Lineare Algebra I
für Informatiker

Eine Liste der Autoren kann unter
http://wiki.infostudium.de/wiki/Mitschrift_Hanke_SS07
eingesehen werden.

Achtung: Die Benutzung ist nur für den RWTH-internen Gebrauch gedacht.

SS 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Gleichungssysteme 20

2 Vektorräume und lineare Abbildungen 35

Grundlagen

§Abbildungen

(0.1) Definition (Abbildung)

Seinen M, N Mengen. Eine **Abbildung** f **von** M **nach** N ordnet jedem $x \in M$ ein Element $f(x) \in N$ zu, geschrieben:

$$f : M \to N, x \mapsto f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} M \text{ Definitionsbereich} \\ N \text{ Wertebereich (Bildbereich)} \end{array}\right\} \text{immer mit angeben!}$$

$f(x) \in N$ ist <u>das</u> **Bild** von $x \in M$
$x \in M$ heißt <u>ein</u> **Urbild** von $y = f(x) \in N$

(0.2) Beispiele

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, i \mapsto i^2$

Eine Abbildung mit Def. Bereich $\mathbb{N}$ heißt **Folge**, geschrieben $a_1, a_2, \ldots a_n$ mit $a_i = f(i)$

b) Die Addition in $\mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (a,b) \mapsto a+b \ (a,b \in \mathbb{Z})$

c) Sei M eine Menge

$\mathrm{id}_M = M \to M, x \mapsto x$ heißt **Identität** von M.

d) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\underline{n} := \{1,2,\ldots,n\}$

zB. $\underline{3} = \{1,2,3\}$

$f : \underline{3} \to \mathbb{R}, f(1) = 0, f(2) = \sqrt{3}, f(3) = -\frac{1}{2}$

Eine Abbildung mit Def. Bereich $\underline{n}$ heißt **n-Tupel**, geschrieben

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $a_i = f(i)$, also hier: $\left(0, \sqrt{3}, -\frac{1}{2}\right)$

2-Tupel heißt **Paar**, 3-Tupel heißt **Tripel**

(0.3) Bemerkung

Zwei Abbildungen $f : M \to N$ und $g : M' \to N'$ sind gleich (geschrieben $f = g$) wenn:

i) $M = M'$

ii) $N = N'$

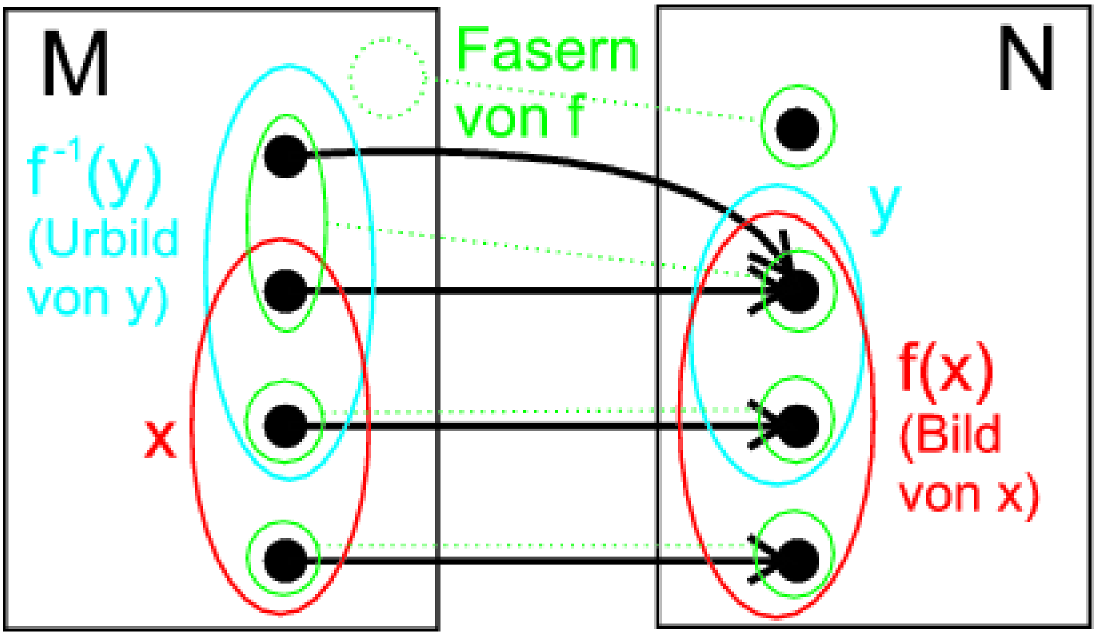
iii) $\forall x \in M : f(x) = g(x)$

z.B.: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, i \mapsto i^2$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i \mapsto i^2$
$f \neq g$!

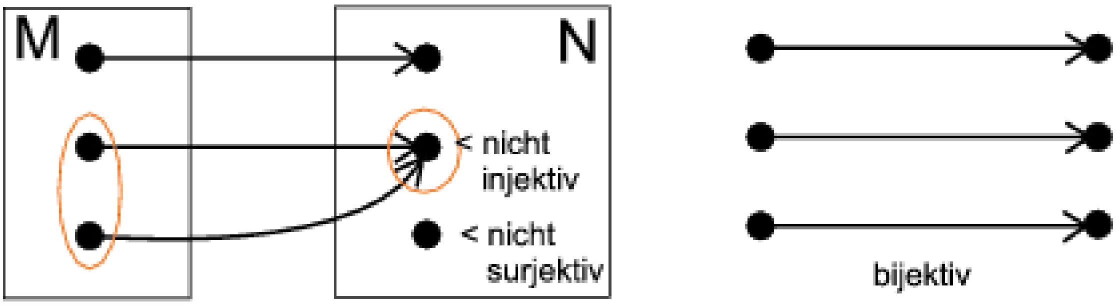
(0.4) Definition (Eigenschaften von Abbildungen)

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung, sei $X \subset M, Y \subset N$

