Übungsblatt 13

Lineare Algebra I für Informatiker, Dr. Frank Lübeck, SS 2010

Für Matrikelnummer [redacted]
Abgabezeitpunkt: Do 22 Jul 2010 10:00:00 CEST
Dieses Blatt wurde erstellt: Do 15 Jul 2010 18:47:36 CEST

Diese Übung besteht aus typischen Klausuraufgaben. Von den 50 erwerbbaren Punkten bräuchten Sie 25 zum Bestehen. Bis zu 40 Ihrer erworbenen Punkte werden auf Ihren Hausaufgabenpunktestand angerechnet (Online oder schriftlicher Teil, wie benötigt). Zur Klausurzulassung sind damit mindestens je 100 Punkte in den Online-Aufgaben und schriftlichen Aufgaben, sowie mindestens 240 Punkte insgesamt nötig.
Bitte werfen Sie Ihre Lösungen (inklusive der ausgefüllten Aufgabenblätter) **getackert** in das Ihrer Gruppennummer entsprechende Fach im Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik. Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt deutlich Ihre Matrikelnummer, Ihren Namen und Ihre **Gruppennummer**.

Bearbeiten Sie die folgenden Rechenaufgaben und schreiben Sie die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Platz. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

74 Es sei $A_a \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_a. *(1 Punkt)*

(b) Für welche Werte von a ist A_a invertierbar? *(1 Punkt)*

(c) Für welche Werte von $a \in \mathbb{Z}$ ist $A_a^{-1} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$? *(1 Punkt)*

(d) Es sei $a = -1$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_{-1}. *(1 Punkt)*

(e) Es sei $a = -1$. Geben Sie Basen für die Eigenräume von A_{-1} an. *(3 Punkte)*

.

75	Es sei $\mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ der Körper mit 3 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_3^5$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_3^4$ die folgenden sind: *(5 Punkte)* $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ Ergebnis: $\boxed{}$
76	Es sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt $(u,v) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ für $u = (u_1,u_2,u_3)^t$ und $v = (v_1,v_2,v_3)^t$ gegeben. (a) Bestimmen Sie aus *(3 Punkte)* $x = (1,1,1)^t, \quad y = (1,1,0)^t, \quad z = (1,0,0)^t$ mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis O. (b) Gegeben seien $u,v,w \in \mathbb{R}^3$ mit *(je 1 Punkt)* $\kappa_O(u) = (-1,2,3)^t, \quad \kappa_O(v) = (0,-3,1)^t, \quad \kappa_O(w) = (-2,-4,2)^t.$ Bestimmen Sie $\lVert u\rVert = \boxed{}, \quad \lVert v-w\rVert = \boxed{}, \quad \lVert v+w\rVert = \boxed{}, \quad (v,w) = \boxed{}.$

77	Es sei $\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die lineare Abbildung $$\varphi(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A + A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$ (a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der geordneten Basis $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$. *(4 Punkte)* (b) Bestimmen Sie den Rang von φ. Rang$(\varphi) =$ $\boxed{}$ *(1 Punkt)* (c) Geben Sie eine Basis von Kern(φ) an. *(2 Punkte)* .
78	Betrachten Sie den von $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto \sin x$, und $f_3 : x \mapsto \cos x$ erzeugten Untervektorraum V von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Es bezeichne $\varphi : V \to V, f \mapsto f'$ die Ableitung, d.h. $\varphi(\sin x) = \cos x$ und $\varphi(\cos x) = -\sin x$. (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_φ und das Minimalpolynom μ_φ von φ. *(1 + 1 Punkte)* $\chi_\varphi =$ $\boxed{}$ $\mu_\varphi =$ $\boxed{}$ (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von φ. $\boxed{}$ *(1 Punkt)* (c) Geben Sie Basen für die Eigenräume von φ an. *(1 Punkt)* .

