Lineare Algebra I für Informatiker
Gedächtnisprotokoll der 1. Klausur SS2021

Disclaimer: Dieses Gedächtnisprotokoll ist ausschließlich anhand meiner Erinnerungen und Notizen entstanden und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Die ersten 6 Aufgaben sind Rechenaufgaben. Bitte schreiben Sie Ihre Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse bei diesen Aufgaben nicht zu begründen. Es gibt für Ansätze und Begründungen auch keine Punkte.

Aufgabe 1. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Betrachten Sie den Vektorraum-Homomorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ X \mapsto AX^{tr} - XA$$

Sei $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(a) Geben Sie die Abbildungsmatrix bezüglich $\mathcal{B}$ an. (3 Punkte)

(b) Geben Sie eine Basis von Kern(φ) an. (2 Punkte)

(c) Geben Sie eine Basis von Bild(φ) an. (2 Punkte)

(d) Bestimmen Sie den Rang von φ. (1 Punkt)

Aufgabe 2. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n \in \mathbb{Q}$ sei definiert durch die lineare Rekursionsgleichung

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

für alle $n \geq 2$, und durch die Anfangsglieder

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1$$

Geben Sie das charakteristische Polynom der Rekursionsgleichung an. (2 Punkte)

Berechnen Sie mit Methoden der linearen Algebra eine geschlossene Formel für die Folgenglieder a_n. (6 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3\times 3}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A. (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A. (1 Punkt)

(c) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A eine Basis des Eigenraums an. (2 Punkte)

(d) Was sind die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A? (1 Punkt)

(e) Ist A diagonalisierbar? (1 Punkt)

(f) Was ist der Rang von A? (1 Punkt)

Aufgabe 4.

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Berechnen Sie die QR-Zerlegung von A. (2+2 Punkte)

(b) Sei $u = (1,1,1,1,1,0,0,0,0,0)^{tr} \in \mathbb{R}^{10}$ und $U := \langle u \rangle$.
Berechnen Sie für $v = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)^{tr} \in \mathbb{R}^{10}$ die Projektion auf den Unterraum $U^{\perp}$. (4 Punkte)

Aufgabe 5. Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie die Singulärwerte von A. (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Singulärwerte von B. (3 Punkte)

(c) Sind A und B äquivalent? (1 Punkt)

(d) Sind A und B orthogonal äquivalent? (1 Punkt)

Aufgabe 6. Sei $C \leq \mathbb{F}_2^7$ der Code mit der Kontrollmatrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3\times 7}$.

(a) Geben Sie eine Basis von C an. (2 Punkte)

(b) Was ist die Minimaldistanz von C? (2 Punkte)

(c) Geben Sie den dekodierten Vektor zu $(1,0,1,1,1,0,1)^{tr} \in \mathbb{F}_2^7$ an. (2 Punkte)

(d) Welche Syndrome haben einen Nebenklassenanführer vom Gewicht 1? (2 Punkte)

In den folgenden schriftlichen Aufgaben müssen Sie alle Ihre Aussagen begründen. Sollte ein Beweis aus der Vorlesung gefragt sein, genügt es nicht, auf die Vorlesung zu verweisen. Sie müssen diesen oder einen anderen Beweis wiederholen.
Erinnerung: *Die natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ *enthalten nach der Konvention dieser Vorlesung nicht die* 0.

Aufgabe 7. Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ mit $A^2 = 0$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Rang}(A) \leq n/2$ ist. (8 Punkte)

Aufgabe 8. Sei V ein Vektorraum über einen Körper K. Seien φ und ψ zwei Endomorphismen von V für die gilt: $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.
Zeigen Sie, dass jeder Eigenraum von φ ein ψ-invarianter Unterraum von V ist. (8 Punkte)

Aufgabe 9. Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ mit $A^n = 0$ und $A^j \neq 0$ für alle $j < n$. Zeigen Sie, dass A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Hauptdiagonalen ist. Zeigen Sie weiter, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn $n = 1$ ist. (6+2 Punkte)

Aufgabe 10. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir definieren die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathbb{R}^{n\times 1} \times \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R} \text{ durch } \langle v, w \rangle := v^{tr} G w.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung bilinear ist. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ genau dann symmetrisch ist, wenn $G = G^{tr}$ gilt. (3 Punkte)

(c) Sei G symmetrisch und seien die Diagonaleinträge von G alle positiv. Zeigen oder widerlegen Sie, dass dann die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit ist. (3 Punkte)