Beispiel 1/8

Finde den Schnittpunkt der folgenden 3 Ebenen in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x - y + z &= 2 \\ x \phantom{{}+y} - z &= -2 \end{aligned}$$

Lösung

Umschreiben in Matrize-Form: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ + \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ |\cdot(-2) \quad |\cdot 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |:4 \\ |\cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ |\cdot 1 \quad |\cdot(-2) \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow \mathbb{L}(A, b) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}}.$$

Probe:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{3\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{3\times 1} = b \checkmark$$

$\underline{\underline{\text{OK}}}$

Beispiel 2/8, Seite 1/2

Finde ein Polynom $p(X)$ vom Grad 4, so dass
$p(0)=1$, $p(1)=5$, $p(-1)=1$, $p(2)=37$, $p(3)=145$.

Lösung

$$p(X)=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e$$

Verwertung der Angaben:

$p(0)=1$: $\quad 0+0+0+0+e=1$

$p(1)=5$: $\quad a+b+c+d+e=5$

$p(-1)=1$: $\quad a-b+c-d+e=1$

$p(2)=37$: $\quad 16a+8b+4c+2d+e=37$

$p(3)=145$: $\quad 81a+27b+9c+3d+e=145$

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array}$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 37 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 & 145 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 0 & 36 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 0 & 144 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 1 \quad |\cdot(-2) \quad |\cdot(-3) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 14 & 6 & 2 & 0 & 0 & 28 \\ 78 & 24 & 6 & 0 & 0 & 132 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 2 \\ |\cdot(-1) \quad |\cdot(-3) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

Nächste Seite geht's weiter

Beispiel 2/8, Seite 2/2

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 72 & 24 & 0 & 0 & 0 & 120 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow + \\ |\cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 72 & 24 & 0 & 0 & 0 & 120 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |:2 \\ |:2 \\ |:6 \\ |:24 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow + \\ \\ |\cdot(-1) \\ \leftarrow + \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow + \\ |\cdot(-2) \end{array}$$

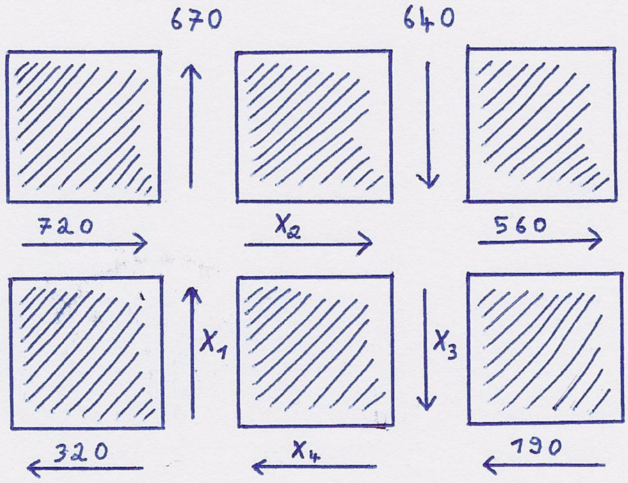
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \\ \leftarrow & + \\ \leftarrow + & \\ \\ |\cdot(-1) & |\cdot 2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \underbrace{a = 1,\ b = 2,\ c = 1,\ d = 0 \text{ und } e = 1}$$

$$p(x) = \underline{\underline{x^4 + 2x^3 + x^2 + 1}}$$

Beispiel 3/8, Seite 1/2

Bestimme den Fluss in folgendem Netzwerk:



Lösung

$$X_1 + 720 = X_2 + 670$$
$$X_2 + 640 = X_3 + 560$$
$$X_1 + 320 = X_4$$
$$X_3 + 190 = X_4$$

$$\iff$$

$$X_1 - X_2 = -50$$
$$X_2 - X_3 = -80$$
$$X_1 - X_4 = -320$$
$$X_3 - X_4 = -190$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -80 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -320 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -190 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \\ + \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -80 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -270 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -190 \end{array}\right) \begin{array}{ll} + & \\ |\cdot 1 & |\cdot(-1) \\ & + \\ & \end{array}$$

