Lineare Algebra I für Mathematiker Lösungen

Anonymous

24. April 2016

Aufgabe 1

Beantworten Sie bitte die folgenden Fragen.

- Jeder Vektorraum hat mindestens ein Element.

  Solution: Ja

- $\mathbb{Q}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (mit der Multiplikation in $\mathbb{R}$ als skalarer Multiplikation).

  Solution: Nein

- Es gibt einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum, der nur endlich viele Elemente hat.

  Solution: Ja

- Die Losungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems uber einem Korper K ist ein K-Vektorraum.

  Solution: Ja

- Jeder vom Nullvektorraum verschiedene $\mathbb{Q}$-Vektorraum hat unendlich viele Elemente.

  Solution: Ja

Aufgabe 2

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der jeweils angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume?

- $U := \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist monoton wachsend} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

  Solution: Nein

- $U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 4} \mid a_{11} + a_{12} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 4}$

  Solution: Ja

- $U := \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = f(1)\right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Solution: Ja

- $U := \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) < 0 \text{ fur alle } x \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Solution: Nein

- $U := \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4\times 3} \mid a_{11} \cdot a_{22} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{4\times 3}$

Solution: Nein

Aufgabe 3

Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Weiter sei V ein beliebiger Vektorraum, $M \subseteq V$ und $v \in V$.

- Ist $V = \langle v \rangle$, so ist auch $V = \langle w \rangle$ für jedes $w \in V$.

Solution: Nein

- Das Element v_3 liegt in $\langle v_1 \rangle$.

Solution: Ja

- Jedes Element aus $\mathbb{R}^2$ liegt im Erzeugnis von v_1 und v_3.

Solution: Nein

- Der Nullvektorraum wird von keiner Menge erzeugt.

Solution: Nein

- Wenn V von M erzeugt wird und $v \in M$ ist, so wird V auch von $M \setminus \{v\}$ erzeugt.

Solution: Nein

Aufgabe 4

Es seien A und B Matrizen über einem Körper K, so dass $A \cdot B$ definiert ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Es gilt $A^t \cdot B = (B^t \cdot A)^t$, falls die linke Seite definiert ist.

Solution: Ja

- Sind A und B in $GL_n(K)$, dann gilt $(A^t \cdot B^t) \cdot (A^{-1} \cdot B^{-1})^t \cdot B = B$.

Solution: Ja

- Die Spalten von $A \cdot B$ sind Linearkombinationen der Spalten von A.

Solution: Ja

- Die Zeilen von $A \cdot B$ sind Linearkombinationen der Zeilen von B.

Solution: Ja

- Jede Zeile von $A \cdot B$ liegt im Zeilenraum von B.

Solution: Ja

Aufgabe 7

Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebene Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W linear ist.

- $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $W := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi : f \mapsto f - f$

Solution: Ja

- $K := \mathbb{F}_2$, $V := \mathbb{F}_2$, $W := \mathbb{F}_2$, $\varphi : x \mapsto x^3$

Solution: Ja

- $K := \mathbb{Q}$, $V := \mathbb{Q}$, $W := \mathbb{Q}$, $\varphi : x \mapsto 3x$

Solution: Ja

- $K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{1\times 2}$, $W := \mathbb{R}$, $\varphi : (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$

Solution: Nein

- $K := \mathbb{R}$, $V := K^{2\times 3}$, $W := K^{1\times 3}$, $\varphi : M \mapsto (1, 2) \cdot M$

Solution: Ja

Aufgabe 8

Sei K ein Körper, V, W zwei K-Vektorräume und $M, M_1, M_2 \subseteq V$.

- Sei $V = \langle M \rangle$ und $\varphi : V \to W$ linear. Wenn für alle $m \in M$ gilt $\varphi(m) \neq 0$, dann ist $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}$.

Solution: Nein

- Für die von M_1 und M_2 erzeugten Unterräume gilt: $\langle M_1 \cap M_2 \rangle \subseteq \langle M_1 \rangle \cap \langle M_2 \rangle$.

Solution: Ja

- Ist $V = \langle M \rangle$ und $\varphi : V \to W$ linear, dann gilt $\mathrm{Bild}(\varphi) = \langle \varphi(M) \rangle$.

Solution: Ja

- Für die von M_1 und M_2 erzeugten Unterräume gilt: $\langle M_1 \rangle + \langle M_2 \rangle = \langle M_1 \cup M_2 \rangle$.

