Nachholklausur, 21.09.2011

Lineare Algebra I für Informatiker, SS 2011, Dr. T. Hanke

Name: Savas Gürcebe **Matrikelnummer:** ____________

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

1 Es sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ eine geordnete Basis von V. Eine weitere geordnete Basis $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ ist gegeben durch

$$u_1 := 2v_1 - 2v_2 - v_3, \quad u_2 := -2v_1 + 1v_2 + 2v_3, \quad u_3 := v_1 - v_2 - v_3.$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen ${}^{\mathcal{A}}T^{\mathcal{B}}$ und ${}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{A}}$. *(2+2 Punkte)*

$${}^{\mathcal{A}}T^{\mathcal{B}} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}} \qquad {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{A}} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}}$$

Bestimmen sie den Koordinatenvektor von $v_1 + v_2 + v_3$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$: *(1 Punkt)*

$$\kappa_{\mathcal{B}}(v_1 + v_2 + v_3) = \boxed{\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}}$$

Es sei $\varphi : V \to V$ die lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix $M_\varphi^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$: *(2 Punkte)*

$$M_\varphi^{\mathcal{B}} = \boxed{\begin{pmatrix} -4 & 10 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & -16 & 8 \end{pmatrix}}$$

Geben Sie Rang und Defekt von φ an. *(1+1 Punkte)*

$$\text{Rang}(\varphi) = \boxed{3}, \qquad \text{Defekt}(\varphi) = \boxed{0}$$

2	Es sei $\mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ der Körper mit 3 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_3^4$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$ und $b \in \mathbb{F}_3^4$ die folgenden sind: *(4 Punkte)* $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Ergebnis: $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + < \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >}$
3	Sei die lineare Abbildung φ definiert durch: $\varphi : \mathbb{R}^{1\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x^t \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}.$ (a) Geben Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^{1\times 3}$ und der geordneten Basis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ an: *(3 Punkte)* ${}^{\mathcal{B}}\mathrm{M}^{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) Geben Sie eine Basis $\mathcal{C}$ von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ an. *(2 Punkte)* $\mathcal{C} = <(0 \quad 1 \quad 1)>$ (c) Geben Sie eine Basis $\mathcal{D}$ von $\mathrm{Bild}(\varphi)$ an. *(2 Punkte)* $\mathcal{D} = < \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} >$
4	Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Seien $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $E = \langle v_1, v_2 \rangle$. (a) Bestimmen Sie einen Vektor v_2', der v_1 zu einer Orthogonalbasis von E ergänzt. $v_2' = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$ *(2 Punkte)*

Name: Savas Gürcebe Matrikelnummer:

4	(Fortsetzung) (b) Sei $u = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und sei $u = u' + u''$, wobei $u' \in E$ und u'' orthogonal zu E ist. Berechnen Sie u' und u''. $u' = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}$ $u'' = \boxed{\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}$ *(2 Punkte)* (c) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels α zwischen dem Vektor u aus Teil (b) und E. $\cos(\alpha) = \boxed{\sqrt{23/95}}$ *(1 Punkt)*
5	Für $t \in \mathbb{R}$ sei $B_t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$. (a) Bestimmen Sie die Determinante von B_t. $\boxed{2 - t}$ *(1 Punkt)* (b) Für welche Werte von t ist B_t invertierbar? $\boxed{t \neq 2}$ *(1 Punkt)* (c) Für welche $t \in \mathbb{Z}$ ist B_t invertierbar in $\mathbb{Z}^{3\times3}$? $\boxed{t \in \{1, 3\}}$ *(1 Punkt)* (d) Für welche $t \in \mathbb{R}$ besitzt B_t einen Eigenvektor? $\boxed{t \geq -\frac{1}{4}}$ *(1 Punkt)* (e) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von B_t. $\boxed{-\lambda^3 + 4\lambda^2 + (-5+t)\lambda + (2-t)}$ *(2 Punkte)* (f) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist B_t triangulierbar? $\boxed{}$ *(2 Punkte)* (g) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist B_t diagonalisierbar? $\boxed{t > -\frac{1}{4}}$ *(2 Punkte)*