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

79	Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum mit $\dim_K V \geq 2$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $0 \neq v \in V$ ein linear unabhängiges 2-Tupel (u,w) gibt mit $v = u + w$. *(3 Punkte)*
80	Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mit L werde der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A bezeichnet (also $L = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\}$). Weiter bezeichne $L^\perp$ den Orthogonalraum von L bezüglich des Standardskalarproduktes von $\mathbb{R}^n$ (also $L^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v\rangle = 0$ für alle $v \in L\}$). Zeigen Sie, dass $L^\perp$ gleich dem Spaltenraum von A^t ist. *(5 Punkte)*
81	Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schiefsymmetrisch, d.h. $A^t = -A$. Beweisen Sie, dass $\det(A) = 0$ ist. *(3 Punkte)*
82	Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$ mit $(A - E_n)^n = 0$ und $(A - E_n)^j \neq 0$ für $1 \leq j < n$. Zeigen Sie: *(2+1+1 Punkte)* (a) A ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. (b) A ist invertierbar. (c) A ist genau dann ähnlich zu einer Diagonalmatrix, wenn $n = 1$ ist.
83	Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix geschrieben werden kann. *(5 Punkte)*

Abgabe bis spätestens am Donnerstag, dem 22. Juli 2010, um 10 Uhr am Zettelkasten. Lösungen der Aufgaben werden Donnerstag online veröffentlicht und in der Fragestunde besprochen.
Bitte geben Sie diese Hausaufgabe nur ab, falls Ihnen noch Punkte zur Klausurzulassung fehlen, um den Korrekturaufwand für die Hilfskräfte minimal zu halten.

Aufgabe 1. Es sei $A_a \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A_a. $\boxed{a+1}$

(b) Für welche Werte von a ist A_a invertierbar? $\boxed{a \neq -1}$

(c) Für welche Werte von $a \in \mathbb{Z}$ ist $A_a^{-1} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$? $\boxed{a \in \{0, -2\}}$

(d) Es sei $a = -1$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_{-1}.

Es ist $\chi_{A_{-1}} = X(X+1)(X-2)$, also sind die Eigenwerte $\boxed{0, -1, 2}$

(e) Es sei $a = -1$. Geben Sie Basen für die Eigenräume von A_{-1}.

Der Eigenraum von A_{-1} zum Eigenwert λ ist die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $(A_{-1} - \lambda E_3)x = 0$. Damit ist

$$\boxed{E_0(A) = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle,\ E_{-1}(A) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle,\ E_2(A) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle.}$$

Aufgabe 2. Es sei $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ der Körper mit 3 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_3^5$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_3^4$ die folgenden sind:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $\boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle}$

Aufgabe 3. Es sei $\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die lineare Abbildung

$$\varphi(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A + A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der geordneten Basis $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie den Rang von φ. Rang$(\varphi) = \boxed{3}$

(c) Geben Sie eine Basis von Kern(φ) an.

$$\mathrm{Kern}(\varphi) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Aufgabe 4. Es sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt $(u, v) = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ für $u = (u_1, u_2, u_3)^t$ und $v = (v_1, v_2, v_3)^t$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie aus

$$x = (1, 1, 1)^t, \quad y = (1, 1, 0)^t, \quad z = (1, 0, 0)^t$$

mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis $\mathcal{O}$.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

(b) Gegeben seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\kappa_{\mathcal{O}}(u) = (-1, 2, 3)^t, \quad \kappa_{\mathcal{O}}(v) = (0, -3, 1)^t, \quad \kappa_{\mathcal{O}}(w) = (-2, -4, 2)^t.$$

Bestimmen Sie

$||u|| = \boxed{\sqrt{14}}$, $||v - w|| = \boxed{\sqrt{6}}$, $||v + w|| = \boxed{\sqrt{62}}$, $(v, w) = \boxed{14}$.

Aufgabe 5. Betrachten Sie den von $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto \sin x$, und $f_3 : x \mapsto \cos x$ erzeugten Untervektorraum V von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Es bezeichne $\varphi : V \to V, f \mapsto f'$ die Ableitung, d.h. $\varphi(\sin x) = \cos x$ und $\varphi(\cos x) = -\sin x$.