Solution: Ja

- Sei $V = \langle M \rangle$ und $\varphi : V \to W$ linear. Wenn jedes $w \in W$ im Erzeugnis $\langle \varphi(M) \rangle$ liegt, dann ist φ surjektiv.

  Solution: Ja

Aufgabe 9

Es seien K ein Körper und $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V und W. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Kern $(\psi \circ \varphi) =$ Bild $(\varphi \circ \psi)$

  Solution: Nein

- Kern $\varphi \subseteq$ Kern $(\psi \circ \varphi)$

  Solution: Ja

- Bild $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild φ

  Solution: Nein

- Bild $(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild ψ

  Solution: Ja

- Kern $\psi \subseteq$ Kern $(\psi \circ \varphi)$

  Solution: Nein

Aufgabe 10

Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

- Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linear mit $\varphi(v_2) = 6$ und $\varphi(v_3) = -3$. Was ist $\varphi(v_4)$?

  Solution: 15

- Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(v_1) = 1$, $\varphi(v_2) = 5$ und $\varphi(v_3) = -6$?

  Solution: Ja

- Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(v_2) = v_4$ und $\varphi(v_3) = v_4$?

  Solution: Ja

- Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linear mit $\varphi(v_1) = -2$ und $\varphi(v_2) = 5$. Was ist $\varphi(v_2 + v_3 + v_4)$?

  Solution: 14

- Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(v_2) = 1$, $\varphi(v_3) = 3$ und $\varphi(v_1) = 2$?

  Solution: Nein

Aufgabe 13

Seien V ein K-Vektorraum, $v, v' \in V$, $U \leq V$ ein Unterraum und $\pi : V \to V/U$ die kanonische Abbildung auf den Faktorraum.

- π ist genau dann surjektiv, wenn $U = V$ ist.

  Solution: Nein

- π ist genau dann injektiv, wenn $\pi(V) = V/U$ ist.

  Solution: Nein

- Die Elemente $v + U, v' + U \in V/U$ sind genau dann gleich, wenn v und v' in U liegen.

  Solution: Nein

- Ist $W \leq V/U$, so gilt $\pi^{-1}(W) \subseteq U$.

  Solution: Nein

- Sei $c \in K \setminus \{1\}$. Genau dann ist $(v + v') + U = c(v + U) + (v' + U)$ in V/U, wenn $v \in U$ ist.

  Solution: Ja

Aufgabe 14

Seien V und W Vektorräume, $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und $U, U' \leq V$.

- φ ist genau dann surjektiv, wenn $W/\text{Bild}(\varphi)$ der Nullraum ist.

  Solution: Ja

- Wenn $U \subseteq \text{Kern}(\varphi)$ ist, dann gilt $\varphi(U' + U) \cong U'/(U' \cap U)$.

  Solution: Nein

- Es gilt $W/\text{Bild}(\varphi) \cong V/\text{Kern}(\varphi)$.

  Solution: Nein

- Sei $U \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)$ und sei φ surjektiv. Dann gilt $W \cong (V/U)/(\mathrm{Kern}(\varphi)/U)$.

  Solution: Ja

- Wenn $V \cong \mathrm{Bild}(\varphi)$ gilt, dann ist φ injektiv.

  Solution: Nein

Aufgabe 15

Sei V ein endlich-erzeugter Vektorraum und $X \subseteq Y \subseteq V$. Dann gilt:

- Wenn X eine Basis von $\langle X \rangle$ ist, so gibt es eine Teilmenge $Y' \subseteq Y$ mit $X \subseteq Y'$, die eine Basis von $\langle Y \rangle$ ist.

  Solution: Ja

- Ist Y linear unabhängig, so ist auch X linear unabhängig.

  Solution: Ja

- Wird V von X erzeugt, so wird V auch von Y erzeugt.

  Solution: Ja

- Ist X eine Basis von V, so ist auch Y eine Basis von V.

  Solution: Nein

- Ist Y linear abhängig, so ist auch X linear abhängig.

  Solution: Nein

Aufgabe 16

Sind die folgenden Teilmengen der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorraume linear unabhangig?

