Lineare Algebra für Informatiker SS 19 (Gedächtnisprotokoll)

Erstterminklausur zur Vorlesung von Prof. Dr. G. Hiß;

(Disclaimer: Diese Klausur ist komplett
aus meinen handschriftlichen Notizen rekonstruiert worden.
Falls jemand die originalen Werte kennt,
würde ich mich über Hilfe sehr freuen!)

Zuletzt geändert am:

September 10, 2019

1. Aufgabe 1):

   Sei A $\in \mathbb{Q}^{4\times4}$ mit A $= \begin{pmatrix} 1 & -6 & -30 & 12 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ(A).

   b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

   c) Geben Sie für jeden Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums an.

   d) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten.

2. Aufgabe 2.)

   Berechnen Sie eine geschlossene Darstellung für die folgende Rekursionsgleichung mit den Anfangswerten $a_0 = 1$ und $a_1 = 1$.

   $$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \tag{1}$$

3. Aufgabe 3.)

   Sei V = R^3 ein euklidischer Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt. Seien v,w $\in R^3$ mit v $= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, w $= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. (Die originalen Werte weichen hier wahrscheinlich ab.)

   a) Berechnen Sie $\|v\|$ und $\|w\|$.

   b) Bestimmmen Sie $\cos\alpha$.

c) Sei nun { $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ } eine Basis von V.

Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von V.

d) Sei U ein Untervektorraum von V mit der Basis { $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ }. (Die originalen Werte weichen hier wahrscheinlich ab.)

Bestimmen Sie eine Basis des orthogonalen Komplements von U.

4. Aufgabe 4.)

   Sei A $= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir betrachten den Vektorraumhomomorphismus

   $\phi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $X \mapsto AXA$.

   Sei s = { $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ } die Standardbasis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

   a) Geben Sie die Abbildungsmatrix von ϕ bezüglich s an.

   b) Geben Sie eine Basis von Kern(ϕ) an.

   c) Geben Sie eine Basis von Bild(ϕ) an.

   d) Bestimmen Sie den Rang von ϕ.

5. Aufgabe 5.)

   Sei $A_a = \begin{pmatrix} (-1+a) & 0 & (1-a) \\ (-a^2+a) & (a+1) & (a^2-a) \\ (-a+1) & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

   a) Für welche Werte a $\in \mathbb{R}$ ist A_a invertierbar?

   b) Für welche Werte a $\in \mathbb{Z}$ ist A_a invertierbar?

6. Aufgabe 6.)

   a) Zeigen Sie, dass AA^T symmetrisch ist.

   b) Zeigen Sie, dass AA^* hermitesch ist.

7. Aufgabe 7.)

   a) Seien die Matrizen A und B ähnlich zueinander. Beweisen Sie, dass A und B dasselbe charakteristische Polynom haben.

   b) Seien die Matrizen A und B äquivalent zueinander. Zeigen Sie, dass A und B im Allgemeinen nicht dasselbe charakteristische Polynom haben.

8. Aufgabe 8.)

   Seien ϕ und ψ (nicht notwendigerweise endliche) Endomorphismen in V.

   Es gelte weiterhin $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$.

   Beweisen Sie, dass die Eigenräume von ϕ unter ψ invariant sind.

9. Aufgabe 9.) Gegeben sei ein euklidischer Vektorraum mit beliebiger Bilinearform.

   a) Zeigen Sie, dass die Polarisationsformel gilt.

   b) Zeigen Sie, dass die umgekehrte Dreiecksungleichung gilt.

   c) Beweisen Sie: $\|v+w\| = \|v-w\|$ genau dann, wenn v und w orthogonal zueinander sind. (Die originale Teilaufgabe weicht von dieser ab.)