Sebastian Thomas
Modul BSInf-231/10

RWTH Aachen, SS 2015
27.07.2015

Lineare Algebra für Informatiker

Abschlussklausur

Name:

Matrikelnummer:

Bitte beachten Sie die auf der Rückseite dieses Blattes angegebenen Regeln und Hinweise. Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie deren Kenntnisnahme.

Unterschrift:

Für die Aufgaben 1 bis 4 sind keine Begründungen nötig. Für Begründungen und Ansätze gibt es keine Punkte. Unter den Aufgaben sowie auf den Rückseiten befindet sich Raum für Notizen, welche nicht bewertet werden.

Bei den Aufgaben 5 bis 9 sind sämtliche Schritte ausreichend zu begründen. Bei Aufgabe 5 tragen Sie die Begründungen in die dafür vorgesehen Kästchen ein. Für die Aufgaben 6 bis 9 gilt: Beginnen Sie die Bearbeitung unterhalb des Aufgabentexts und setzen Sie diese bei Bedarf auf der Rückseite und den Folgeseiten fort. Das Vorhandensein einer Folgeseite bedeutet nicht zwingend, dass eine solche erforderlich ist. Am Ende des Klausurbogens befinden sich weitere Blankoseiten.

Aufgabe	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl	Prozent
1	6		—
2	4		—
3	4		—
4	5		—
5	4		—
6	8		—
7	6		—
8	13		—
9	10		—
Σ	60		
Bonus	390		
Gesamt	—	—	
Note	—	—	

Hinweise zur Durchführung der Klausur.

- Sofern Sie bisher noch an keiner Abschlussprüfung in diesem Modul teilgenommen haben, müssen Sie zur Teilnahme an dieser Klausur vorab eine Zulassung erworben haben. Ferner müssen Sie sich je nach Studiengang gegebenenfalls bei dem für Sie zuständigen Prüfungsamt zu dieser Klausur angemeldet haben. Ihre Teilnahme an dieser Klausur erfolgt vorbehaltlich einer gültigen Zulassung und Anmeldung.
- Tragen Sie bitte auf jedes bearbeitete Blatt Ihren Namen in Blockbuchstaben sowie Ihre Matrikelnummer ein. Blätter ohne Namen können *nicht* korrigiert werden.
- Die Klausur besteht aus 9 Aufgaben auf 12 durchnummerierten Blättern und einem unnummerierten Deckblatt. Bitte prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplars.
- Bitte halten Sie Ihre RWTH BlueCard zur Kontrolle bereit.
- Bitte schalten Sie Mobilfunkgeräte vor Beginn der Klausur aus und verstauen Sie diese in Ihren Taschen.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Es darf nur mit einem blauen oder schwarzen Stift geschrieben werden (auf keinen Fall mit rot, grün oder Bleistift). Es darf kein Tipp-Ex benutzt werden.
- Zur Bearbeitung sind keine Hilfsmittel wie Skripte, Bücher, Notizen, Taschenrechner, etc. erlaubt.
- Die Heftklammern der Klausur dürfen nicht gelöst werden.
- Täuschungsversuche führen zum Nichtbestehen der Klausur.
- Sollte der unterhalb eines Aufgabentextes zur Verfügung stehende Platz (inklusive Rückseiten) nicht zur Bearbeitung ausreichen, verwenden Sie bitte die Blankoseiten am Ende der Klausur. Machen Sie in diesem Fall bitte einen Vermerk über die Fortsetzung der Aufgabe. Sollte das zur Verfügung gestellte Papier danach nicht ausreichen, melden Sie sich bitte per Handzeichen. Es darf kein eigenes Papier verwendet werden.
- Bei manchen Rechenaufgaben bietet es sich an, eine Probe zu machen.
- Wenn Sie während der Bearbeitungszeit auf Toilette müssen, kommen Sie bitte mit Ihrer Klausur und Ihrer RWTH BlueCard zu den Aufsichtspersonen. Es darf stets nur eine Person gleichzeitig die Toilette aufsuchen.
- Bitte reden Sie während der Klausur nicht laut. Bei Unklarheiten geben Sie bitte Handzeichen, eine Aufsichtsperson kommt dann an Ihren Platz.
- Sie dürfen die Bearbeitung Ihrer Klausur vor Ablauf der Bearbeitungszeit beenden und den Hörsaal vorzeitig verlassen – mit folgenden Einschränkungen: Bleiben Sie bitte zum einen mindestens 15 Minuten. Zum anderen sollten Sie 15 Minuten vor Ablauf der Bearbeitungszeit bitte bis zum Ende bleiben, um Unruhe zu vermeiden.
- Bitte entsorgen Sie nach der Klausur den eigenen Müll.