- $\{(0,0,0),(1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^{1\times 3}$

  Solution: Nein

- $\{x \mapsto \sin(3x), x \mapsto \sin(5x), x \mapsto \sin(7x)\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$

  Solution: Ja

- $\{(2,2,2),(1,1,0),(0,0,3)\} \subseteq \mathbb{R}^{1\times 3}$

  Solution: Nein

- $\{g\} \cup \{f_i \mid\ i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, wobei $g(n) = 1$ fur alle $n \in \mathbb{N}$, $f_i(i) = 1$ fur $i \in \mathbb{N}$ und $f_i(n) = 0$ fur $i, n \in \mathbb{N}$, $i \neq n$.

  Solution: Ja

- $\{1, \sqrt{2}\} \subseteq \mathbb{R}$

  Solution: Nein

Aufgabe 20

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und seien $M \subseteq N \subseteq V$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Wenn N eine Basis von V ist, dann ist M ein Erzeugendensystem.

  Solution: Nein

- Wenn N eine Basis von V ist und M ist linear unabhängig, dann ist auch M eine Basis von V.

  Solution: Nein

- Jedes Erzeugendensystem von V ist in einer Basis enthalten.

  Solution: Nein

- Wenn M ein Erzeugendensystem von V ist, dann gibt es eine Basis, die M enthält.

  Solution: Nein

- Eine Basis von V ist eine minimale linear unabhängige Teilmenge.

  Solution: Nein

Aufgabe 21

Es sei K ein Korper. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Gibt es eine injektive, lineare Abbildung $\varphi : K^{2\times 3} \to K^{2\times 2}$?

  Solution: Nein

- Es sei $V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^{1\times n} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\} \subseteq K^{1\times n}$. Gibt es eine surjektive, lineare Abbildung $\varphi : V \to K^{n-1}$?

  Solution: Ja

- Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{1\times 3} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$ mit $\varphi(1, -1, 0) = (1, 2)$ und $\varphi(0, 1, -1) = (0, 1)$ und $\varphi(1, 0, -1) = (1, 1)$?

  Solution: Nein

- Es sei $\varphi : K^3 \to K^2$ ein Epimorphismus. Gibt es eine lineare Abbildung $\psi : K^2 \to K^3$, so dass $\psi \circ \varphi$ ein Isomorphismus ist?

  Solution: Nein

- Gibt es eine Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_3 \to \mathbb{F}_3$, die nicht $\mathbb{F}_3$-linear ist?

Solution: Ja

Aufgabe 22

Es seien K ein Korper, V und W endlich-erzeugte Vektorraume uber K und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. In dieser Aufgabe steht das Wort 'Basis' immer fur 'geordnete Basis'. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Wenn φ injektiv ist, dann ist $\dim V \leq \dim W$.

Solution: Ja

- Ist (b_1, b_2, b_3) eine Basis von V und φ surjektiv, dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2), \varphi(b_3))$ eine Basis von W.

Solution: Nein

- Sind b_1 und b_2 in V und ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear unabhangig, dann ist (b_1, b_2) linear unabhangig.

Solution: Ja

- Wenn es eine Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V gibt, so dass $(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n))$ eine Basis von W ist, dann ist φ ein Isomorphismus.

Solution: Ja

- Sind b_1 und b_2 in V und ist (b_1, b_2) linear unabhangig und φ surjektiv, dann ist $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ linear unabhangig.

Solution: Nein

Aufgabe 23

Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^{1\times 3}$ mit $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (0, -3, 1)$ und $v_3 = (1, 1, -1)$. Weiter seien die folgenden funf Vektoren aus $\mathbb{R}^{1\times 3}$ gegeben. $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (0, 1, 0)$, $w_3 = (0, 0, 1)$, $w_4 = (2, 1, -1)$ und $w_5 = (-1, 1, 1)$. Mit $\kappa_{\mathcal{B}}(w_i)$ sei der Koordinatenvektor von w_i bezuglich der Basis $\mathcal{B}$ bezeichnet, $i = 1, \ldots, 5$.

- Der dritte Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_4)$ lautet

Solution: 0

- Der zweite Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_1)$ lautet

Solution: -1

- Der zweite Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_2)$ lautet

  Solution: -1

- Der dritte Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_5)$ lautet

  Solution: -3

- Der zweite Eintrag von $\kappa_{\mathcal{B}}(w_3)$ lautet

  Solution: -2

Aufgabe 26

Es sei K ein Körper, $A \in K^{m\times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $b \in K^m$. Sind die folgenden Aussagen über das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ richtig?

- Falls $m = n$ ist und A nicht invertierbar ist, dann ist $Ax = c$ für alle $c \in K^m$ unlösbar.