Nächste Seite geht's weiter

Beispiel 3/8, Seite 2/2

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \vert & -130 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \vert & -80 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vert & -190 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vert & -190 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \vert\cdot(-1) \quad \vert\cdot 1 \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \vert & -320 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vert & -270 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vert & -190 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \vert & -320 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vert & -270 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vert & -190 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vert & p \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \vert\cdot 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vert & -320+p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vert & -270+p \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vert & -190+p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vert & p \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vert & -320+1\cdot p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vert & -270+1\cdot p \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vert & -190+1\cdot p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vert & 0+1\cdot p \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{L}(A,b) = s + \mathbb{L}(A,0) = \begin{pmatrix} -320 \\ -270 \\ -190 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Beispiel 4/8

Berechne die Lösungsmenge für das folgende homogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-3) \quad |\cdot(-1) \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \\ |\cdot(-5) \quad |\cdot 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \\ |\cdot(-2) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\cdot p \\ 0 & 1 & 0 & 0\cdot p \\ 0 & 0 & 1 & 1\cdot p \end{array}\right) \Longrightarrow \underline{\underline{\mathbb{L}(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}}}$$

Probe:

$$\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \checkmark$$

$\underline{\underline{\text{OK}}}$

Beispiel 5/8, Seite 1/2

Löse das folgende homogene LGS:

$$
\begin{aligned}
X_1 - X_2 + X_3 \qquad\qquad &= 0 \\
2X_2 - X_3 + 3X_4 &= 0 \\
X_1 + X_2 \qquad\quad + 3X_4 &= 0 \\
2X_1 + 2X_2 \qquad\quad + 6X_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Lösung

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\
2 & 2 & 0 & 6 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} |\cdot(-1) \quad |\cdot(-2) \\ \\ + \\ + \end{array}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\
0 & 4 & -2 & 6 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ \\ |:2 \end{array}
$$

$$
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 3 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ |\cdot(-1) \\ + \\ + \end{array}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} |\cdot 2 \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\begin{array}{l} + \\ |\cdot 1 \\ \\ \\ \end{array}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\Longrightarrow
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & P \\
0 & 0 & 0 & 1 & Q
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{l} + \\ + \\ |\cdot 1 \quad |\cdot(-1) \\ \\ \end{array}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 0 & 0 & 3 & -P \\
0 & 2 & 0 & 3 & P \\
0 & 0 & 1 & 0 & P \\
0 & 0 & 0 & 1 & Q
\end{array}\right)
\begin{array}{l} + \\ + \\ \\ |\cdot(-3) \end{array}
$$

$$
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 0 & 0 & 0 & -P-3Q \\
0 & 2 & 0 & 0 & P-3Q \\
0 & 0 & 1 & 0 & P \\
0 & 0 & 0 & 1 & Q
\end{array}\right)
\begin{array}{l} |:2 \\ |:2 \\ \\ \\ \end{array}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & (-1/2)P + (-3/2)Q \\
0 & 1 & 0 & 0 & (1/2)P + (-3/2)Q \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1P + 0Q \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0P + 1Q
\end{array}\right)
$$

Nächste Seite geht's weiter

Beispiel 5/8, Seite 2/2

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = X_3 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + X_4 \begin{bmatrix} -3/2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es sind X_3 und X_4 die freien Variablen die bei der Berechnung des Kerns sich ergeben haben. Es empfiehlt sich $X_3 = 2$ und $X_4 = -2$ zu setzen damit man eine Lösungsmenge mit mehr positiven als negative Vorzeichen erhält und die zudem auch keine Brüche beinhaltet:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot t_2 \,\middle|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Beispiel 6/8, Seite 1/2

Löse das folgende inhomogene LGS für $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= a \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 &= a \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_4 &= b \end{aligned}$$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & a \\ 2 & 2 & 0 & 6 & b \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \quad |\cdot(-2) \\ \\ + \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 6 & b-2a \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-1) \quad |\cdot(-2) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-2a \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 & 2a \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-2a \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ |\cdot 1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 2a \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-2a \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Lösbar für } b - 2a = 0$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{b = 2a}$$

$$\Longrightarrow \text{Nicht lösbar für } \boxed{b \neq 2a}$$

Nächste Seite geht's weiter

Beispiel 6/8, Seite 2/2

Sei $b = 2a$ dann:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 2a \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a-2a \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 2a \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 & 2a \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} + \\ + \\ |\cdot 1 \quad |\cdot(-1) \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 & 2a-P \\ 0 & 2 & 0 & 3 & P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ \\ |\cdot(-3) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 2a-P-3Q \\ 0 & 2 & 0 & 0 & P-3Q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \begin{array}{l} |:2 \\ |:2 \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 0 & a+(-1/2)P+(-3/2)Q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0+(1/2)P+(-3/2)Q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0+\ 1P\ +0Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0+\ 0P\ +1Q \end{array}\right)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} -3/2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

wähle $x_3 = 2$ und $x_4 = -2$ und erhalte eine Lösungsmenge ohne Brüche und mit mehr positiven als negativen Vorzeichen:

$$\mathbb{L}(A, b) = s + \mathbb{L}(A, 0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot t_2 \,\middle|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Beispiel 7/8