1. $f(x) := \{f(x) | x \in X\} \subset N$ heißt **Bild** von X
2. $f^{-1}(Y) := \{x \in M | f(x) \in Y\} \subset M$ heißt **Urbild** von Y
3. Die Mengen $f^{-1}(\{y\}) \subset M (y \in N)$ heißen **Fasern** von f



4. f heißt **surjektiv**, wenn $f(M) = N$
5. f heißt **injektiv**, wenn $\forall\, x, x' \in M$:wenn $x \neq x'$ dann $f(x) \neq f(x')$
6. f heißt **bijektiv**, wenn f surjektiv und injektiv
7. Die Teilmenge von $M \times N : G_f := \{(x,y) | x \in M, y = f(x)\}$ heißt **Graph** von f



(0.5) Bemerkung

Für $f : M \to N$ sind äquivalent:

i) f ist injektiv

ii) Sind $x, x' \in M$ mit $f(x) = f(x')$ dann $x = x'$

iii) jede Faser von f hat höchstens ein Element

iv) $\forall y \in N$ hat die Gleichung $f(x) = y$ höchstens eine Lösung für $x \in M$

Ebenso äquivalent

i) f ist surjektiv

ii) Jede Faser von f ist nicht leer

iii) $\forall y \in N$ hat die Gleichung $f(x) = y$ mindestens eine Lösung

Ausserdem äquivalent

i) f ist bijektiv

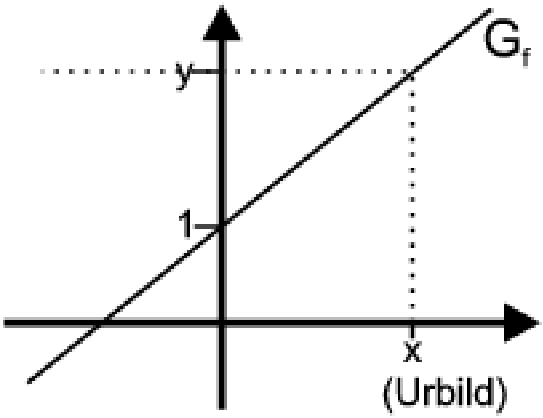
ii) Jede Faser von f hat genau ein Element

iii) $\forall y \in N$ hat die Gleichung $f(x) = y$ genau eine Lösung

$$\text{Ist } f \left\{ \begin{array}{c} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{array} \right\} \text{ dann } \varphi \left\{ \begin{array}{c} |M| \leq |N| \\ |M| \geq |N| \\ |M| = |N| \end{array} \right\}$$

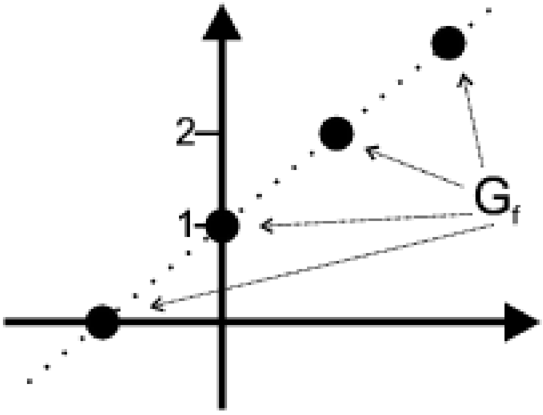
(0.6) Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$



$G_f := \{(x,y) | x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$ f bijektiv.

b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto 2x + 1$



injektiv, nicht surjektiv

Bemerkung:

Die geeignete Einschränkung von Definitions- bzw. Wertebereich macht jede Abbildung surjektiv bzw. injektiv.

GRAFIK

$f : M' \to N', x \mapsto f(x)$ ist *bijektiv*.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

GRAFIK

Fasern von f

$$f^{-1}(\{y\}) = \begin{cases} \{\sqrt{y}, -\sqrt{y}\} & \text{falls } y \geq 0 \\ \{\ \} & y < 0 \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ surjektiv,

$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ injektiv,

$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ bijektiv

$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$

d) Hashfunktion/Checksumme/Fingerprint

md5 : $\{\text{Texte}\} \to 2^{128}$

kann nicht injektiv, sollte surjektiv sein und „gleich große“ Fasern haben.

e) Verschlüsselung

crypt : $2^k \to 2^k$ muss bijektiv sein. Umgekehrt „decrypt“; Text der Länge k bit.

z.B. $c : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8, x \mapsto 3x$ bijektiv?
Gegeben: $y \in \mathbb{Z}_8$, löse $c(x) = y$.
$ggT(3,8) = 1$, also 3 invertierbar in $\mathbb{Z}_8$, also $3x = y$ eindeutig lösbar, also c bijektiv. Lösung:
$3^{-1} = \frac{1}{3} = \frac{1+8}{3} = \frac{9}{3} = 3 \quad c(x) = 3x = y \quad x = 9x = 3y \quad x := 3y$ ist eindeutige Lösung von $c(x) = y$.

(0.7) Definition (Umkehrabbildung)

Sei $f : M \to N$ bijektiv. Die Abbildung $f^{-1} : N \to M, y \to$ eindeutige Lösung von $x \in M$ von $f(x) = y$ heißt **Umkehrabbildung** von f.

Achtung: $\underbrace{f^{-1}(x)}_{\in M}$ heißt nicht $\underbrace{f(x)^{-1}}_{\in N}$

(0.8) Definition (Komposition)

Seien $g : L \to M, f : M \to N$ Abbildungen. Die Abbildung
$f \circ g : L \to N, x \to f \circ g(x) := f(g(x))$ wird Komposition von f mit g genannt.