  Solution: Nein

- Für $0 \neq c \in K^m$ gibt es eine Bijektion zwischen der Lösungsmenge von $Ax = b$ und der von $Ax = c$.

  Solution: Nein

- Falls $m = n$ ist und es ein $c \in K^m$ gibt, so dass $Ax = c$ eine eindeutige Lösung hat, dann hat $Ax = b$ auch eine eindeutige Lösung.

  Solution: Ja

- $Ax = b$ ist genau dann unlösbar, wenn $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A, b) - 1$ ist.

  Solution: Ja

- Für $c = 0$ und $n > m$ hat $Ax = c$ mindestens $n - m$ Lösungen.

  Solution: Ja

Aufgabe 27

Es seien die folgenden Matrizen über einem Körper K gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -39 \\ 2 & -5 & 1 & -8 \\ -3 & 5 & -5 & -32 \end{pmatrix}$$

(Falls $K = \mathbb{F}_2$ oder $K = \mathbb{F}_3$ ist, betrachten Sie die Matrizen modulo 2 bzw. 3.)

- Es sei $K = \mathbb{F}_3$. Bestimmen Sie den Rang von B.

Solution: 2

- Es sei $K = \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie die Dimension des Lösungsraums des homogenen Systems mit Koeffizientenmatrix $BA + C$.

Solution: 1

- Es sei $K = \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie den Rang von B.

Solution: 2

- Es sei $K = \mathbb{F}_2$. Bestimmen Sie den Rang von $AC^t + B^t$.

Solution: 2

- Es sei $K = \mathbb{F}_3$. Wieviele Lösungen besitzt ein lineares Gleichungssytem mit Koeffizientenmatrix BC^t, wenn es lösbar ist?

Solution: 3

Aufgabe 28

Alle vorkommenden Matrizen haben Einträge in einem Körper K. Beachten Sie, dass eine invertierbare Matrix stets quadratisch ist. Stimmen die folgenden Aussagen?

- Ist das Produkt zweier quadratischer Matrizen eine Einheitsmatrix, so ist mindestens einer der Faktoren invertierbar.

Solution: Ja

- Hat ein homogenes lineares Gleichungssystem genau eine Lösung, so ist die Koeffizientenmatrix invertierbar.

Solution: Nein

- Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie vollen Rang hat.

Solution: Ja

- Ist A eine quadratische Matrix und A^n invertierbar für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist auch A invertierbar.

Solution: Ja

- Sind A und B Matrizen und sind AB und BA invertierbar, dann ist auch A invertierbar.

Solution: Ja

Aufgabe 29

Alle vorkommenden Matrizen haben Einträge in einem Körper K. Eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ hat vollen Rang, wenn $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{Min}\{m, n\}$ ist. Sind die folgenden Aussagen wahr?

- Eine Matrix ohne Nullzeilen hat vollen Rang.

  Solution: Nein

- Hat $A \in K^{m\times n}$ den Rang n, dann existiert ein $B \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $AB = E_n$.

  Solution: Nein

- Hat das Produkt zweier Matrizen nicht vollen Rang, so haben auch beide Faktoren nicht vollen Rang.

  Solution: Nein

- Für $0 \neq c \in K$ und eine Matrix A haben A und $c \cdot A$ den gleichen Rang.

  Solution: Ja

- Eine $n \times n$-Matrix mit vollem Rang läßt sich durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen in die Einheitsmatrix überführen.

  Solution: Ja

Aufgabe 33

Es sei $V := \mathbb{Q}^{2\times 3}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der 2×3-Matrizen, $W := \mathbb{Q}^{2\times 2}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen und $\varphi : V \to W$ die folgende $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung:

$$\varphi : V \longrightarrow W \quad , \quad M \longmapsto M \cdot A \quad , \quad \text{wobei } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 2}.$$

Weiter seien die geordneten Basen

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

von V und

$$\mathcal{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right)$$

von W gewählt. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ von φ bezüglich dieser beiden Basen und geben Sie die verlangten Einträge an.

- Der Eintrag in der 4. Zeile und der 5. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet

Solution: -2

- Der Eintrag in der 4. Zeile und der 2. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet

Solution: -2

- Der Eintrag in der 2. Zeile und der 2. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet

Solution: 0

- Der Eintrag in der 2. Zeile und der 5. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet

Solution: -2

- Der Eintrag in der 4. Zeile und der 6. Spalte von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ lautet

Solution: -3

Aufgabe 34

Es seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiter sei $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} := (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W und $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ die Matrix von φ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

- Ist $\mathcal{C}' = (w_2, w_1, w_3, \ldots, w_m)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die ersten beiden Zeilen vertauscht.