Löse das LGS $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, also

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 = -2$$

Lösung

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ | \cdot (-2) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right) | \cdot 5$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -10 & -5 & -10 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ | \cdot 2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow + \\ | \cdot (-1) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 6-p \\ 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \\ | \cdot 3 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 2+3p \\ 0 & 5 & 0 & 6-p \\ 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right) \begin{array}{l} | : 5 \\ | : 5 \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/5 + (3/5)p \\ 0 & 1 & 0 & 6/5 + (-1/5)p \\ 0 & 0 & 1 & 0 + 1p \end{array}\right) \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 6/5 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

wähle $x_3 = 5$ um die Brüche in der Lösung des Kerns loszuwerden und erhalte eine Komplettlösung der Form:

$$\mathbb{L}(A, b) = s + \mathbb{L}(A, 0) = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 6/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot t \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\uparrow$ feste Lösung

Gegeben sei die folgende Matrize

$$A_k = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & k+1 & k+2 \end{pmatrix}$$

(1) Bestimmen Sie den Rang $Rg(A_k)$ in Abhängigkeit von k.

(2) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k eine Basis von $Ker(A_k)$ sowie eine Basis von $Bild(A_k)$.

(3) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k $\dim(Im(A_k))$ und $\dim(Ker(A_k))$.

(4) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A_k in Abhängigkeit von k!

(5) Bestimmen Sie die Determinante von A_k.

(6) Für welche Werte von k ist A_k invertierbar?

Lösung

zu 1,

Man kann bei der Bestimmung des Rangs auch schon fast den Kern ausrechnen. Daher empfiehlt es sich eine Blockmatrize zu verwenden auf deren rechte Seite man die Nullen schreibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 5 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & k+1 & k+2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ |\cdot(-2) \quad |\cdot(-1) \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 & 0 \end{array}\right) |\cdot(-1)$$

Nächste Seite geht's weiter

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{5}k - \frac{1}{5}\right) \\ \overset{+}{\longleftarrow} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}k + \frac{2}{5} & 0 \end{array}\right) \mid \cdot \frac{5}{2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \end{array}\right)$$

Rangsatz:

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

$$\dim V = \dim(\operatorname{Ker} \varphi) + \dim(\operatorname{Im} \varphi)$$

$$n = \operatorname{Defekt}(\varphi) + \operatorname{Rang}(\varphi)$$

$$n = \dim(\operatorname{Ker} \varphi) + \dim(\operatorname{Im} \varphi)$$

Anzahl der Spalten einer Matrize

$\Longrightarrow$ Falls $k \neq -1$ dann hat A den Rang $Rg(A) = 3$.
Mit Hilfe des Rangsatzes können wir mehr feststellen und Schlußfolgerungen daraus ziehen:

$$n = \operatorname{Defekt}(A) + \operatorname{Rang}(A)$$
$$\Longrightarrow 3 = \operatorname{Defekt}(A) + 3$$
$$\Longleftrightarrow \operatorname{Defekt}(A) = 3 - 3$$
$$\Longleftrightarrow \operatorname{Defekt}(A) = 0$$

Ist der Defekt einer Matrize 0 <u>dann und nur dann</u> ist sie invertierbar. Die Matrize hat somit also vollen Rang und würde man bei dieser 3x3-Matrize auch die Determinante für ein $k \neq -1$ bestimmen müssen würde man feststellen das sie ungleich Null ist.

$\Longrightarrow$ Falls $k=-1$ dann hat A den Rang $Rg(A)=2$.