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.	
6	(a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist die Matrix aus $\mathbb{R}^{n\times n}$, deren Einträge alle gleich 1 sind, positiv definit? *(2 Punkte)* (b) Zeigen Sie, dass es auf $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ kein Skalarprodukt gibt, so dass für die zugehörige Norm $\lvert\lvert \cdot \rvert\rvert$ und alle $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\lvert\lvert x\rvert\rvert = \sum_{i=1}^{n} \lvert x_i\rvert$. *(3 Punkte)*
7	Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und V ein n-dimensionaler Vektorraum über K. (a) Zeigen Sie, dass es genau dann einen Endomorphismus $\varphi : V \to V$ mit $\text{Bild}(\varphi) = \text{Kern}(\varphi)$ gibt, wenn n gerade ist. *(3 Punkte)* (b) Sei $\psi : V \to V$ ein invertierbarer Endomorphismus und $U \leq V$ ein ψ-invarianter Unterraum. Zeigen Sie, dass U auch ψ^{-1}-invariant ist. *(3 Punkte)*
8	Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass für jeden Eigenwert $c \in K$ von A und jedes Polynom $p(X) \in K[X]$ gilt, dass $p(c)$ ein Eigenwert von $p(A)$ ist. *(4 Punkte)*

Aufgabe 4 (eigene Unterpunkte)

(d) Bestimmen Sie $\dim(E)$.

(e) Bestimmen Sie $\dim(E^\perp)$ und $E^\perp$.

(f) Geben Sie $E^\perp$ orthonormiert an.

Aufgabe 1, Seite 1

Bestimmung ${}^{A}T^{B}$:

Eine lineare Abbildung $\varphi: U \longrightarrow V$ ist bereits eindeutig bestimmt, wenn man die Bilder aller Basisvektoren von U kennt.

$$
{}^{A}T^{B} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \chi(u_1) & \chi(u_2) & \chi(u_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Die Spalten der Basiswechselmatrix bestehen also aus den Koordinaten der Bilder der Basisvektoren von B, dargestellt bzgl. A.

Bestimmung ${}^{B}T^{A}$:

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid\cdot(-2) \quad \mid\cdot 2 \end{array}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\longrightarrow
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \mid\cdot(-1) \\ \mid\cdot 2 \end{array}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid\cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\longrightarrow
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid\cdot 3 \\ + \end{array}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ \mid\cdot(-1) \end{array}
$$

$$
\longrightarrow
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid : 2 \\ \mid\cdot(-1) \end{array}
\longrightarrow
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \end{matrix}}_{{}^{B}T^{A} \; (=({}^{A}T^{B})^{-1})} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)
$$

$$
\Longrightarrow {}^{B}T^{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.
$$

Aufgabe 1, Seite 2

Berechnet haben wir also die Inverse von der Basiswechselmatrix ${}^{A}T^{B}$.

$${}^{B}T^{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}. \quad \text{Daraus erhält man:}$$

$$\Big\Downarrow \text{ Dr. Thomas Notation}$$

$$M_{B,A}(id)$$

$$v_1 := u_1 - u_2 - 3u_3$$

$$v_2 := \quad -u_2 - 2u_3$$

$$v_3 := u_1 \quad - 2u_3$$

$$\Longrightarrow \mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \text{ ist}$$

Basis $\mathcal{A}$ von V bzgl. B.
bzw. (der Vollständigkeithalber)
durch die Aufgabenstellung gegeben

$$B = (u_1, u_2, u_3) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ ist}$$

Basis B von U bzgl. $\mathcal{A}$.

