak{V}) \times U_k(\mathfrak{V})$. Zeige, daß $d : U_k(\mathfrak{V}) \times U_k(\mathfrak{V}) \to \mathbb{N} \cup \{0\} : (\mathfrak{U}, \mathfrak{W}) \mapsto k - \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{U} \cap \mathfrak{W})$ trennende Invariante für diese Operation ist.
3. Sei $\mathfrak{U} \in U_k(\mathfrak{V})$, und setze $H := \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}(\mathfrak{V})}(\mathfrak{U})$. Zeige: $d : U_k(\mathfrak{V}) \to \mathbb{N} \cup \{0\} : \mathfrak{W} \mapsto k - \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{U} \cap \mathfrak{W})$ ist trennende Invariante für die Operation von H auf $U_k(\mathfrak{V})$.
4. Zeige: d aus 2. erfüllt die Dreiecksungleichung, d. h. $d(\mathfrak{U}, \mathfrak{W}) \leq d(\mathfrak{U}, \mathcal{X}) + d(\mathcal{X}, \mathfrak{W})$ für alle $\mathcal{X}$ in $U_k(\mathfrak{V})$. Hinweis: Zeige zunächst, daß dies äquivalent ist zu $\mathrm{Dim}\,\mathfrak{U} \cap \mathcal{X} + \mathrm{Dim}\,\mathfrak{W} \cap \mathcal{X} \leq k + \mathrm{Dim}\,\mathfrak{U} \cap \mathfrak{W}$.

Abgabe: Montag, 21.05.2001, in der Übung

5. Gruppenübung zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. W. Plesken **(SS01)**

Aufgabe 1 Sei K ein Körper und $P \in K^{n\times n}$ die Permutationsmatrix mit $P_{ij} = \delta_{i,n-j+1}$. Zeige: P vertauscht durch Konjugieren die Untergruppen $\Delta^o(n,K)$ und $\Delta^u(n,K)$.

Aufgabe 2 Sei G eine **abelsche** Gruppe, die treu und transitiv auf der Menge M operiert. Zeige: $G \to M : g \mapsto gm$ ist bijektiv für jedes $m \in M$. Zeige weiter: Die Voraussetzung an G ist notwendig.

Aufgabe 3 Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum mit affinen Teilräumen $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$. Zeige: Ist $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'' \neq \emptyset$, so ist $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$ ein affiner Teilraum von $\mathcal{A}$. Definieren Sie ausgehend von dieser Tatsache das affine Erzeugnis von $M \subseteq \mathcal{A}$. Beschreiben Sie das affine Erzeugnis einer zweielementigen Teilmenge von $\mathcal{A}$.

Aufgabe 4 Sei $\tilde{\mathfrak{V}}$ ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und $0 \neq \varphi \in \tilde{\mathfrak{V}}^*$. Zeige:

1. $\mathcal{A}_\varphi := \varphi^{-1}(1)$ ist affiner Raum bezüglich des Translationsraumes $\mathfrak{T}(\mathcal{A}_\varphi) := \operatorname{Kern}\varphi$.
2. Für $\alpha \in \mathrm{GL}(\tilde{\mathfrak{V}})$ mit $\varphi \circ \alpha = \varphi$ ist $\alpha_{|\mathcal{A}_\varphi}$ eine affine Abbildung.
3. Ist $f : \mathcal{A}_\varphi \to \mathcal{A}_\varphi$ eine affine Abbildung, so gibt es genau eine lineare Abbildung $\alpha \in \mathrm{GL}(\tilde{\mathfrak{V}})$ mit $\alpha_{|\mathcal{A}_\varphi} = f$ und $\varphi \circ \alpha = \varphi$.