Betrachte Fall $k=-1$ genauer:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&5&3&0\\0&0&-1+1&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&5&3&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x & y & z\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&5&3&0\\0&0&1&P\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} \\ \longleftarrow + \\ \longleftarrow +1 \\ |\cdot(-3) \quad |\cdot 1\end{array}\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&P\\0&5&0&-3P\\0&0&1&P\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ |:5 \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1P\\0&1&0&(-3/5)P\\0&0&1&1P\end{array}\right)\Longrightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=z\cdot\begin{bmatrix}1\\-3/5\\1\end{bmatrix}$$

Wähle $z=5$ um den Bruch loszuwerden und erhalte die Lösung des Kerns unter der Bedingung $k=-1$ wie folgt:

$$\mathbb{L}(A,0)=\left\{\begin{pmatrix}5\\-3\\5\end{pmatrix}\cdot t \;\middle|\; t\in\mathbb{R}\right\}$$

zu 2,

Basis von Ker(A) für $k=-1$:

$$\operatorname{Ker}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Basis von Bild(A) für $k=-1$:

Die Matrise A erst transponieren und dann rechnen:

$$A^{tr} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ | :5 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} +\\ | \cdot 2 \quad | \cdot (-5) \\ + \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ | \cdot 1 \\ + \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 0} \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 1} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Bild}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

zu 3,

$\boxed{\text{Es gelte } k=-1:}$

$$\dim(\operatorname{Im}(A)) = \operatorname{Rang}(A) = 2$$

$$\dim(\operatorname{Ker}(A)) = \operatorname{Defekt}(A) = 1$$

Beispiel 8/8, Seite 5/5

zu 4,

$$CP(A_k) = \det(A_k - \lambda E)$$

$$CP(A_k) = \det\left(\begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & k+1 & k+2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$CP(A_k) = \det \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 5 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & k+1 & k+2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$CP(A_k) = (-2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ k+1 & k+2-\lambda \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & k+2-\lambda \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -1 & -\lambda \\ -1 & k+1 \end{vmatrix}$$

$$CP(A_k) = (-2-\lambda)[-\lambda(k+2-\lambda)-(k+1)] - 5[-(k+2-\lambda)+1] + 5[-(k+1)-\lambda]$$

$$CP(A_k) = (-2-\lambda)(-k\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - k - 1) - 5(-k-2+\lambda+1) + 5(-k-1-\lambda)$$

$$CP(A_k) = 2k\lambda + 4\lambda - 2\lambda^2 + 2k + 2 + k\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 + k\lambda + \lambda + 5k + 10 - 5\lambda - 5 - 5k - 5 - 5\lambda$$

$$CP(A_k) = 3k\lambda - 5\lambda + k\lambda^2 + 2k + 2 - \lambda^3$$

$$CP(A_k) = -\lambda^3 + k\lambda^2 + 3k\lambda - 5\lambda + 2k + 2$$

$$\boxed{CP(A_k) = -\lambda^3 + k\lambda^2 + (3k-5)\lambda + (2k+2)}$$

zu 5,

$$\det(A_k) = \underline{\underline{2k+2}}$$

zu 6,

$$2k+2 \neq 0 \quad |:2$$

$$\Longleftrightarrow \quad k+1 \neq 0 \quad |-1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{k \neq -1}}$$

$\Longrightarrow$ Für $k \neq -1$ ist A_k invertierbar.

Blatt 7 – Aufgabe 40 (aus der Übung SS 2014)

Es sei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 5}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gesucht:

a) $\dim_{\mathbb{F}_3}(\mathrm{Ker}(\varphi_A))$ $\quad (= \mathrm{def}(\varphi_A))$

b) $\dim_{\mathbb{F}_3}(\mathrm{Im}(\varphi_A))$ $\quad (= \mathrm{rk}(\varphi_A))$

c) $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$

d) $\mathrm{Im}(\varphi_A)$

e) $|\mathrm{Ker}\,\varphi_A|$

f) $|\mathrm{Im}\,\varphi_A|$

g) $\mathrm{Sol}\left(A, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Lösung

$\mathbb{F}_3$ bedeutet:

	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	15	
…	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16	…
	-7	-4	-1	2	5	8	11	14	17	

zu a)

Am Besten eine Blockmatrize verwenden wo man auf die linke Seite die Matrize A und auf die rechte Seite die Nullen hinschreibt. Auf der linken Seite der Blockmatrize nun den Rang(φ_A) bestimmen und dann mit Hilfe des Rangsatzes mühelos Unterpunkte a) und b) lösen. Die Nullen auf der rechten Seite werden dann etwas später bei der Bestimmung des Kerns nützlich sein.