Bestimmung $\mathcal{K}_B(v_1 + v_2 + v_3)$:

Stelle v als Linearkombination in $B = (u_1, u_2, u_3)$ dar:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \quad \text{für} \quad a \in K^{n \times 1}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{K}_B(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ |\cdot(-2) \quad |\cdot 2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & -12 \\ 0 & -3 & 1 & 12 \\ -1 & 2 & -1 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ |\cdot 1 \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 12 \\ -1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-3) \quad |\cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \\ |\cdot(-1) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \Longrightarrow \mathcal{K}_B(v_1 + v_2 + v_3) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Bestimmung ${}^B M_\varphi^B \; (= M_\varphi^B)$:

Es gilt: ${}^B M_\varphi^B = {}^B T^A \cdot {}^A M_\varphi^A \cdot {}^A T^B$

$$\Longrightarrow {}^B M_\varphi^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\Longleftrightarrow {}^B M_\varphi^B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}}$$

$$\Longleftrightarrow {}^B M_\varphi^B = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 8 & -16 & 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1, letzte Seite

Bestimmung Rang(φ) und Defekt(φ):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 10 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -16 & 8 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} + \\ |\cdot 8 \quad |\cdot(-4) \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 10 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 8 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} |:2 \\ |\cdot(-1) \\ |:8 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} + \\ \\ |\cdot 2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} |\cdot 2 \\ \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \underline{\underline{\text{Rang}(\varphi) = 3}}$$

Rangsatz:

$$\varphi: V \longrightarrow W \quad (\text{hier ist } W = V)$$

Anzahl der Spalten einer Matrix

$$\dim V = \dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi)$$

$$\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$\operatorname{def}(\varphi) \quad + \quad \operatorname{rk}(\varphi)$$

hier

$$3 = \text{Defekt}(\varphi) + 3$$

$$\Longleftrightarrow \text{Defekt}(\varphi) = 3 - 3$$

$$\Longleftrightarrow \underline{\underline{\text{Defekt}(\varphi) = 0}}$$

Aufgabe 2, Seite 1

$\mathbb{F}_3$ bedeutet:

$$\begin{array}{cccccccc} & -6 & -3 & 0 & 3 & 6 & 9 & \\ \dots & -5 & -2 & 1 & 4 & 7 & 10 & \dots \\ & -4 & -1 & 2 & 5 & 8 & 11 & \end{array}$$

gesucht: $Sol(A, b) = s + Sol(A, 0)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ |\cdot(-2) \quad |\cdot(-1) \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ |:2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:2 \\ |\cdot(-1) \\ \\ + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ |\cdot(-2) \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 1 \\ \\ + \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1-ter Lösungsweg:

Die eingekreisten "1"-en sind die Pivotelemente, jetzt fügt man eine weitere Zeile hinzu die in der 4-ten Spalte eine "1" stehen hat und im b-Teil den Parameter P:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & P \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ \\ |\cdot(-1) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1+2P \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & P \end{array}\right)$$

$\longrightarrow$ nächste Seite geht's weiter

Aufgabe 2, Seite 2

Man kann jetzt die Lösung auf der rechten Seite ablesen. Dabei stellen die Zahlen ohne den Parameter P die spezielle Lösung dar und die Koeffizienten von P die Lösung des Kerns, also die Nulllösung. Zur Verdeutlichung kann man die obige Matrise auch so schreiben:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1+2P \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0+2P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2+0P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0+1P \end{array}\right) \Longrightarrow Sol(A,b) = s + Sol(A,0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Probe für b:

$$A \cdot s = \underset{4\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} = \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}} \overset{\mathbb{F}_3}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b \checkmark$$

Probe für Kern:

$$\underset{4\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{4\times 1}{\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}} \overset{\mathbb{F}_3}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Aufgabe 2, letzte Seite

2-ter Lösungsweg:

Wir nehmen die obige Matrixe mit den eingekreisten "1"-en und bennzeichnen jede Spalte mit einem Buchstaben:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Longrightarrow \begin{aligned} x + t &= 1 \\ y + t &= 0 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow$$

Pivotelemente (bleiben immer links vom Gleichheitszeichen)

$$x = 1 + 2t$$
$$y = 0 + 2t$$
$$z = 2 + 0t$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow Sol(A, b) = s + Sol(A, 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 3, Seite 1

Vorüberlegung:

$$\varphi: \mathbb{R}^{1\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X^t \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \mapsto \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} \cdot \underset{1\times 2}{\begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \mapsto \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 3a & a \\ 3b & b \\ 3c & c \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \mapsto \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 3b - 3c & b - c \\ 6a - 3b + 3c & 2a - b + c \end{pmatrix}}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b - 3c & b - c \\ 6a - 3b + 3c & 2a - b + c \end{pmatrix}$$

zu a)