Achtung: Bildbereich von g = Def. Bereich von f

(0.9) Beispiel

$f : M \to N$ bijektiv, dann $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$

(0.10) Satz

Sind f, g bijektiv, dann sind $f \circ g$ bijektiv und $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

(0.11) Beispiele

a) Sei $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$

Ist $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$ dann ist die Abbildung $m_a : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, x \mapsto ax$ bijektiv

Auslassung: Beweis dazu

b) $m_3 : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6, x \mapsto 3x$ ist nicht injektiv: $m_3(2) = 0 = m_3(0)$ und nicht surjektiv: $1 \notin m_3(\mathbb{Z}_6)$

c) $f, g : \mathbb{Z}_{11} \to \mathbb{Z}_{11}, f(x) = x + 3, g(x) = 7x$

$f \circ g(x) = f(7x) = 7x + 3$

$f^{-1}(y) = y - 3$

$g^{-1}(y) = 8y$

Erinnerung (0.10): $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

$(f \circ g)^{-1}(y) = g^{-1} \circ f^{-1}(y) = g^{-1}(y-3) = 8(y-3) = 8y - 24 = 8y - 2 = 8y + 9$

§Körper

(0.12) Definition (Körper)

Eine Menge K heißt **Körper**, wenn zwei Abbildungen

$+ : K \times K \to K, (a,b) \mapsto a+b$

$* : K \times K \to K, (a,b) \mapsto a*b$

definiert sind, für die gelten:

(A1) $a+(b+c) = (a+b)+c \qquad \forall a,b,c \in K$

(A2) $\exists 0 \in K$ mit $a+0 = 0+a = a \qquad \forall a \in K$

(A3) $\forall a \in K$ gibt es $-a \in K$ mit $a+(-a) = (-a)+a = 0$

(A4) $a+b = b+a \qquad \forall a,b \in K$

(A5) $a*(b*c) = (a*b)*c \qquad \forall a,b,c \in K$

(A6) $\exists 1 \in K$ mit $1*a = a*1 = a \qquad \forall a \in K$

(A7) $\forall a \in K$ gibt es $a^{-1} \in K$ mit $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

(A8) $ab = ba \qquad \forall a,b \in K$

(A9) $a(b+c) = ab+ac$ und $(a+b)c = ac+bc \qquad \forall a,b,c \in K$

(0.13) Folgerungen

Als Folgerungen von (0.12) gelten auch:

(A2'): $\exists$ **genau ein** $0 \in K$ mit $a+0 = 0+a = a \quad \forall a \in K$

(A3'): $\forall a \in K$ gibt es **genau ein** $-a \in K$ mit $a+(-a) = (-a)+a = 0$

(B1): $\forall a \in K : a+a = a \Rightarrow a = 0$

(B2): $\forall a \in K : 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

(B3): $a,b \in K$ mit $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$

(B4): $\forall a,b \in K : a(-b) = (-a)b = -(ab)$

Beweis:

(A') Seien $0, 0' \in K$ mit $a+0 = 0+a = a$ und $a+0 = 0'+a = a\forall a \in K$

Dann folgt:

(A3') Seien $a,b,b' \in K$ mit $a+b = b+a = 0$ und $a+b = b'+a = 0$

Dann folgt:

$b \overset{A2}{=} a+b = (b'+a)+b \overset{A1}{=} b'+(a+b) = b^{'}+0 \overset{A2}{=} b'$

(B1) Aus $a+a = a$ folgt $a \overset{A2}{=} a+0 \overset{A3}{=} a+(a+(-a)) \overset{A1}{=} (a+a)+(-a) \overset{A3}{=} 0$

(B2) $0 \cdot a = a \overset{A2}{=} (0+0) \cdot a \overset{A9}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a \overset{B1}{\Leftrightarrow} 0 \cdot a = 0$

Ebenso: $a \cdot 0 = 0$

(0.14) Bemerkung

Sei K Körper. Für $a,b \in K$ schreiben wir kurz

$a-b$	für	$a+(-b)$	
ab	für	$a \cdot b$	
$\frac{a}{b}, a/b$	für	$a \cdot b^{-1}$	
a^n	für	$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{mal}}$	$(n \in \mathbb{N})$

(0.15) Beispiele

a) Bekannte Körper

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind Körper (mit den üblichen Abbildungen $+$ und $\cdot$)

$\mathbb{Z}$ ist kein Körper (A7 ist nicht gegeben)

b) Komplexe Zahlen

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den Abbildungen

$+ : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, ((a,b),(a',b')) \mapsto (a+a', b+b')$

$\cdot : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, ((a,b),(a',b')) \mapsto (aa'-bb', ab'+a'b)$

ist ein Körper (nämlich $\mathbb{C}$, (a,b) ist $(a+bi)$)

c) Kleinster endlicher Körper

$\{0,1\}$ mit den Abbildungen $+, \cdot$ definiert durch die Verknüpfungstabellen

$$\left.\begin{array}{ccc} + & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right\}\text{XOR} \qquad \left.\begin{array}{ccc} \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right\}\text{AND} \qquad \text{Dieser Körper heißt } \mathbb{F}_2 \text{ (oder } \mathbb{Z}_2\text{)}$$

d) Primzahlen-Restklassen

Sei p Primzahl. Dann ist $\mathbb{Z}_p$ ein Körper $\mathbb{Z}_p$ erbt alle Axiome bis auf (A7) von $\mathbb{Z}$

Weil p Primzahl gilt $\text{ggT}(b,p) = 1 \forall b \in \{0, \dots p-1\}$

$\overset{\text{euklid. Algo.}}{\Rightarrow} \forall a \in \{0, \dots, p-1\} \exists b : ab = 1$

e) Weiterer endlicher Körper

*A*uslassung: Nichts großartig aufregendes

§Gruppen und Ringe

(0.16) Definition (Gruppe)

Sei G eine Menge und $*: G\times G \to G, (a,b)\mapsto a*b$ eine Abbildung, genannt **Verknüpfung** oder **Operation**.
$(G,*)$ (oder kurz G) heißt **Gruppe**, wenn gilt:
(G1) $(x*y)*z = x*(y*z) \forall z,y,z \in G$
(G2) $\exists e \in G : e*x = x = x*e \forall x \in G$
(G3) $\forall x \in G : \exists x' \in G : x*x' = e = x'*x$
$(G,*)$ heißt **abelsche Gruppe**, wenn zusätzlich gilt:
(G4) $x*y = y*x \forall x,y \in G$
e heißt **neutrales Element** von G
x' in (G3) heißt **inverses Element** von x