Blatt 7 – Aufgabe 40 (aus der Übung SS 2014)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ + \\ + \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ |\cdot 2 \quad |\cdot(-1) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbb{F}_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ |\cdot(-1) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ |\cdot(-1) \quad |\cdot 1 \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot(-1) \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rangsatz:

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

Anzahl der Spalten einer Matrix → hier

$$\dim V = \dim(\operatorname{Ker} \varphi_A) + \dim(\operatorname{Im} \varphi_A)$$
$$\| \qquad\qquad \|$$
$$n = \operatorname{def}(\varphi_A) + \operatorname{rk}(\varphi_A)$$
$$\| \qquad\qquad \|$$
$$5 = \operatorname{def}(\varphi_A) + 3$$

$\Longrightarrow \operatorname{Rang}(\varphi_A) = 3$

$\Longrightarrow 5 = \operatorname{def}(\varphi_A) + 3 \iff \dim(\operatorname{Ker}\varphi_A) = \operatorname{def}(\varphi_A) = 2$ und
$\dim(\operatorname{Im}\varphi_A) = \operatorname{rk}(\varphi_A) = 3$ (s.o.)

Unterpunkt a) ist eigentlich schon gelöst aber weiterrechnen um zu sehen ob die Anzahl der Kerne wirklich 2 ist und wie sie lauten:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ \\ |\cdot(-1) \quad |\cdot 1 \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & P \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ \\ |\cdot 1 \quad |\cdot(-1) \end{array}$$

Nächste Seite geht's weiter

Blatt 7 - Aufgabe 40 (aus der Übung SS 2014)

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P-Q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -P+Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & Q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & P-Q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -P+Q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1P-1Q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1P+1Q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1P+0Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0P+1Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0P+1Q \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathbb{F}_3}{\Longrightarrow} \operatorname{Ker}(\varphi_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Bekannt aus Unterpunkt a) ist $\dim(\operatorname{Ker}\varphi_A) = \underline{2}$ und wie man sieht ist das richtig, da man eben <u>zwei</u> Vektoren für den Kern bestimmt hat. Unterpunkt c) wäre damit auch erledigt.

<u>zu e)</u>

$$|\operatorname{Ker}\varphi_A| = 3^{\dim(\operatorname{Ker}\varphi_A)} = 3^2 = 9$$

wegen $\mathbb{F}_3$

<u>zu f)</u>

$$|\operatorname{Im}\varphi_A| = 3^{\dim(\operatorname{Im}\varphi_A)} = 3^3 = 27$$

Jetzt Unterpunkt d) lösen um zu sehen ob die Anzahl der Bildvektoren wirklich 3 ist und wie sie lauten:

Blatt 7 – Aufgabe 40 (aus der Übung SS 2014)

zu d)

Zuerst A transponieren und dann rechnen:

$$A^{tr} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad |\cdot 1 \quad |\cdot(-1)$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad |\cdot 1 \quad |\cdot(-2) \quad |\cdot(-1)$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbb{F}_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad |\cdot 1 \quad |\cdot(-1)$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 0 \quad -1} \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\mathbb{F}_3} \mathrm{Im}(\varphi_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aus der Lösung zu a) wo auch Unterpunkt b) gelöst wurde weiß man das $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi_A) = \underline{3}$ gilt. Und hier hat man eben <u>drei</u> Bildvektoren bestimmt wie zu erwarten war.

Blatt 7 – Aufgabe 40 (aus der Übung SS 2014)

zu g_1

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ + \\ + \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathbb{F}_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ |\cdot(-1) \\ + \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) |\cdot(-1)$$

$$\xrightarrow{\mathbb{F}_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ |\cdot(-1) \quad |\cdot 1 \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) |\cdot(-1)$$

$$\xrightarrow{\mathbb{F}_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ |\cdot(-1) \quad |\cdot 1 \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1+P \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ \\ + \\ |\cdot 1 \quad |\cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+1P-1Q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0-1P+1Q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0+1P+0Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1+0P+1Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0+0P+1Q \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathbb{F}_3}{\Longrightarrow} \mathcal{Sol}\left(A, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = s + \mathbb{L}(A,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Probe für s (feste Lösung):

$$A \cdot s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

4×5 $\quad$ Mul. $\underline{\underline{\text{OK}}}$ möglich $\quad$ 5×1 $\quad$ 4×1

ONB-Aufgabe 1/2, Seite 1/9

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden, und bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $\vec{x}$ bzgl. dieser Basis.

b) Konstruieren Sie aus den $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ eine Orthonormalbasis $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ von $\mathbb{R}^4$.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten von x bezüglich der Basis $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$.