Solution: Ja

- Ist $\mathcal{C}' = (w_1 + w_2, w_2, w_3, \ldots, w_m)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die zweite Zeile zur ersten addiert.

Solution: Nein

- Ist $\mathcal{B}' = (v_2, v_1, v_3, \ldots, v_n)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die ersten beiden Spalten vertauscht.

Solution: Ja

- Ist $\mathcal{B}' = (v_1, v_2 - v_1, v_3, \ldots, v_n)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man die erste Spalte von der zweiten subtrahiert.

Solution: Ja

- Ist $\mathcal{B}' = (v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1)$, dann erhält man $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}'}(\varphi)$ aus $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$, indem man dieselben Zeilen in umgekehrter Reihenfolge schreibt.

Solution: Nein

Aufgabe 35

Seien V und W Vektorräume über einem Körper K und $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geordnete Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ geordnete Basen von W. Sind die folgenden Aussagen richtig?

- Jede Basiswechselmatrix von W ist quadratisch und invertierbar.

Solution: Ja

- Jede Matrix $T \in K^{n\times n}$ ist Basiswechselmatrix von V.

Solution: Nein

- Es gilt $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}}(\varphi) = M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_W) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}'}(\varphi) M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$.

Solution: Ja

- Es gibt eine Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, so dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\psi) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(\psi)$ ist.

Solution: Ja

- Falls alle Einträge der Basiswechselmatrix von V zu den Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ entweder 0 oder 1 sind, so bestehen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ aus der gleichen Menge von Vektoren.

Solution: Nein

Aufgabe 39

Seien

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 5 & 11 & 18 & 26 \\ 9 & 19 & 30 & 42 \\ 13 & 27 & 42 & 58 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Sei $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ die geordnete Basis von $\mathbb{R}^4$, die aus den Spalten von C besteht, und sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$. Der Endomorphismus $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ bilde v_i auf die i-te Spalte von M ab, $1 \leq i \leq 4$. Geben Sie die folgenden Einträge der zugehörigen Abbildungsmatrizen an:

- Eintrag $(4, 3)$ von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\psi)$.

Solution: 15

- Eintrag $(3, 2)$ von $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\psi)$.

Solution: -8

- Eintrag $(3,4)$ von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)$.

Solution: 12

- Eintrag $(4,3)$ von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\psi)$.

Solution: 42

- Eintrag $(3,2)$ von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\psi)$.

Solution: 10

Aufgabe 40

Berechnen Sie das Signum der folgenden Permutationen aus der symmetrischen Gruppe S_{12}.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 6 & 10 & 3 & 12 & 4 & 5 & 2 & 9 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Solution: -1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 11 & 8 & 5 & 12 & 3 & 6 & 1 & 7 & 9 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Solution: +1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 10 & 2 & 3 & 11 & 12 & 8 & 6 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

Solution: -1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 11 & 9 & 1 & 10 & 8 & 2 & 12 & 7 \end{pmatrix}$

Solution: +1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 2 & 4 & 10 & 7 & 1 & 3 & 8 & 12 & 9 & 11 & 6 \end{pmatrix}$

Solution: +1

Aufgabe 41

Es sei σ die folgende Permutation von 9 Punkten: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.
In den folgenden Fragen ist jeweils ein Produkt von Transpositionen angegeben, wobei an einer Stelle die Variable i anstelle einer der Ziffern von 1 bis 9 steht. Tragen Sie in das Antwortfeld die Ziffer ein, die man für i einsetzen muss, damit das Produkt gleich σ ist.

- $(1\ 2)\ (1\ 3)\ (2\ 5)\ (i\ 8)\ (8\ 7)\ (7\ 6)\ (3\ 6)$

Solution: 9

- $(9\ 8)\ (2\ 5)\ (3\ 8)\ (1\ 8)\ (8\ 7)\ (5\ 7)\ (6\ i)$

Solution: 7

- $(1\ 2)\ (i\ 7)\ (2\ 5)\ (1\ 6)\ (1\ 7)\ (3\ 9)\ (8\ 9)$

Solution: 3

- $(i\ 5)\ (1\ 5)\ (9\ 8)\ (3\ 8)\ (6\ 2)\ (8\ 7)\ (2\ 4)\ (7\ 4)\ (1\ 4)$

Solution: 4

- $(5\ 7)\ (2\ 7)\ (6\ 7)\ (i\ 8)\ (8\ 5)\ (1\ 3)\ (3\ 9)$

Solution: 1

Aufgabe 42

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{F}_{11} = \{0, 1, \ldots, 10\}$. (Die Elemente von $\mathbb{F}_{11}$ werden also durch ihre kleinsten nicht-negativen Restklassenvertreter beschrieben.)