Vorgehensweise:

1. Es wird von Basis $\mathcal{E}$ nach Basis B abgebildet.
2. Definitionsbereich ist $\mathbb{R}^{1\times 3}$, bedeutet stopfe jeden Vektor aus Basis $\mathcal{E}$ in die Funktion rein.
3. Stelle die abgebildete Basis $\mathcal{E}$ durch die andere neue Basis B dar.
4. Schreibe Koeffizienten <u>spaltenweise</u> auf.

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

1. Spalte

Aufgabe 3, Seite 2

$$\varphi(0\ \ 1\ \ 0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \end{array}$$

2. Spalte

$$\varphi(0\ \ 0\ \ 1) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

3. Spalte

$$\Longrightarrow {}^{B}M^{E}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

zu b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ |\cdot(-3)\ \ |\cdot 3\ \ |\cdot 1 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow + \\ |\cdot(-3) \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ |:2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & P \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow + \\ |\cdot 1 \end{array} \longrightarrow \text{nächste Seite geht's weiter}$$

Aufgabe 3, Seite 3 (letzte Seite)

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 1 & P \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0P \\ 0 & 1 & 0 & 1P \\ 0 & 0 & 1 & 1P \end{array}\right) \Longrightarrow \underline{\underline{Ker(\varphi) = \langle (0 \quad 1 \quad 1) \rangle}}$$

Zu c)

φ transponieren und dann rechnen:

$$\varphi^{tr} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} |:2 \\ |\cdot 1 \\ \xleftarrow{+} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} |\cdot 1 \\ \xleftarrow{+} \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{3 \quad 1 \quad 0 \quad 0} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 3 \quad 1} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{Bild(\varphi) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle}}$$

Aufgabe 4, Seite 1

zu a,

Mit $w_1 = v_1$ und den inneren Produkten

$$\langle v_2, w_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 \quad \text{und} \quad \|w_1\|^2 = \langle w_1, w_1\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 5 \text{ ist}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{10}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu b,

Es ist nun $\{w_1, w_2\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^4$.

Mit $\|w_2\|^2 = \langle w_2, w_2\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 18$ und

$\|w_i\| = \sqrt{\langle w_i, w_i\rangle}$, $i = 1,2$ führt das Normieren der zueinander orthogonalen Vektoren w_1, w_2

Aufgabe 4, Seite 2

$$b_1 = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{1}{\|w_2\|} \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

auf die Orthonormalbasis ONB $B = \{b_1, b_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Es gilt: $u = u' + u''$ laut Aufgabenstellung

$$\xRightarrow{\text{genauer}} u = proj_E(u') + proj_{E^\perp}(u'')$$

Zunächst aber:

$$\begin{aligned}
proj_E(u') &= \langle u, b_1 \rangle b_1 + \langle u, b_2 \rangle b_2 \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \cdot (3+2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{18} \cdot (-6+27-4+1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = u'
\end{aligned}$$

Bestimmung u'' bzw. $proj_{E^\perp}(u'')$:

$$u = u' + u''$$

$$\Leftrightarrow \quad u'' = u - u'$$

$$\Rightarrow \quad u'' = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4, Seite 3

zu c)

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}-3\\9\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{95}\cdot\sqrt{23}}$$

$$= \frac{-3+27-4+3}{\sqrt{95}\cdot\sqrt{23}}$$

$$= \frac{23}{\sqrt{95}\cdot\sqrt{23}} \quad \Big| \cdot \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{23}}$$

$$= \frac{23\cdot\sqrt{23}}{\sqrt{95}\cdot 23}$$

$$= \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{95}}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{\frac{23}{95}}}}$$

zu d)

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 3 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{matrix}|\cdot(-1)\\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 3 & -2 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow \dim(E)=2$$

zu e)

$$E^\perp = \{ X = (X_1 \;\; X_2 \;\; X_3 \;\; X_4)^{tr} \in \mathbb{R}^4 \mid \langle X, v_1\rangle = 0,\ \langle X, v_2\rangle = 0 \}$$