Lösung

zu a)

$$CP(V) = \det(V - \lambda E)$$

$$CP(V) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$CP(V) = \det\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ |\cdot(-1) \quad |\cdot(-1+\lambda) \\ \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 3+\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda \\ 1-\lambda & 3+\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda \\ 1-\lambda & 3+\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1+\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3+\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2-\lambda-\lambda^2 \\ 1-\lambda & 3+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1+\lambda)\cdot[(1-\lambda)\cdot 1 + 1\cdot(3+\lambda)] + (1-\lambda)\cdot[2\cdot(3+\lambda) - (1-\lambda)\cdot(2-\lambda-\lambda^2)]$$

$$= (1+\lambda)\cdot(1-\lambda+3+\lambda) + (1-\lambda)\cdot[6+2\lambda-(2-\lambda-\lambda^2-2\lambda+\lambda^2+\lambda^3)]$$

$$= (1+\lambda)\cdot(4) + (1-\lambda)\cdot(6+2\lambda-2+\lambda+\lambda^2+2\lambda-\lambda^2-\lambda^3)$$

$$= 4+4\lambda+(1-\lambda)\cdot(4+5\lambda-\lambda^3)$$

$$= 4+4\lambda+4+5\lambda-\lambda^3-4\lambda-5\lambda^2+\lambda^4$$

$$= 8+5\lambda-5\lambda^2-\lambda^3+\lambda^4$$

$= \lambda^4-\lambda^3-5\lambda^2+5\lambda+8$ ist das charakteristische Polynom von der Matrix V. Es gilt $\det(V)=8\neq 0$ und das bedeutet die Spaltenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$ sind linear unabhängig, und je vier linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^4$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

Teil 2, Bestimmung $\mathcal{K}_V(X)$:

Stelle X als Linearkombination in $V=(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ dar:

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad \text{für} \quad a \in K^{n\times 1}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{K}_V(X) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ONB - Aufgabe 1/2, Seite 3/9

Also

$$\begin{pmatrix}3\\-1\\4\\2\end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix} + a_4 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ |\cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 2 \;|\cdot 3\; |\cdot(-2) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |:4 \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot 2 \;|\cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 2 \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot(-3) \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |:2 \\ |:2 \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \mathcal{K}_v(X) = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-2\\-1/2\\-3/2\\3\end{pmatrix}}}.$$

zu b,

Mit $w_1 = v_1$ und den inneren Produkten

$$<v_2, w_1> = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 3$$

und

$$\|w_1\|^2 = <w_1, w_1> = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{ist}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{<v_2, w_1>}{<w_1, w_1>} \cdot w_1$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}}.$$

weiter ist

$$<v_3, w_1> = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1,$$

$$<v_3, w_2> = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{und}$$

$$\|w_2\| = <w_2, w_2> = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{womit}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}}} \quad \text{folgt.}$$

weiter ist

$$\langle v_4, w_1 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4,$$

$$\langle v_4, w_2 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\langle v_4, w_3 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \quad \text{und}$$

$$\|w_3\|^2 = \langle w_3, w_3 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \frac{48}{9} \quad \text{womit}$$

$$w_4 = v_4 - \frac{\langle v_4, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_4, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle v_4, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\frac{4}{3}}{\frac{48}{9}} \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/3 \\ -4/3 \\ -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4 \cdot 9}{3 \cdot 48} \begin{pmatrix} 0 \\ -4/3 \\ 4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6/3 \\ 3/3 \\ 3/3 \\ 3/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/3 \\ -4/3 \\ -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}}} \quad \text{folgt.}$$

Es ist nun $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^4$.

Mit $\|w_4\|^2 = \langle w_4, w_4 \rangle = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \frac{12}{9}$ und

$\|w_i\| = \sqrt{\langle w_i, w_i \rangle}$, $i = 1, 2, 3, 4$ führt das Normieren der zueinander orthogonalen Vektoren w_1, w_2, w_3 und w_4

$$u_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ONB-Aufgabe 1/2, Seite 7/9

$$u_2 = \frac{1}{\|w_2\|} \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$u_3 = \frac{1}{\|w_3\|} \cdot w_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{48}{9}}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$u_4 = \frac{1}{\|w_4\|} \cdot w_4 = \frac{1}{\sqrt{\frac{12}{9}}} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{auf die}$$