Bearbeiten Sie die folgenden vier Aufgaben und schreiben Sie Ihre Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie müssen Ihre Entscheidungen nicht begründen. Für Begründungen und Ansätze gibt es keine Punkte.

1 Es seien $A \in \mathbb{Q}^{4\times 2}$, $B \in \mathbb{Q}^{3\times 4}$, $C \in \mathbb{Q}^{2\times 4}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wie in der Vorlesung bezeichne $\varphi_B \colon \mathbb{Q}^{4\times 1} \to \mathbb{Q}^{3\times 1}$, $x \mapsto Bx$ die Spalteninterpretation von B. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, sofern sie existieren; andernfalls schreiben Sie „ex. nicht“ ins Antwortfeld. (*6 Punkte*)

Basis von $\operatorname{Im} \varphi_B$:		Basis von $\operatorname{Ker} \varphi_C$:	
$(AA^{\mathrm{tr}})^{-1} =$		$\operatorname{rk}_{\mathbb{Q}} A =$	
$\det(CA) =$		$\det((CA)^{-1}) =$	

Punkte: /6

(Raum für Notizen)

2 Es sei $B \in \mathbb{F}_2^{3\times 7}$ gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und es sei C der lineare Code über $\mathbb{F}_2$ mit der Kontrollmatrix B. Ferner seien $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F}_2^{7\times 1}$ gegeben durch

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie in folgender Tabelle die Anführer für alle Syndrome bzgl. B, welche einen eindeutigen Anführer haben, und markieren Sie die übrigen Zellen mit einem X. Entscheiden Sie für $i \in \{1, 2, 3\}$ jeweils, ob x_i eindeutig zu einem Codewort von C dekodiert werden kann und bestimmen Sie ggf. dieses Codewort. (*4 Punkte*)

Syndrom	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Anführer								

☐ x_1 wird dekodiert zu:	☐ x_2 wird dekodiert zu:	☐ x_3 wird dekodiert zu:
☐ x_1 lässt sich nicht dekodieren	☐ x_2 lässt sich nicht dekodieren	☐ x_3 lässt sich nicht dekodieren

Punkte: /4

(Raum für Notizen)

3 Für $c \in \mathbb{Z}$ sei $A_c \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$ gegeben durch

$$A_c = \begin{pmatrix} -9 & 6 & -4 \\ -3 & c+1 & -3 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die folgenden Mengen. (*4 Punkte*)

$\{c \in \mathbb{Z} \mid A_c \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})\} =$

$\{c \in \mathbb{Z} \mid A_c \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})\} =$

Punkte: /4

(Raum für Notizen)

4 Es sei $(D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6)$ in $[1, 4]$ gegeben durch

$$D_1 = (4, 1, 2, 1, 3, 2), \quad D_2 = (2, 3, 3, 1, 2), \quad D_3 = (1, 3, 4, 4, 3, 3, 1),$$
$$D_4 = (1, 1, 2, 3, 1), \quad D_5 = (4, 2, 3, 1), \quad D_6 = (2, 3, 4, 2, 4, 3).$$

Bestimmen Sie die Term-Dokument-Matrix A' von $(D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6)$, die normierte Term-Dokument-Matrix A von $(D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6)$ sowie

$$J := \{j \in [1, 6] \mid D_j \text{ passt am Besten zur Suchanfrage } \{1, 4\}\}.$$

(*5 Punkte*)

$A' =$

$J =$

$A =$

Punkte: /5

(Raum für Notizen)

Kreuzen Sie in folgender Aufgabe bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ an und geben Sie eine *kurze* Begründung zu Ihrer Antwort. Pro Frage gibt es 1 Punkt, sofern das Kreuz richtig gesetzt ist und die Begründung richtig ist. Alle anderen Fälle (falsches oder fehlendes Kreuz oder falsche/unzureichende oder fehlende Begründung) ergeben 0 Punkte.