Also

$$\langle X, v_1\rangle = 0: \quad (-1)\cdot X_1 + 0\cdot X_2 + 0\cdot X_3 + 2\cdot X_4 = 0$$

$$\langle X, v_2\rangle = 0: \quad 0\cdot X_1 + 3\cdot X_2 + (-2)\cdot X_3 + 5\cdot X_4 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 5 & 0\end{array}\right)\begin{matrix}|\cdot(-1)\\ |:3\end{matrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & \underbrace{-2/3 \quad 5/3} & & 0\end{array}\right)\end{array}$$

$\dim(E^\perp) = 2$, weil

zwei Spalten der freien Variablen (hier also z und t) existieren. D. h. es werden nachher zwei Lösungsvektoren für $E^\perp$ ermittelt.

Aufgabe 4, letzte Seite 1/2

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 3 \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow + \\ |\cdot 2 \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 2P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \begin{array}{ll} \leftarrow & + \\ \leftarrow + & \\ & \\ |\cdot(-5) & |\cdot 2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2Q \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2P-5Q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & P \\ 0 & 0 & 0 & 1 & Q \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |:3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\cdot P + 2\cdot Q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (2/3)\cdot P + (-5/3)\cdot Q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\cdot P + 0\cdot Q \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\cdot P + 1\cdot Q \end{array}\right) \Rightarrow l_z = z\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$l_t = t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wähle $z = t = 3$ um die Brüche loszuwerden und erhalte:

$$E^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

zu f_1

$$E^\perp = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1^\perp}, \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{e_2^\perp} \right\rangle$$

Mit $w_1 = e_1^\perp$ und den inneren Produkten

$$\langle e_2^\perp, w_1 \rangle = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -10 \quad \text{und} \quad \|w_1\|^2 = \langle w_1, w_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 13$$

ist

Aufgabe 4, letzte Seite 2/2

$$w_2 = e_2^\perp - \frac{\langle e_2^\perp, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-10}{13} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 20/13 \\ 30/13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \\ -45/13 \\ 30/13 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Es ist nun $\{w_1, w_2\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^4$.

Mit $\|w_2\|^2 = \langle w_2, w_2\rangle = \begin{pmatrix} 6 \\ -45/13 \\ 30/13 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -45/13 \\ 30/13 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{10530}{169}$ und

$\|w_i\| = \sqrt{\langle w_i, w_i\rangle}$, $i = 1,2$ führt das Normieren der zueinander orthogonalen Vektoren w_1, w_2

$$b_1' = \frac{1}{\|w_1\|} \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$b_2' = \frac{1}{\|w_2\|} \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{10530}{169}}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -45/13 \\ 30/13 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10530}} \cdot \begin{pmatrix} 78 \\ -45 \\ 30 \\ 39 \end{pmatrix}$$

auf die Orthonormalbasis ONB $B^\perp = \{b_1^\perp, b_2^\perp\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10530}} \cdot \begin{pmatrix} 78 \\ -45 \\ 30 \\ 39 \end{pmatrix} \right\}$

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1170}} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -15 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 4, Bonusseite

Bestimmung $proj_{E^\perp}(u'')$ mit ONB $B^\perp$:

$$proj_{E^\perp}(u'') = \langle u, b_1^\perp \rangle b_1^\perp + \langle u, b_2^\perp \rangle b_2^\perp$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1170}} \begin{pmatrix} 26 \\ -15 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{1170}} \begin{pmatrix} 26 \\ -15 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \cdot (18+6) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1170} \cdot (-78-135+20+13) \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -15 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{24}{13} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{180}{1170} \cdot \begin{pmatrix} -26 \\ 15 \\ -10 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{24}{13} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{13} \cdot \begin{pmatrix} -26 \\ 15 \\ -10 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 48/13 \\ 72/13 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -52/13 \\ 30/13 \\ -20/13 \\ -26/13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -52/13 \\ 78/13 \\ 52/13 \\ -26/13 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}}} \longleftarrow \text{gleiches Ergebnis wie oben!}$$