Orthonormalbasis $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$

zu c)

Bestimmung $K_{\mathcal{U}}(X)$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{array}{cccccc} x & y & z & t & & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} | \cdot \sqrt{3} \\ | \cdot \sqrt{3} \\ | \cdot \sqrt{3} \\ | \cdot \sqrt{3} \end{array}$$

ONB-Aufgabe 1/2, Seite 8/9

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 3\cdot\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1\cdot\sqrt{3} \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 4\cdot\sqrt{3} \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2\cdot\sqrt{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 3\cdot\sqrt{3} \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -4\cdot\sqrt{3} \\ 0 & -2 & -1 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2\cdot\sqrt{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 1 \quad |\cdot(-2) \quad |\cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -4\cdot\sqrt{3} \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 9\cdot\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6\cdot\sqrt{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-1) \\ |:(-3) \\ |:3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4\cdot\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3\cdot\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cdot\sqrt{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot 1 \quad |\cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3\cdot\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cdot\sqrt{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ |\cdot 1 \quad |\cdot(-1) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cdot\sqrt{3} \end{array}\right) \Longrightarrow \mathcal{K}_u(X) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2\cdot\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 2\cdot\sqrt{3} \end{pmatrix}}}.$$

Bonusunterpunkt d)

Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $\Pi_U(X)$ von X auf U.

Lösung

$$\Pi_U(X) = \langle X, u_1\rangle u_1 + \langle X, u_2\rangle u_2 + \langle X, u_3\rangle u_3 + \langle X, u_4\rangle u_4$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}3\\-1\\4\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}3\\-1\\4\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$+ \left\langle \begin{pmatrix}3\\-1\\4\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}3\\-1\\4\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(3-1+4+0)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot(3+0-4-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{3}\cdot(0-1-4+2)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot(3+1+0+2)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\2\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\-2\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix}3\\-1\\4\\2\end{pmatrix}}}.$$

Bonusunterpunkt e)

Bestimmen Sie den Abstand zwischen X und $U^\perp$.

Lösung

$$d(X, U^\perp) = \|\Pi_U(X)\| = \sqrt{\begin{pmatrix}3\\-1\\4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\4\\2\end{pmatrix}} = \sqrt{3^2+(-1)^2+4^2+2^2}$$

$$= \sqrt{9+1+16+4} = \underline{\underline{\sqrt{30}}}.$$

(a) Bestimme eine Orthonormalbasis des Untervektorraums

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

im $\mathbb{R}^4$ mit Standardskalarprodukt.

(b) Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechne die orthogonale Projektion $\pi_U(v)$ von v auf U.

(c) Berechne den Abstand zwischen v und $U^\perp$.

(d) Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechne die orthogonale Projektion $\pi_{U^\perp}(v)$ von v auf $U^\perp$.

(e) Berechne den Abstand zwischen v und U.

Lösung

zu a_1

Mit $w_1 = u_1$ und den inneren Produkten

$$\langle u_2, w_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 9 \quad \text{und}$$

$$\|w_1\|^2 = \langle w_1, w_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 9 \quad \text{ist}$$

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{9}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}}.$$

weiter ist

$$\langle u_3, w_1\rangle = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix} = 0\,,$$

$$\langle u_3, w_2\rangle = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix} = -2 \quad \text{und}$$

$$\|w_2\|^2 = \langle w_2, w_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix} = 8 \quad \text{womit}$$

$$w_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}\cdot w_1 - \frac{\langle u_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}\cdot w_2$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{0}{9}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{-2}{8}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1/2\\0\\1/2\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-2\\1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}}} \quad \text{folgt.}$$

Es ist nun $\{w_1, w_2, w_3\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^4$.

$$\text{Mit } \|w_3\|^2 = \langle w_3, w_3\rangle = \begin{pmatrix}-2\\1/2\\0\\1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1/2\\0\\1/2\end{pmatrix} = \frac{18}{4} \quad \text{und}$$

$\|w_i\| = \sqrt{\langle w_i, w_i\rangle}$, $i = 1,2,3$ führt das Normieren der zueinander orthogonalen Vektoren w_1, w_2 und w_3

$$v_1 = \frac{1}{\|w_1\|}\cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{9}}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix},$$

$$v_2 = \frac{1}{\|w_2\|} \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$v_3 = \frac{1}{\|w_3\|} \cdot w_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{18}{4}}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{auf die}$$