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_φ und das Minimalpolynom μ_φ von φ.

$$\chi_\varphi = \boxed{X(X^2+1)} \qquad \mu_\varphi = \boxed{X(X^2+1)}$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von φ. $\boxed{0}$

(c) Geben Sie Basen für die Eigenräume von φ an.

$$\boxed{E_0(\varphi) = \langle f_1 \rangle}$$

Aufgabe 6. Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum mit $\dim_K V \geq 2$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $0 \neq v \in V$ ein linear unabhängiges 2-Tupel (u, w) gibt mit $v = u + w$.

Beweis: Da $\dim_K V \geq 2$ ist, existiert ein $v' \in V$, sodass das 2-Tupel (v, v') linear unabhängig ist. Damit ist auch das 2-Tupel $(v - v', v')$ linear unabhängig, und wir haben $v = (v - v') + v'$. Folglich wählen wir $u = v - v'$ und $w = v'$.

Aufgabe 7. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mit L werde der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A bezeichnet (also $L = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0\}$). Weiter bezeichne $L^\perp$ den Orthogonalraum von L bezüglich des Standardskalarproduktes von $\mathbb{R}^n$ (also $L^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in L\}$). Zeigen Sie, dass $L^\perp$ gleich dem Spaltenraum von A^t ist.

Beweis: Es ist $Av = 0$ für alle $v \in L$. Damit ist $\langle z^t, v \rangle = 0$ und z^t ist eine Spalte von A^t für jede Zeile z von A. Es folgt $SR(A^t) \subseteq L^\perp$. Weiter ist $V = L \oplus L^\perp$ und $\dim_K V = \dim_K L + \mathrm{Rang}(A)$. Also ist $\dim_K L^\perp = \mathrm{Rang}(A) = \dim_K SR(A^t)$.

Aufgabe 8. Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schiefsymmetrisch, d.h. $A^t = -A$. Beweisen Sie, dass $\det(A) = 0$ ist.

Beweis: Es ist $\det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$.

Aufgabe 9. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$ mit $(A - E_n)^n = 0$ und $(A - E_n)^j \neq 0$ für $1 \leq j < n$. Zeigen Sie: *(2+1+1 Punkte)*

(a) A ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen.

> **Beweis:** Es ist $\mu_A \mid (X-1)^n$ und da $(A - E_n)^j \neq 0$ für $1 \leq j < n$ ist, folgt $\mu_A = (X-1)^n$. Da $\deg \chi_A = n$ ist, ist $\mu_A = \chi_A$, d.h. χ_A zerfällt in Linearfaktoren. Also ist A trigonalisierbar und alle Eigenwerte sind 1.

(b) A ist invertierbar.

> **Beweis:** Nach (a) ist A ähnlich zu einer invertierbaren Matrix, also ist A selbst invertierbar.

(c) A ist genau dann ähnlich zu einer Diagonalmatrix, wenn $n = 1$ ist.

> **Beweis:** Das Minimalpolynom zerfällt nach (a) genau dann in paarweise verschiedene Linearfaktoren, wenn $n = 1$ ist.

Aufgabe 10. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix geschrieben werden kann.

> **Beweis:** Zur Existenz: Es ist $A = \frac{1}{2}[(A + A^t) + (A - A^t)]$. Dabei ist $\frac{1}{2}(A + A^t)$ symmetrisch und $\frac{1}{2}(A - A^t)$ schiefsymmetrisch.
> Zur Eindeutigkeit: Es sei $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Matrix B sei symmetrisch und C sei schiefsymmetrisch mit $A = B + C$. Dann ist $M := B - \frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2}(A - A^t) - C$ eine simultan symmetrische und schiefsymmetrische Matrix. D.h. wir haben $M = M^t = -M$, und damit ist $M = 0$.