Zu a,

$$CP(B_t) = \det(B_t - \lambda E)$$

$$\Longrightarrow \quad CP(B_t) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

$$\Longleftrightarrow \quad CP(B_t) = \det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & t \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

1-ter Lösungsweg:

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & t \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ | \cdot (-2+\lambda) \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -4+2\lambda & -2+t+3\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -4+2\lambda & -2+t+3\lambda-\lambda^2 \\ 1-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\left[(1-\lambda)\cdot(-2+t+3\lambda-\lambda^2)\right]$$

$$= -(-2+t+3\lambda-\lambda^2+2\lambda-t\lambda-3\lambda^2+\lambda^3)$$

$$= -(-2+t+5\lambda-t\lambda-4\lambda^2+\lambda^3)$$

$$= 2-t-5\lambda+t\lambda+4\lambda^2-\lambda^3$$

$$= \underline{\underline{-\lambda^3+4\lambda^2+(-5+t)\lambda+(2-t)}}$$

Aufgabe 5, Seite 2

2-ter Lösungsweg:

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & t \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\cdot(-1)^{2+2}\cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & t \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\cdot[(2-\lambda)\cdot(1-\lambda)-t]$$

$$= (1-\lambda)\cdot(2-2\lambda-\lambda+\lambda^2-t)$$

$$= (1-\lambda)\cdot(2-t-3\lambda+\lambda^2)$$

$$= 2-t-3\lambda+\lambda^2-2\lambda+t\lambda+3\lambda^2-\lambda^3$$

$$= -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+t\lambda+2-t$$

$$= -\lambda^3+4\lambda^2+(-5+t)\lambda+(2-t)$$

Zu b,

Invertierbar falls Determinante ungleich Null:

$$2-t \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad t \neq 2$$

Zu c,

$$2-t=1 \qquad \text{und} \qquad 2-t=-1$$

$$\Longleftrightarrow \quad -t=-1 \qquad\qquad \Longleftrightarrow \quad -t=-3$$

$$\Longleftrightarrow \quad t=1 \qquad\qquad \Longleftrightarrow \quad t=3$$

$$\Longrightarrow \quad t \in \{1,3\}$$

Aufgabe 5, Seite 3

zu d)

$$CP(B_t) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + (-5+t)\lambda + (2-t)$$

Nullstelle erraten:

$$\lambda_1 = 1$$

$$(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + t\lambda + 2 - t) : (\lambda - 1) = -\lambda^2 + 3\lambda - 2 + t$$

$$\begin{array}{l}
-(-\lambda^3 + \lambda^2) \\
\hline
3\lambda^2 - 5\lambda \\
-(3\lambda^2 - 3\lambda) \\
\hline
-2\lambda + t\lambda \\
-(-2\lambda + 2) \\
\hline
-2 + t\lambda + 2 - t \\
\hline
t\lambda - t \\
-(t\lambda - t) \\
\hline
0
\end{array}$$

$$-\lambda^2 + 3\lambda - 2 + t = 0 \quad | : (-1)$$

Hier wurde durch (-1) geteilt. Diesen Schritt müssen wir umkehren indem man hier mit (-1) multipliziert. (-1) am Besten mit $(\lambda - 1)$ multiplizieren, dann stimmt's.

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + (2-t) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{2/3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{4(2-t)}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{2/3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9-8+4t}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{2/3} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4t}$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{1+4t}}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \frac{3-\sqrt{1+4t}}{2}$$

Alternative Schreibweise für charakteristisches Polynom:

$$p(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot \left(\lambda - \frac{3+\sqrt{1+4t}}{2}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{3-\sqrt{1+4t}}{2}\right) \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = (1-\lambda) \cdot \left(\lambda - \frac{3+\sqrt{1+4t}}{2}\right) \cdot \left(\lambda - \frac{3-\sqrt{1+4t}}{2}\right)$$