(0.17) Bemerkung

- i) In der Regel schreiben wir G „multiplikativ“ dh. $\cdot$ für $*$, 1 für e, x^{-1} für x'
- ii) Neutrales Element und Inverses sind jeweils eindeutig
- iii) Wenn G abelsch ist, schreiben wir G meistens „additiv“, dh. $+$ für $*$, 0 für e, $-x$ für x'
- iv) Wegen (G1) lassen wir Klammern häufig weg zB. $x*y*z = (x*y)*z = x*(y*z)$

(0.18) Beispiele

a) $(\mathbb{Z},+)$ abelsche Gruppe, $(\mathbb{Z}_n,+)$ abelsche Gruppe

b) K Körper
$(K,+)$ abelsche Gruppe „additive Gruppe von K“
$(K\setminus\{0\},\cdot)$ abelsche Gruppe „multiplikative Gruppe von K“

c) M Menge
$S_M := \{f : M \to M | f \text{ist bijektiv}\}$
$(S_M,\circ)$ ist Gruppe, wobei $\circ =$ Komposition von Abbildung
(G1) $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$ also $(f\circ g)\circ h(x) = f(g(h(x))) = f\circ(g\circ h(x))$
(G2) $e = \mathrm{id}_M$
(G3) f^{-1} =Umkehrabbildung (vgl. Bsp. (0.9))

d) $n\in\mathbb{N}, M = \underline{n}$
$S_n := S_M = S_{\underline{n}}$ heißt **symmetrische Gruppe** und ihre Elemente Permutationen
$|S_n| = n!$

e) Sei $(G,\cdot)$ Gruppe $n\in\mathbb{N}$
Betrache $G^n := \underbrace{G\times G\times\ldots\times G}_{n-\text{mal}} = \{(a_1\ldots a_n)\ |a_i\in G\}$
mit „komponentenweiser“ Verknüpfung, d.h.

$(a_1,\dots,a_n)\cdot(b_1,\dots,b_n) := (a_1\cdot b_1,\dots,a_n\cdot b_n)$

$(G^n,\cdot)$ ist Gruppe und ist G abelsch, dann auch G^n

f) M Menge. Betrache: $M^G := \{f : M \to G\}$

mit der Verknüpfung $(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x)$

$(M^G,\cdot)$ ist Gruppe

(0.19) Definition (Gruppenhomomorphismus)

Seien G,H Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ heißt **Gruppenhomomorphismus** wenn

$$\varphi(\underbrace{x\cdot y}_{\text{in } G}) = \underbrace{\varphi(x)\cdot\varphi(y)}_{\text{in } H} \qquad \forall x,y \in G$$

Ein Homomorphismus $\varphi : G \to H$ heißt

$$\left\{\begin{array}{r}\text{Monomorphismus}\\ \text{Epimorphismus}\\ \text{Isomorphismus}\end{array}\right\} \text{wenn } \varphi \left\{\begin{array}{l}\text{injektiv}\\ \text{surjektiv}\\ \text{bijektiv}\end{array}\right\}$$

Existiert ein Isomorphismus $\varphi : G \to H$ dann heißen G und H isomorph, geschrieben $G \cong H$

(0.20) Beispiel

a) $(\mathbb{Z},+) \to (\mathbb{R},+), x \mapsto x$ ist Monomorphismus

b) $\exp : (\mathbb{R},+) \mapsto (\mathbb{R}_{>0},\cdot), x \mapsto e^x$

$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ ist Epimorphismus

(0.21) Schreibweise

Sei $(A,+)$ abelsche Gruppe, $a \in A$ sowie $U,V \subseteq A$

$a+U := \{a+u \mid u \in U\} \subseteq A$

$U+V := \{u+v \mid u \in U, v \in V\} \subseteq A$

Beispiele

a) $A = (K^n,+), \quad U = \mathbb{L}_0 \subseteq A$

$\mathbb{L} = S + \mathbb{L}_0$

b) $A = \mathbb{Z}, \quad U = 7\cdot\mathbb{Z}, \quad 1+U = \{\dots,1,8,15,\dots\}$

(0.22) Definition (Ring)

Sei R eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+ : R\times R \to R$ und $\cdot : R \times R \to R$

$(R,+,\cdot)$ heißt **Ring** (oder kurz R), wenn gilt:

(R1) $(R,+)$ ist abelsche Gruppe

(R2) $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z) \quad \forall x,y,z \in R$

(R3) $\exists 1 \in \mathbb{R}$ mit $1 \cdot x = x = x \cdot 1 \quad \forall x \in R$
(R4) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot y$ und $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \forall x, y \in R$
R heißt kommutativ wenn zusätzlich gilt
(R5) $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in R$

(0.23) Beispiele

a) $\mathbb{Z}$, alle $\mathbb{Z}_n$ und alle Körper sind auch kommutative Ringe

b) $R = \{0\}$ ist kommutativer Ring (Trivialring), Achtung: $1 = 0$

c) Vom kommutativen Ring zum Körper fehlen (A7) und $1 \neq 0$

d) $n\mathbb{Z}$ ist kein Ring, denn es existiert keine 1 (ausser bei $n = 1$)

(0.24) Definition (Einheit)

Sei R ein Ring und $x \in R$. x heißt **invertierbar** oder **Einheit**, wenn es $x' \in R$ mit
$x \cdot x' = 1 = x' \cdot x$ gibt

Bemerkung: Falls existent ist x' eindeutig und heißt Inverses bzw. inverses Element von x, geschrieben x^{-1}
$R^* :=$ Menge aller Einheiten von R

(0.25) Bemerkung

i) $1 \in R^*$

ii) Ist $x \in R^*$, dann $x^{-1} \in R^*$

iii) $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$

iv) $(R^*, \cdot)$ ist Gruppe (Einheitengruppe)

Beweis:

Seien $x, y \in R$, zu zeigen: $x \cdot y \in R^*$. Es gibt $x^{-1}, y^{-1} \in R^*$

$(x \cdot y)(y^{-1} \cdot x^{-1}) \in R^* = x \cdot 1 \cdot x^{-1} = 1$

Also $x \cdot y \in R^*$

Axiome: (G1): von R, (G2): nach a), (G3): nach b)

v) R kommutativer Ring

R Körper $\Leftrightarrow R^* = R \backslash \{0\}$

Beweis:

(A7) $\Leftrightarrow R^* \supseteq R \backslash \{0\}$

$1 \neq 0 \Leftrightarrow 0 \in R^*$

vi) Sei $a \in \mathbb{Z}_n = (0, 1, \ldots, n-1)$

$a \in \mathbb{Z}_n^* \Leftrightarrow \mathbf{ggT}(a, n) = 1$

Auslassung: Beweis..

vii) $\mathbb{Z}_n$ Körper $\Leftrightarrow n$ Primzahl

Beweis: f), e)

(0.26) Definition (Ringhomomorphismus)

Seien R, S Ringe. Eine Abbildung $\varphi : R \to S$ heißt (Ring-)Homomorphismus, wenn gelten:

1. φ ist Gruppenhomomorphismus $(R,+) \to (S,+)$
2. $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \quad \forall x, y \in R$
3. $\varphi(1) = 1$

(0.27) Beispiel

a) Die Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, a \mapsto a \bmod n$

b) Die Abbildung $m_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto a \cdot x$
ist kein Ringhomomorphismus ($m_a(1) = a \neq 1$) (ausser $a = 1$)

§Das Signum einer Permutation

$S_n = \{\pi : \underline{n} \to \underline{n} \mid \pi \text{ bijektiv}\} \quad \underline{n} := \{1, \dots, n\}$

$\pi \in S_n$ heißen *Permutationen*, geschrieben,

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(2) \end{pmatrix}$$

$(S_n, \circ)$ ist Gruppe (vgl. Bsp.(0.18))

(0.28) Definition (Transposition)

$\tau \in S_n$ heißt *Transposition*, wenn es $1 \leq i \neq j \leq n$ gibt mit $\tau(i) = j,\ \tau(j) = i,\ \tau(k) = k \forall k \neq i, j$. Wir schreiben dann $\tau = (i, j)$

Beispiel: n=5

$$(2\,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: $\tau = \mathrm{id}_{\underline{n}}$

(0.29) Satz

Jede Permutation lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben. Die Anzahl der Transpositionen ist dabei nicht eindeutig, aber ist (für festes π) stets gerade oder stets ungerade.

(0.30) Definition (Signum)

$sgn\ \pi := (-1)^{|\#\text{Transpositionen in } \pi|}$ heißt *Signum von* $\pi \in S_n$. π heißt gerade bzw. ungerade wenn $sgn = 1$ bzw. $sgn = -1$ ist.
Beispiel

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (2\,5)(1\,3)(3\,4)$$

$\Rightarrow sgn\ \pi = -1$ (ungerade) (τ Transposition $\Leftrightarrow sgn = -1$)

(0.31) Satz

1. $sgn(\pi \circ \pi') = sgn(\pi) \cdot sgn(\pi')$
2. $sgn(\pi^{-1}) = sgn(\pi)$

Beispiel

a) $\pi = (2\,5)(1\,3)(3\,4)$

b) $\pi^{-1} = (3\,4)^{-1}(1\,3)^{-1}(2\,5)^{-1} = ((3\,4)(1\,3)(2\,5))^{-1}$

Lineare Gleichungssysteme

§Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

(1.1) Definition (Lineares Gleichungssystem)

Ein **Lineares Gleichungssystem** (über $\mathbb{R}$) hat die Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{\text{mn}}x_n & = & b_m \end{array}$$

(m Gleichungen mit n Unbekannten) mit $a_{\text{ij}}, b_i \in \mathbb{R}$ (Koeffizienten des LGS)

Eine Lösung des LGS ist ein n-Tupel $(s_1, \dots, s_n), s_j \in \mathbb{R}$, sodass alle m Gleichungen erfüllt sind, wenn jeweils s_j für x_j eingesetzt wird.

Für Lösungen schreibe $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ statt $(s_1, \dots, s_n)$

(1.2) Beispiel

Auslassung: Triviales Beispiel

(1.3) Beispiel

a) $x+y=2, \quad x-y=0$

Lösung: $x-y=0 \Rightarrow x=y, \quad x+x=2 \Rightarrow x=1 \Leftrightarrow y=1$

b) $x+y=2, \quad x+y=0$

Lösung: Keine Lösung, Widerspruch

c) $x+y=2, \quad 3x+3y=6$

Lösung: $x+y=2 \Rightarrow y=2-x, \quad 3x+3(2-x)=6 \Rightarrow 6=6 \Rightarrow x$ beliebig

(1.4) Bemerkung

Die Lösungsmenge des LGS ändert sich nicht, wenn

i) 2 Gleichungen vertauscht werden

ii) Eine Gleichung mit einem $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ multipliziert wird

iii) Das c-fache eine Gleichung zu einer anderen addiert wird ($c \in \mathbb{R}$)

(Äquivalenzumformungen)

(1.5) Beispiel

$n = m = 4$

$$\begin{array}{lccccccccc} (z_1) & x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ (z_2) & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \\ (z_3) & 2x_1 & + & 2x_2 & & & + & 3x_4 & = & 5 \\ (z_4) & & & & & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

Subtrahiere $(c = -1)$ z_1 von z_2, subtrahiere $2z_1$ von z_3

$$\begin{array}{lcccccccc} (z_1) & x_1 & + & x_2 & & + & x_4 & = & 1 \\ (z_2) & & & & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ (z_3) & & & & & & x_4 & = & 3 \\ (z_4) & & & & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

Aus z_2 und z_4 folgt: $x_3 = -1$. Einsetzen.

$$\begin{array}{lcccccc} (z_1) & x_1 & + & x_2 & & = & -2 \\ (z_2) & & & & 2 & = & 2 \\ (z_3) & & & & x_4 & = & 3 \\ (z_4) & & & & x_3 & = & -1 \end{array}$$

Also x_2 beliebig und $x_1 = -2 - x_2$. Es folgt:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -2-t \\ t \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

(1.6) Definition (Matrizen)