Orthonormalbasis $V = \{v_1, v_2, v_3\} = \underline{\underline{\left\{ \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}}$.

zu b)

$$\pi_U(v) = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \langle v, v_3 \rangle v_3$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot (1 + 2 - 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot (-1 - 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{18} \cdot (-4 + 1 - 1) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/9 \\ 2/9 \\ 0 \\ 2/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9/9 \\ 0 \\ -9/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8/9 \\ -2/9 \\ 0 \\ -2/9 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}}.$$

zu c,

$$d(v, U^{\perp}) = \| \pi_U(v) \| = \sqrt{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}.$$

zu d,

$$U^{\perp} = \{ X = (X_1 \;\; X_2 \;\; X_3 \;\; X_4)^{tr} \in \mathbb{R}^4 \mid \langle X, u_1 \rangle = 0, \langle X, u_2 \rangle = 0, \langle X, u_3 \rangle = 0 \}.$$

Also:

$\langle X, u_1 \rangle = 0: \quad 1 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 2 \cdot X_4 = 0$

$\langle X, u_2 \rangle = 0: \quad 1 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 4 \cdot X_4 = 0$

$\langle X, u_3 \rangle = 0: \quad -2 \cdot X_1 + 1 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot X_4 = 0$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot(-1) \quad \mid \cdot 2 \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \mid \cdot 1 \\ \mid \cdot 2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 5 \\ \xleftarrow{+} \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid : (-2) \\ \mid : 18 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{+} \\ \mid \cdot 1 \quad \mid \cdot (-4) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0P \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0P \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow U^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle.$$

Sei nun $u^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Vektor aus $U^\perp$.

$$\Longrightarrow \|u^\perp\| = \sqrt{\langle u^\perp, u^\perp \rangle} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1^2} = 1$$

$$\Longrightarrow \text{ONB } V^\perp = \{v_1^\perp\} = \frac{1}{\|u^\perp\|} \cdot u^\perp = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}.$$

$\Pi_{U^\perp}(v)$ kann nun berechnet werden. Hätte man auch direkt mit der Projektionsformel $v = \Pi_U(v) + \Pi_{U^\perp}(v)$ leicht bestimmen können da $\Pi_U(v)$ bekannt war aber wollte auch $U^\perp$ in die Rechnung miteinbeziehen.

$$\begin{aligned} \Pi_{U^\perp}(v) &= \langle v, v_1^\perp \rangle v_1^\perp \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}}. \end{aligned}$$

<u>zu e)</u>

$$d(v, U) = \|\Pi_{U^\perp}(v)\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{3^2} = \underline{\underline{3}}.$$

Aufgabe 20 (aus der Übung), Seite 1/2

Inhomogene LGS über $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_7$:

$$(A,b) := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

gesucht: $s + \mathbb{L}(A,0)$

Lösung

$\mathbb{Z}_7$ bedeutet:

	−21	−14	−7	0	7	14	21	
	−20	−13	−6	1	8	15	22	
	−19	−12	−5	2	9	16	23	
	−18	−11	−4	3	10	17	24	
…	−17	−10	−3	4	11	18	25	…
	−16	−9	−2	5	12	19	26	
	−15	−8	−1	6	13	20	27	

$$\xrightarrow{\mathbb{Z}_7} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 6 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-5) \quad |\cdot(-1) \quad |\cdot(-3) \\ + \\ + \\ \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 5 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-2) \quad |\cdot(-6) \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

Nächste Seite geht's weiter

Aufgabe 20 (aus der Übung), Seite 2/2

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ |:5 \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \\ + \\ |\cdot(-3) \quad |\cdot(-4) \quad |\cdot(-6) \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |:2 \\ \\ |:5 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ |\cdot(-1) \quad |\cdot(-3) \\ \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ |\cdot(-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & p \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ \\ \\ |\cdot(-2) \quad |\cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+6p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6+5p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & p \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+6p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6+5p \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0+1p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1+0p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2+0p \end{array}\right) \Longrightarrow s + \mathbb{L}(A,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Probe für b:

$$A \cdot s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 26 \\ -11 \\ 17 \end{pmatrix} \underset{=}{\overset{\mathbb{Z}_7}{=}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = b \; ✓$$

Probe für Kern:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -14 \\ 21 \\ -7 \\ 28 \end{pmatrix} \underset{=}{\overset{\mathbb{Z}_7}{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ✓$$