Betrachten Sie nun das Maus-Beispiel aus dem 1. Semester (I.29). Sei also $\tilde{\mathfrak{V}} = \mathbb{R}^{4\times 1}$, und betrachte die lineare Abbildung $\alpha = \overline{A}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Sei nun $\varphi : \tilde{\mathfrak{V}} \to \mathbb{R} : V \mapsto (1,1,1,1)V$. Zeige: $\alpha_{|\mathcal{A}_\varphi}$ ist affine Abbildung. Bestimmen Sie einen Fixpunkt von $\alpha_{|\mathcal{A}_\varphi}$ auf dem Simplex $S := \{ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_\varphi | p_i \geq 0\}$.

Abgabe: Montag, 28.05.2001, in der Übung

6. Gruppenübung zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. W. Plesken **(SS01)**

Aufgabe 1

1. Sei $\mathcal{A}$ ein 2-dimensionaler affiner Raum über dem Körper K. Formuliere und beweise den Strahlensatz.

2. Betrachte die folgenden affinen Unterräume von $\mathcal{A}_4(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{A}_1 := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_a, \quad \mathcal{A}_2 := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_a$$

$$\mathcal{A}_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R}) | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, x_1 - x_2 + x_3 = 2 \right\}$$

Bestimmen Sie die affine Dimension der $\mathcal{A}_i$. Welche der Räume sind (schwach) parallel oder windschief?

Aufgabe 2 Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ affine Räume über dem Körper K, und $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ eine affine Abbildung. Weiter seien $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$ affine Teilräume von $\mathcal{A}_1$. Zeige:

1. Sind $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}''$ (schwach) parallel, so sind auch $\varphi(\mathcal{A}')$ und $\varphi(\mathcal{A}'')$ (schwach) parallel.

2. Ist φ injektiv, und sind $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{A}''$ windschief, so gilt dies auch für $\varphi(\mathcal{A}')$ und $\varphi(\mathcal{A}'')$.

Aufgabe 3 Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über dem Körper K. Eine affine Abbildung φ heißt **Streckung** genau dann, wenn es ein $a \in K$ und ein $P_0 \in \mathcal{A}$ gibt mit $\varphi(P) = P_0 + a\overrightarrow{P_0P}$ für alle $P \in \mathcal{A}$. a heißt der Streckungsfaktor, und P_0 das Streckzentrum von φ. Zeige:

1. Zu der Streckung $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ ist der Streckungsfaktor a eindeutig. Ist $\varphi \neq \mathrm{id}$, so ist auch das Streckzentrum P_0 eindeutig.

2. Zwei Streckungen sind in $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ genau dann konjugiert, wenn sie denselben Streckungsfaktor haben.

3. Ist $\mathrm{id} \neq \varphi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ eine Streckung, und τ eine Translation, so sind $\varphi \circ \tau$ und $\tau \circ \varphi$ wieder Streckungen. Weiter ist $S := \{\varphi | \varphi \text{ ist Streckung oder Translation}\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$.

4. S operiert transitiv auf $\mathcal{A}$, und berechnen Sie den Stabilisator eines Punktes $P \in \mathcal{A}$. Geben Sie eine trennende Invariante für die Operation von S auf $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ an.

5. S ist isomorph zu der Gruppe

$$S' := \left\{ \begin{pmatrix} a \cdot I_n & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | a \in K^*,\ t \in K^{n \times 1} \right\} \leq \mathrm{GL}_{n+1}(K),$$

genauer: Die Operation von S auf $\mathcal{A}$ ist ähnlich zur Operation von S' auf $\mathcal{A}_n(K)$.

Aufgabe 4 Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum der Dimension n über dem Körper K. Zeige: $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ operiert transitiv auf der Menge der Fahnen von $\mathcal{A}$, und bestimme den Stabilisator einer Fahne.
Hinweis: zeige zunächst, daß $F = (\{P_1\}, \langle P_1, P_2\rangle_a, \ldots, \mathcal{A})$ eine Fahne in $\mathcal{A}$, so ist die Operation von $\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aff}\,\mathcal{A}}(P_1)$ ähnlich zu der Operation von $\mathrm{GL}(\mathfrak{T}(\mathcal{A}))$ auf $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$.
Benutze diese Begriffsbildungen, um zu zeigen, daß in der Operation von $\mathrm{Aff}_3(\mathbb{R})$ auf $\mathrm{Pot}(\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$ der Stabilisator des Würfels $W := \{\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 + e_4\} \subseteq \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ Ordnung 48 hat.