Sei K Körper

a) Matrix

Eine $(m \times n)$-Matrix A über K ist ein „Schema“ von m Elementen $a_{ij} \in K$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Merke: „Zeile vor Spalte“

Die $a_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ heißen **Koeffizienten** oder **Einträge** von A

b) Menge der Matrizen

$K^{m \times n} :=$ Menge aller $m \times n$-Matrizen über K

c) Zeilen und Spalten

Sei $A = (a_{\mathrm{ij}}) \in K^{m \times n}$

Die $(1 \times n)$-Matrix $z_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in})$ heißt i-te Zeile von A

Die $(m \times 1)$-Matrix $s_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ heißt j-te Spalte von A

d) Tupel

Eine $(1 \times n)$-Matrix wird auch (Zeilen-)-n-Tupel genannt
Eine $(m \times 1)$-Matrix wird auch (Spalten-)-m-Tupel genannt

$K^m := K^{m \times 1}$ =Menge aller Spalten-m-Tupel

e) Nullmatrix

Die $(m \times n)$-Matrix mit allen Koeffizienten gleich 0 heißt **Nullmatrix**. Geschrieben wird eine einfache 0.

f) Matrix (formal)

Eine $(m \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ über K ist eine Abbildung

$a : \underline{m} \times \underline{n} \to K, (i, j) \mapsto a_{\mathrm{ij}}$

(1.7) Beispiele

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ ist eine (3×2)-Matrix

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ ist eine (2×3)-Matrix

3. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \neq (245)$

Auslassung: Sehr trivial

(1.8) Definition (Koffizientenmatrix)

Gegeben sei das LGS über K:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$
$\vdots$
$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \quad$ mit $a_{ij}, b_i \in K(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$

Die Matrix $A := (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ heißt die **Koffizientenmatrix** des LGS

Das Spalten-m-Tupel $b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ heißt die **rechte Seite** des LGS

Ist $b = 0$ dann heißt das LGS **homogen**, sonst **inhomogen**

Eine **Lösung** des LGS ist ein Spalten-n-Tupel

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in K^n \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j = b_i, \quad \forall i = 1 \ldots n$$

Die **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$ des LGS ist die Menge aller Lösungen (Beachte: $\mathbb{L} \subseteq K^n$)

Da A und b das LGS bestimmen, schreiben wir $\mathbb{L}(A,b)$ für $\mathbb{L}$

Die Matrix $(A,b) \in K^{m\times(n+1)}$ heißt die **erweiterte Koffizientenmatrix** des LGS (mit dieser wird in der Regel gerechnet)

(1.9) Beispiel

Das LGS aus (1.5) hat die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{4\times 5}$$

Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} -t-2 \\ t \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

b) Betrachte $2x_1 + x_2 = 3$. Definiere: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 2x_1 + x_2$

Dann $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} | 2s_1 + s_2 = 3\} = f^{-1}(\{3\})$

c) Sei $(A,b) \in K^{m\times(n+1)}$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines LGS, $A = (A_{ij})$. Definiere

$$\phi_A : K^n \to K^m, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

mit $y_i := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j, 1 \leq i \leq m.$

Dann $\mathbb{L}(A,b) = \phi_A^{-1}(\{b\})(b \in K^m)$

§2 Der Gauß-Algorithmus

(1.11) Definition (Zeilentransformationen)

Sei K ein Körper und $A \in K^{m\times n}$. Jede der folgenden Umformungen heißt **elementare Zeilentransformation**.

(Typ I) $\tau_{\text{ij}}(1 \leq i, j \leq m)$ Vertausche Zeile i und Zeile j

(Typ II) $\alpha_{\text{ij}}(c)(1 \leq i \neq j \leq m, c \in K)$ Addiere das c-fache Zeile j zur Zeile i

(Typ III) $\mu_i(c)(1 \leq i \leq m, c \in K, c \neq 0)$ Multipliziere Zeile i mit c

Wir können $\tau_{\text{ij}},\ \alpha_{\text{ij}}(c),\ \mu_i(c)$ als Abbildungen $K^{m\times n} \to K^{m\times n}$ auffassen.

(1.12) Beispiel

$K = \mathbb{Q},\ m = 3,\ n = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \overset{\tau_{23}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\alpha_{12}(2)}{\to}$$

$$\overset{\alpha_{12}(2)}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 13 & 16 \\ -1 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_2(-1)}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 13 & 16 \\ 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.13) Satz

Sei $(A,b) \in K^{m\times(n+1)}$ und sei $(A',b') \in K^{m\times(n+1)}$ durch eine Folge von elementaren Zeilentransformationen aus (A,b) hervorgegangen. Dann ist $\mathbb{L}(A,b) = \mathbb{L}(A',b')$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(A,b) &= \mathbb{L}(\tau_{ij}(A,b)) && (0.1)\\ &= \mathbb{L}(\alpha_{ij}(c)(A,b)) \text{ vgl. (1.4)} && (0.2)\\ &= \mathbb{L}(\mu_{ij}(c)(A,b)) \ \forall 1 \leq i,j \leq m, c \in K, i \neq j && (0.3) \end{aligned}$$

(1.14) Definition (Zeilenstufenform)

Eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ hat **Zeilenstufenform** wenn

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \boxtimes & * & \dots & & & * \\ 0 & 0 & \boxtimes & * & \dots & & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxtimes & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \boxtimes \neq 0,\ * \text{ beliebig}$$

Formal

Sei z_i die i-te Zeile von A, d.h. $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$, $z_i \in K^{1\times n}$

Sei $k_i \in \mathbb{N}$ die Anzahl der „führenden Nullen“ von z_i plus 1, d.h.
$z_i = (\underbrace{0,\ldots,0}_{k_i-1},\underbrace{\boxtimes}_{k_i},*\ldots*)$
A hat Zeilenstufenform, wenn gilt: $k_1 < k_2 < \ldots < k_r < k_{r+1} = \ldots = k_m = n+1$

(1.15) Gauß-Algorithmus (Teil I)

Jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ kann durch eine Folge elementarer Zeilentransformationen von Typ I und Typ II auf Zeilenstufenform gebracht werden. Sei $A = a_{\text{ij}} = (s_1,\ldots,s_n), a_{\text{ij}} \in K, s_j \in K^m$

1. Wenn $A = 0$ dann fertig
2. Sei $k := \min\{j \mid 1 \leqslant j \leqslant n, s_j \neq 0\}$
3. Wähle ein i mit $a_{\text{ik}} \neq 0$ (erste Spalte $\neq 0$) und tausche Zeile 1 mit Zeile i (d.h. τ_{1i})
4. Für jedes $i = 2,\ldots,k_1$ wende $\delta_{i1}(-\frac{a_{\text{ik}}}{a_{1k}})$ an
5. Mache weiter mit Zeile $2,\ldots,m$

(1.16) Beispiel

(1.16) Beispiel
$Ver_n(i,j) = c_{ij}$
$Add_n(i,j,c) = a_{ij}(c)$
$Mul_n(i,c) = u_i(c)$
wobei n = Anzahl der Zeilen

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -3 & -6 \\ 1 & -2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 5}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Merke: Erst gucken, dann rechnen!

(1.17) Anwendung

Lösungsverfahren für homoges LGS

1. Sei $A \in K^{m \times n}$ die Koffizientenmatrix eines LGS
2. Bringe A auf Zeilenstufenform mit Gauß I (1.15)

   Die r Unbekannten $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$ heißen **abhängig**, die anderen heißen **frei**
3. Ersetze die freien Unbekannten durch Parameter $t_1, t_2, \dots, t_{n-r}$
4. Löse von unten nach oben nach dem anhängigen Unbekannten auf „Rückwärtssubstitution“

(1.18) Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 5}$$

Abhängig: x_1, x_3, x_4
Frei: x_2, x_5

a) $x_2 = t_1, x_5 = t_2; t_1, t_2 \in \mathbb{Q}$ beliebig

b) Zeile 3: $-x_4 + 3x_5 = 0 \Rightarrow x_4 = 3x_5 = 3t_2$

   Zeile 2: $2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}t_2$

   Zeile 1: $\dots \Rightarrow x_1 = 2t_1 - \frac{3}{2}t_2$

$$\mathbb{L}(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} 2t_1 - \frac{3}{2}t_2 \\ t_1 \\ \frac{1}{2}t_2 \\ 3t_2 \\ t_2 \end{pmatrix} | t_1, t_2 \in \mathbb{Q} \right\}$$

(1.19) Bemerkung

a) Ein homogenes LGS hat immer eine (d.h. mind. eine) Lösung, nämlich die **triviale Lösung** $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$

b) Hat ein homogenes LGs weniger Gleichungen als Unbekannte (d.h. $m < n$), dann besitzt es eine **nicht-triviale Lösung**

c) Für ein homogenes LGS sind folgende Aussagen äquivalent:

   - Das LGS hat nicht-triviale Lösungen
   - Das LGS ist nicht-trivial lösbar
   - $\mathbb{L} \neq 0 \quad (0 \in K^n)$
   - Es gibt freie Unbekannte $(n - r > 0)$

(1.20) Anwendung (Lösungsverfahren für inhomogenes LGS)

Sei $(A,b) \in K^{m\times(n+1)}$ die erweiterte Koffizientenmatrix eines LGS. Bringe (A,b) mit Algorithmus (1.15) auf Zeilenstufenform

Notiz: Da die schmematische Darstellung aus der Vorlesung wenig erleuchtend und recht kompliziert war, formuliere ich die Fälle hier aus

1. Fall: Entsteht eine Matrix, bei der die letzte (unterste) nicht-Nullzeile bis auf die rechte Seite komplett mit Nullen gefüllt ist, so erhalten wir die Form $0x_1 + \ldots + 0x_n = b_r$ mit $b_r \neq 0$, was ein Widerspruch ist. Es existiert also keine Lösung.

2. Fall: Die unterste nicht-Nullzeile hat $\geqslant 2$ Spalten vom rechten Rand entfernt die erste Zahl die nicht Null ist (d.h. alle Matrizen in Zeilenstufenform bei denen Fall nicht zutrifft). Definiere abhänge/freie Unbekannte genau wie bei homogenen LGS und mache Rückwärtsubstitution.

1. **Spezielle Lösung des inhomogenen LGS**

   Wähle eine Lösung $s \in \mathbb{L}(A,b)$ indem alle freien Unbekannten 0 gesetzt werden

2. **Allgemeine Lösung den zugehörigen homogenen LGS**

   Bestimmte $\mathbb{L}_0 := \mathbb{L}(A,0)$ wie in Anwendung (1.17)

3. **Allgemeine Lösung des inhomogenen LGS**

   $\mathbb{L}(A,b) = s + \mathbb{L}_0 = \{s+u \mid u \in \mathbb{L}_0\} \subseteq K^n$

   wobei $s+u := \begin{pmatrix} s_1+u_1 \\ \vdots \\ s_n+u_n \end{pmatrix}$

(1.21) Beispiel

$n = m = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times4}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4$$

$$(A,b) \overset{\text{Gauß}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fall 2 trifft zu, $k_1 = 1,\ k_2 = 3,\ k_3 = 4,\ r = 3$, frei: $x_2 = t$, abhängig: $x_1,\ x_3,\ x_4$

Rückwärtsubstitution:

Zeile 3: $x_4 = -3$, Zeile 2: $x_3 = -\frac{1}{2}$, Zeile 1: $x_1 = 2t + \frac{31}{2}$

Lösung:

1. Spezielle Lösung des inhomogenen LGS: Wähle $t = 0$. $s = \begin{pmatrix} \frac{31}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$

2. Allgemeine Lösung des homogenen LGS: $\mathbb{L}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Q} \right\}$

3. Allgemeine Lösung des inhomogenen LGS:

$$\mathbb{L}(A,b) = s + \mathbb{L}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{31}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Q} \right\}$$

(1.22) Bemerkung

Beim Lösen von LGS mit dem Gauß-Algorithmus bedeutet eine **Spaltenvertauschung** genau eine Vertauschung der zugehörigen Unbekannten. Vertauschen ist also erlaubt, wenn man es sich für die Zuordnung zum LGS merkt. Niemals kann man die b-Spalte vertauschen.