- $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 10 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Solution: 0

- $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

Solution: 7

- $\begin{pmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x+3 \end{pmatrix}$ für ein $x \in \mathbb{F}_{11}$

Solution: 9

- $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 8 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Solution: 4

- $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solution: 6

Aufgabe 45

Es sei K ein Körper und $M, N \in K^{n\times n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Die Einträge der Matrix M seien mit $m_{i,j}$ für $(1 \leq i, j \leq n)$ bezeichnet. Sind die folgenden Aussagen über Determinanten richtig?

- Enthält M nur die Zahlen 0 und 1, dann ist die Determinante von M in der Menge $\{0, 1, -1\}$.

  Solution: Nein

- Ist $m_{i,j} = 0$ für $i + j \leq n$, dann ist $\det M = \prod_{i=1}^{n} m_{i,n+1-i}$.

  Solution: Nein

- Ist ein Diagonaleintrag von M gleich 0, dann ist die Determinante von M auch gleich 0.

  Solution: Nein

- Es gilt $(\det M) + (\det \mathrm{N}) = \det(M + N)$.

  Solution: Nein

- Sind zwei Zeilen von N gleich, so ist $\det N = 0$.

  Solution: Ja

Aufgabe 46

Sei $A = (a_{i,j}) \in K^{n\times n}$ eine Matrix über dem Körper K.

- Wenn in jeder Zeile und Spalte von A genau ein Eintrag ungleich 0 ist, dann gilt $\det(A) = 0$.

  Solution: Nein

- Sei $c \in K$ und $1 \leq i \leq n$. Entsteht $A' \in K^{n\times n}$ aus A, indem zu jeder Zeile von A das c-fache der i-ten Zeile von A addiert wird, so gilt: $\det(A') = (1 + c)\det(A)$.

  Solution: Ja

- Entsteht $A' \in K^{n\times n}$ aus A, indem die erste Zeile von A gestrichen und unten angehängt wird, so ist $\det(A') = (-1)^{n+1}\det(A)$.

  Solution: Ja

- Sei $K = \mathbb{R}$ und seien alle Einträge a_{ij} von A größer als 0, dann gilt $\det(A) \geq 0$.

  Solution: Nein

- Sei $K = \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{R}$ mit $|a_{ij}| \leq m$ für alle $1 \leq i, j \leq n$. Dann gilt $|\det(A)| \leq m^n$.

Solution: Nein

Aufgabe 47

Es sei R ein kommutativer Ring, n eine natürliche Zahl und E_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix über R. Für $A \in R^{n\times n}$ sei $\tilde{A}$ die zu A komplementäre Matrix. Sind die folgenden Aussagen richtig?

- Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit $\det A = -6$. Dann existiert $B \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mit $AB = E_n$ und $6B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$.

Solution: Ja

- Ist $A \in R^{n\times n}$ invertierbar, dann ist $\det \tilde{A} = \det A$.

Solution: Nein

- Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det A = 1$ ist.

Solution: Nein

- Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit $\det A \neq 0$. Dann existiert $B \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mit $AB = E_n$.

Solution: Ja

- Eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\tilde{A}A \neq 0$ ist.

Solution: Ja

Aufgabe 51

Berechnen Sie jeweils für das angegebene Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ und die Matrix $M \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die Matrix $f(M)$ und geben Sie den geforderten Eintrag an.

- Was ist für $f = X^{10} - X$ und $M = \begin{pmatrix} 2 & 17 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ der $(2,2)$-Eintrag von $f(M)$?

Solution: 2

- Was ist für $f = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$, $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ der $(2,2)$-Eintrag von $f(M)$?

Solution: 40

- Was ist für $f = X^2 - 3X + 2$ und $M = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ der $(1,2)$-Eintrag von $f(M)$?