Abgabe: Montag, 11.06.2001, in der Übung

7. Gruppenübung zur Linearen Algebra II

Prof. Dr. W. Plesken **(SS01)**

Aufgabe 1 Sei K ein Körper, und $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über K. Weiter sei $\kappa : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_n(K) : P \mapsto (X_1(P), \ldots, X_n(P), 1)^{tr}$ ein Koordinatensystem. Zeige: Es gibt genau einen Ringhomomorphismus

$$\epsilon : K[x_1, \ldots, x_n] \to K^{\mathcal{A}} : x_i \mapsto X_i.$$

Weiter ist ϵ genau dann injektiv, wenn K unendlich viele Elemente hat. (Hinweis: betrachten Sie zunächst den Fall, daß $\mathcal{A}$ eindimensional über K ist.)
Weiter: Eine affine Abbildung $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_n(K)$ kann als n-Tupel von linearen Polynomfunktionen aufgefaßt werden.

Aufgabe 2

1. Sei $\mathcal{A}$ ein n-dimensionaler affiner Raum über dem Körper K, κ ein Koordinatensystem von $\mathcal{A}$. Zeige: Für $p_1, p_2 \in K[x_1, \ldots, x_n]$ gilt $\mathrm{Null}(p_1) \cup \mathrm{Null}(p_2) = \mathrm{Null}(p_1 p_2)$.

2. Bestimme die Bahnen von $\mathrm{Aff}(2, \mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}[x_1, x_2]_{\mathrm{Grad} \leq 2}$. Deuten Sie die Nullstellenmengen geometrisch. Was passiert, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt?

Aufgabe 3[Bemerkung 2.33] Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum der Dimension n über dem unendlichen Körper K mit Koordinatensystem $\kappa : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}_n(K) : P \mapsto (X_1(P), \ldots, X_n(P), 1)^{tr}$. Sei $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$ vom Grad d, und $P \in \mathrm{Null}(p)$. Setze $y_i := x_i - X_i(P)$. Zeige:

1. p läßt sich schreiben als $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_d$, wobei die $p_i \in K[y_1, \ldots, y_n]$ homogen vom Grad i sind, dh. Linearkombinationen $c_a \cdot y^a$ mit $a \in Z^n_{\geq 0}$ mit $a_1 + \cdots + a_n = i$ und $c_a \in K$ sind.

2. Ist $p_1 \neq 0$, dann sind die Tangenten an $\mathrm{Null}(p)$ in P gerade die Geraden G durch P mit $G \subseteq \mathrm{Null}(p_1)$.

3. Sei nun $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$. Bestimme die Tangenten an $\mathrm{Null}(x^4 y + x^3 y + y + xy + x)$ in $(0, 0, 1)^{tr}$ und $\mathrm{Null}(x^2 + xy + y^2 - 3)$ in jedem Punkt P der Nullstellenmenge.

Aufgabe 4 Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum über dem unendlichen Körper K, κ ein Koordinatensystem von $\mathcal{A}$, und $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$ mit $\langle \mathrm{Null}(p) \rangle_a = \mathcal{A}$. Zeige: $H = \{g \in \mathrm{Aff}(n, K) | gp \in K^* p\}$ operiert auf $\kappa(\mathrm{Null}(p))$ ähnlich zu der Operation einer Untergruppe $H' \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{Null}(p))$ auf $\mathrm{Null}(p)$.

Abgabe: Montag, 18.06.2001, in der Übung