5	Gibt es einen injektiven $\mathbb{F}_4$-Vektorraumhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{F}_4^3 \to \mathbb{F}_4^5$ mit $\operatorname{rk}_{\mathbb{F}_4} \varphi = 4$?	☐ Ja ☐ Nein
	Begründung.	
	Gibt es genau einen $\mathbb{Q}$-Vektorraumendomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ mit $\varphi(1,1,0,0) = (1,1,1,1)$ und $\varphi(0,0,2,2) = (2,2,2,2)$?	☐ Ja ☐ Nein
	Begründung.	
	Wird $\mathbb{R}^{2\times 1}$ zu einem euklidischen Vektorraum mit Skalarprodukt gegeben durch $\langle x, y\rangle = x_1y_2 - y_1x_2$ für $x, y \in \mathbb{R}^{2\times 1}$?	☐ Ja ☐ Nein
	Begründung.	
	Sind für alle $a, b \in \mathbb{C}$ die (1×1)-Matrizen $\big(a\big)$ und $\big(b\big)$ stets äquivalent?	☐ Ja ☐ Nein
	Begründung.	

Punkte: /4

(Raum für Notizen)

Bearbeiten Sie die folgenden vier Aufgaben jeweils unterhalb des Aufgabentexts. Setzen Sie Ihre Bearbeitung bei Bedarf auf der Rückseite und den Folgeseiten fort.

6 Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{Q}[X]_{<3} \to \mathbb{Q}[X]_{<4},\ f \mapsto Xf$$

und es sei $s := (1, X, X^2)$ und $t := (1, X, X^2, X^3)$.

(a) Zeigen Sie, dass φ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraumhomomorphismus ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von φ zu den Basen s und t.

(c) Bestimmen Sie eine Basis s' von $\mathbb{Q}[X]_{<3}$ und eine Basis t' von $\mathbb{Q}[X]_{<4}$ so, dass die Darstellungsmatrix von φ zu den Basen s' und t' eine Quasieinheitsmatrix ist.

(d) Bestimmen Sie den Defekt und den Rang von φ. *(8 Punkte)*

Punkte: /8

7	Es seien ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V und eine Basis (s_1, s_2, s_3, s_4) von V gegeben. Ferner sei (t_1, t_2, t_3) in V gegeben durch $t_1 = 2s_1 + s_3,$ $t_2 = s_1 + 2s_2 - s_3 - s_4,$ $t_3 = -s_2 + s_3 + s_4.$ Zeigen oder widerlegen Sie: (a) Das Tripel (t_1, t_2, t_3) ist linear unabhängig in V. (b) Das Tripel (t_1, t_2, t_3) ist ein Erzeugendensystem von V. (*6 Punkte*)

Punkte: /6

8	Es sei $A \in \mathbb{F}_5^{4\times 4}$ gegeben durch $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$ (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A. (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A. (c) Bestimmen Sie Basen der Eigenräume von A. (d) Untersuchen Sie, ob A diagonalisierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls ein $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{F}_5)$ so, dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist. Verwenden Sie für Ihre Endergebnisse Repräsentanten im Intervall $[-2, 2]$. *(13 Punkte)*

Punkte: ____ /13

(Fortsetzung von Aufgabe 8)

9	Es seien ein Körper K und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$ gibt. Nun sei ein $A \in K^{n \times n}$ gegeben. Zeigen Sie: (a) Wenn A nilpotent ist, dann ist $\det A = 0$. (b) Wenn A nilpotent ist, so ist 0 ein Eigenwert von A. (c) Wenn $\chi_A = X^n$ ist, dann ist A nilpotent. (*10 Punkte*)

Punkte: /10

(Zusätzlicher Raum für Aufgaben, sofern benötigt. Bitte geben Sie die Aufgabennummer an.)

(Zusätzlicher Raum für Aufgaben, sofern benötigt. Bitte geben Sie die Aufgabennummer an.)