Solution: 49

- Was ist für $f = X \cdot (X-2)^2$ und $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ der $(1,2)$-Eintrag von $f(M)$?

Solution: 34

- Was ist für $f = X^3 - 2X^2 - 14X + 3$, $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ der $(1,2)$-Eintrag von $f(M)$?

Solution: 0

Aufgabe 52

Es sei K ein Korper, und $K[X]$ der Ring der Polynome uber K in der Unbestimmten X. Sind die folgenden Aussagen richtig?

- Die Einheiten von $K[X]$ sind genau die von 0 verschiedenen Polynome vom Grad 0.

Solution: Ja

- Ein Polynom aus $K[X]$ vom Grad 0 ist irreduzibel.

Solution: Nein

- Es ist $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ fur alle $0 \neq f, g \in K[X]$.

Solution: Ja

- Es seien $f, g \in K[X]$ mit f irreduzibel und $f \nmid g$. Dann sind f und g teilerfremd.

Solution: Ja

- Es seien $f, g \in K[X]$. Dann sind f und g genau dann teilerfremd, wenn $u, v \in K[X]$ existieren mit $uf + vg = 0$.

Solution: Nein

Aufgabe 53

Sei $V \neq \{0\}$ ein endlicher-dimensionaler K-Vektorraum, $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung und $\dim_K(V) = n$. Sind die folgenden Aussagen wahr?

- Ist 0 einziger Eigenwert, so ist φ die Nullabbildung.

Solution: Nein

- Sei $K = \mathbb{R}$. Es gibt ein Element $a \in \mathbb{R}$, das nicht Eigenwert einer linearen Abbildung von V nach V ist.

Solution: Nein

- Falls $n = 5$ ist, so hat φ einen Eigenwert.

Solution: Nein

- Falls jedes Element von K Eigenwert von φ ist, so hat K höchstens n Elemente.

Solution: Ja

- φ hat n verschiedene Eigenwerte.

Solution: Nein

Aufgabe 54

Es sei $V \neq \{0\}$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sind die folgenden Aussagen über Eigenvektoren richtig?

- Die Differenz zweier Eigenvektoren von φ zu verschiedenen Eigenwerten ist ein Eigenvektor von φ.

Solution: Nein

- Der Nullvektor ist Eigenvektor von φ.

Solution: Nein

- Wenn die Dimension von V mindestens 2 ist und φ einen Eigenvektor besitzt, dann hat φ mindestens 2 linear unabhangige Eigenvektoren.

Solution: Nein

- Eine Summe zweier Eigenvektoren von φ zum gleichen Eigenwert, die ungleich Null ist, ist ein Eigenvektor.

Solution: Ja

- Wenn es einen Vektor $v \neq 0$ in V gibt mit $\varphi(-v) = kv$, dann ist $-v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert k.

Solution: Nein

Aufgabe 57

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension $n \geq 1$. Weiter sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ und χ_φ sein charakteristisches Polynom. Außerdem sei $B \in K^{n\times n}$ und χ_B ihr charakteristisches Polynom. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- Falls $K = \mathbb{C}$ ist, so hat χ_B mindestens eine Nullstelle.

  Solution: Ja

- Wenn φ bijektiv ist, so ist $\chi_\varphi(0) \neq 0$.

  Solution: Ja

- Falls die Summe der Koeffizienten von χ_φ gleich Null ist, so gibt es ein $0 \neq v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$.

  Solution: Nein

- Wenn für eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ gilt $\chi_\varphi = \chi_A$, so gibt es eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V mit $M_\mathcal{B}(\varphi) = A$.

  Solution: Nein

- Ist $a \in K$ mit $\chi_\varphi(a) = 0$, so ist φ nicht invertierbar.

  Solution: Nein

Aufgabe 58

Es sei K ein Körper, $K[X]$ der Polynomring in der Unbestimmten X über K und $A \in K^{n\times n}$. Sind die folgenden Aussagen richtig?

- Ist $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$, so ist A trigonalisierbar.

  Solution: Nein

- A mit $n \geq 2$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Eigenvektoren von A mit $v_i \in K^{n\times 1}$ existiert, das linear unabhängig ist.

  Solution: Ja

- Ist $K = \mathbb{R}$, A symmetrisch und $n = 2$, so ist A diagonalisierbar.

  Solution: Ja

- A ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Diagonalmatrix $D \in K^{n\times n}$ und eine Matrix $T \in K^{n\times n}$ existiert mit $TD = AT$.