Aufgabe 5, Seite 4

Probe:

$$p(\lambda) = (1-\lambda)\cdot\left(\lambda - \frac{3+\sqrt{1+4t}}{2}\right)\cdot\left(\lambda - \frac{3-\sqrt{1+4t}}{2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow p(\lambda) = (1-\lambda)\cdot\left(\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{\sqrt{1+4t}}{2}\lambda - \frac{3}{2}\lambda - \frac{\sqrt{1+4t}}{2}\lambda + \frac{9}{4} - \frac{(1+4t)}{4}\right)$$

$$\Longleftrightarrow p(\lambda) = (1-\lambda)\cdot\left(\lambda^2 - \frac{6}{2}\lambda + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} - \frac{4}{4}t\right)$$

$$\Longleftrightarrow p(\lambda) = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 3\lambda + 2 - t)$$

$$\Longleftrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - t - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + t\lambda$$

$$\Longleftrightarrow p(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + t\lambda + 2 - t$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{p(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + (-5+t)\lambda + (2-t)}$$

Die Probe ergibt natürlich $CP(B_t)$!

Aufgabe 5, letzte Seite

Damit λ_2 und λ_3 gültige Eigenwerte werden aus denen man dann Eigenvektoren berechnen kann darf der Term unter der Wurzel nicht negativ werden:

$$
\begin{aligned}
& 1+4t \geq 0 \quad |-1 \\
\Leftrightarrow \quad & 4t \geq -1 \quad |:4 \\
\Leftrightarrow \quad & \underline{\underline{t \geq -\frac{1}{4}}}
\end{aligned}
$$

zu g,

Dafür müssen λ_2 und λ_3 unterschiedliche Eigenwerte bilden, also muß der Ausdruck unter der Wurzel echt größer als Null sein:

$$
\begin{aligned}
& 1+4t > 0 \quad |-1 \\
\Leftrightarrow \quad & 4t > -1 \quad |:4 \\
\Leftrightarrow \quad & \underline{\underline{t > -\frac{1}{4}}}
\end{aligned}
$$

Bonusaufgabe (aus der Übung), Aufgabe 15

a) ...

b) Sei $a \in \mathbb{Q}$ eine beliebige Konstante. Für welche Werte von a hat das folgende homogene lineare Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$ nicht-triviale Lösungen?

$$\begin{aligned} aX_1 + 2X_2 + 2X_3 &= 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 &= 0 \\ 2X_1 + X_2 + aX_3 &= 0 \end{aligned}$$

Lösung

Fange zuerst mit b) an ;-)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-a) \quad |\cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-a & 2-a & 0 \\ 0 & -1 & -2+a & 0 \end{array}\right) |\cdot(-1)$$

hier geht's weiter

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2-a & 2-a & 0 \\ 0 & 1 & 2-a & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-a & 0 \\ 0 & 2-a & 2-a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-2+a) \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & -2+3a-a^2 & 0 \end{array}\right) |\cdot(-1) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 2-3a+a^2 & 0 \end{array}\right)$$

N.R.:

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Rightarrow a_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}$$

$$\Leftrightarrow a_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\Leftrightarrow a_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 = 2 \text{ und } a_2 = 1$$

$\Rightarrow a^2 - 3a + 2$ lautet in Linearfaktoren also wie folgt: $(a-1)\cdot(a-2)$.

Bonusaufgabe (aus der Übung), Aufgabe 15

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)\cdot(a-2) & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$a = 1,2 \Rightarrow$ Unendlich viele Lösungen

$a \neq 1,2 \Rightarrow$ Genau eine Lösung

Falls $\boxed{a = 1}$, dann

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow\!+ \\ |\cdot(-1) \\ \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \atop \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y + z = 0 \end{array}$$

Pivotelemente (bleiben links vom Gleichheitszeichen)

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -z \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}(A,0) = \underline{\underline{\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{Q} \right\}}}.$$

Falls $\boxed{a = 2}$, dann

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow\!+ \\ |\cdot(-1) \\ \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \atop \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x + z = 0 \\ y = 0 \end{array}$$

Pivotelemente (bleiben links vom Gleichheitszeichen)

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x = -z \\ y = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}(A,0) = \underline{\underline{\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{Q} \right\}}}.$$