  Solution: Nein

- Gilt für A die Gleichung $0 \cdot A = A$, so ist A diagonalisierbar.

Solution: Ja

Aufgabe 59

Es sei K ein Körper. Mit Polynomen sind in dieser Aufgabe immer Polynome in $K[X]$ gemeint. Sind die folgenden Aussagen wahr?

- Jedes Polynom ist charakteristisches Polynom einer Matrix.

Solution: Nein

- Jedes normierte Polynom vom Grad größer oder gleich 1 ist Minimalpolynom einer Matrix.

Solution: Ja

- Das Minimalpolynom der Einheitsmatrix ist $X - 1$.

Solution: Ja

- Das Minimalpolynom einer Matrix ist irreduzibel.

Solution: Nein

- Das Minimalpolynom der Nullmatrix ist das konstante Polynom 1.

Solution: Nein

Aufgabe 60

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3},$$

wobei $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ist. Es seien χ_A und χ_B ihre charakteristischen Polynome, und μ_A und μ_B ihre Minimalpolynome. Einen Teiler $f \in \mathbb{R}[X]$ des charakteristischen Polynoms χ_A von A schreiben wir als $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$. Analog schreiben wir $g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$ für einen Teiler $g \in \mathbb{F}_5[X]$ von χ_B.

- Wie lautet b_2 von μ_B?

Solution: 1

- Wie lautet b_1 von χ_B?

Solution: 3

- Wie lautet der Betrag von a_2 von χ_A?

Solution: 18

- Wie lautet der Betrag von a_0 von μ_A?

Solution: 160

- Wie lautet der Betrag von a_0 von χ_A?

Solution: 160

Aufgabe 63

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix. Sind die folgenden Aussagen jeweils wahr?

- Ist $K = \mathbb{C}$ und sind A^4 und A^3 linear abhangig, dann ist A diagonalisierbar.

Solution: Nein

- Falls A und A^2 linear abhängig sind, dann ist A diagonalisierbar.

Solution: Nein

- Ist $K = \mathbb{R}$ und sind die Einträge von A alle gleich, so ist A diagonalisierbar.

Solution: Ja

- Ist $K = \mathbb{C}$ und $A^4 = E_n$, dann ist A diagonalisierbar.

Solution: Ja

- Ist $A^2 = A$, dann ist A diagonalisierbar.

Solution: Ja

- Ist das Minimalpolynom von A gleich dem charakteristischen Polynom von A, dann ist A nicht diagonalisierbar.

Solution: Nein

- Hat ein normiertes Polynom $f \in K[X]$, dessen Grad mindestens 2 ist, paarweise verschiedene Koeffizienten, dann ist seine Begleitmatrix diagonalisierbar.

Solution: Nein

Aufgabe 64

Sei $\langle\, , \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. Geben Sie die Langen der folgenden Vektoren an.

- Sei $v = (56, 0)^t$. Wie lautet $||v||$?

  Solution: 56

- Sei $v = (3, 4)^t$. Wie lautet $||v||$?

  Solution: 5

- Sei $v = (-\sqrt{24}, 5)^t$. Wie lautet $||v||$?

  Solution: 7

- Sei $v = (-15, 8)^t$. Wie lautet $||v||$?

  Solution: 17

- Sei $v = (\sqrt{7}, -3)^t$. Wie lautet $||v||$?

  Solution: 4

Aufgabe 65

Sind die angegebenen Abbildungen jeweils Skalarprodukte auf V?

- $V = \mathbb{R}^2$, $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$, $((a, b)^t, (c, d)^t) \mapsto ac - bc - ad + 3bd$.

  Solution: Ja

- $V = \mathbb{C}^2$, $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$, $((a, b)^t, (c, d)^t) \mapsto ac + bd$.

  Solution: Nein

- $V = \mathbb{R}^2$, $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$, $((a, b)^t, (c, d)^t) \mapsto a^2 + 2bc + d^2$.

  Solution: Nein

- $V = \mathbb{C}^2$, $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$, $((a, b)^t, (c, d)^t) \mapsto 3a\bar{c} + \bar{i}b\bar{c} + ia\bar{d} + b\bar{d}$. (Hier ist $i^2 = -1$.)

  Solution: Ja

- $V = \mathbb{R}^2$, $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$, $((a, b)^t, (c, d)^t) \mapsto 3ac + 2bd + ad$.

  Solution: Nein