z.B. Löse das LGS mit:

$$(A,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{-3}^{x_1} & \overbrace{1}^{x_2} & \overbrace{-1}^{x_3} & \overbrace{2}^{b} \\ -2 & 0 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 6 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1}^{x_2} & \overbrace{-1}^{x_3} & \overbrace{-3}^{x_1} & \overbrace{1}^{b} \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rrcl} & x_1 & = & 2 \\ \Rightarrow & x_2 & = & 13 \\ & x_3 & = & 5 \end{array}$$

(1.23) Definition (Reduzierte Zeilenstufenform, Normalform)

Eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ hat **reduzierte Zeilenstufenform**, wenn die „Stufen“ der Matrix jeweils mit eine 1 beginnen, also die erste Zahl in einer Zeile ungleich 0 stehts eine 1 ist, und ausserdem die Zahl über dieser 1 eine 0 ist. Etwa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & 1 & * \ldots * & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & * \ldots * & 0 & * \ldots * \\ & & & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

A hat **Normalform**, wenn die führenden Einsen den reduzierten Zeilenstufenform eine Diagonale Linie innerhalb eines Null-Blocks bilden. Etwa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1.24) Gauß-Algorithmus II

Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ kann durch eine Folge elementarer Zeilentransformationen (Typ I-III) auf reduzierte Zeilenstufenform gebracht werden. Zusätzlich kann mit Spaltenvertauschungen die Normalform erzeugt werden.

(1.25) Beispiel

Löse das LGS mit

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 5}$$

Mit $\alpha_{13}(4),\ \alpha_{23}(1),\ \mu_2(-1)$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{(Nullzeile kann entfallen)}$$

Mit $\alpha_{12}\left(-\frac{3}{2}\right),\ \mu\left(\frac{1}{2}\right)$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{(reduzierte Zeilenstufenform)}$$

Vertausche Spalten $x_2 \to x_4,\ x_3 \to x_2,\ x_4 \to x_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{(Normalform, ersten 3 Spalten abhängig, 4. Spalte frei)}$$

1. Spezielle Lösung: $s = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$

2. Allgemeine Lösung (homogen): $\mathbb{L}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Q} \right\}$

3. Allgemeine Lösung (inhomogen): $\mathbb{L}(A,b) = s + \mathbb{L}_0$

§3 Matrix-Arithmetik

Ab jetzt betrachten wir auch Matrizen über kommutative Ringe (anstatt nur über Körpern). $R^{m\times n} :=$ Menge der $m\times n$-Matrizen über R

Achtung: Gauß-Algorithmus funktioniert nicht, wenn R kein Körper ist!

(1.27) Definition (Matrix-Arithmetik)

R ist kommutativer Ring, $A=(a_{ij})=R^{m\times n},\ r\in R$

a) $A^t := (a^t_{ij})$ mit $a^t_{ij} := a_{ji}$ für $1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n \quad (A^t\in R^{n\times m})$

b) $r\cdot A = (r\cdot a_{ij})\in R^{m\times n}$ (Skalare Multiplikation)

c) Für $B=(b_{ij})\in R^{m\times n}$ ist $A+B=(a_{ij}+b_{ij})\in R^{m\times n}$ (Summe von A und B)

d) Für $A\in R^{m\times n}, B\in R^{n\times l}$

Sei $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$

$A\cdot B=(c_{ij})$ mit $c_{ij} := \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$ für $1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant l \quad (A\cdot B\in R^{m\times l})$

$A\cdot B$ ist nur definiert wenn Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B

(1.28) Beispiele

a) Seien $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{Q}^{2\times 3}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{Q}^{2\times 3}$

$$A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3\\ 0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{Q}^{3\times 2}$$

$$3\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6\\ 9 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Nicht definiert: $A+A^t, A\cdot B$

b) A wie oben, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathbb{Q}^{3\times 4}$

$A\cdot B\in\mathbb{Q}^{2\times 4}$

Falk-Schema:

			0	1	2	3
			- 1	0	0	1
			1	1	0	0
1	0	- 2	- 2	- 1	2	3
3	2	0	- 2	3	6	11

Spezialfälle

$A \in R^{m\times n}, B \in R^{n\times l}$

$l = 1$: A wie oben, $B' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 1} = \mathbb{Q}^3$: $A \cdot B' = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 1} = \mathbb{Q}^2$

$m = 1$: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{1\times 3}$, B wie oben: $A' \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{1\times 4}$

$l = 1, m = 1$: $A' \cdot B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 + 0 + 0 = 3$ („Skalarprodukt“)

$n = 1$: $B' \cdot A' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$

(1.29) Bemerkung

Matrixmultiplikation ist eine Abbildung
$\cdot : R^{m\times n} \times R^{n\times l} \mapsto R^{m\times l}$

Spezialfälle

- $\cdot : R^{m\times n} \times R^{n} \mapsto R^{m} \quad (l = 1)$
- $\cdot : R^{1\times n} \times R^{n\times l} \mapsto R^{1\times l} \quad (m = 1)$
- $\cdot : R^{1\times n} \times R^{n} \mapsto R^{|x|} = R \quad (l = 1, m = 1)$
- $\cdot : R^{m} \times R^{1\times l} \mapsto R^{m\times l} \quad (n = 1)$

Sei $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_l \end{pmatrix}$, $z_i \in R^{1\times n}$, $s_j \in R^{m\times 1}$, dann ist $A \cdot B = (\underbrace{z_i \cdot s_j}_{\text{Skalarp.}})_{ij} \in R^{m\times l}$

(1.30) Beispiel und Schreibweise

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}, x \in K^n$

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^m$$

Wir schreiben das LGS mit der erweiterten Koffizientenmatrix (A, b) formal als Matrixgleichung $A \cdot x = b$
z.B. LGS

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3 &= 5 \\ x_1-x_2 &= -3 \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}}_{b}$$

(1.31) Definition (Einheitsmatrix)

Sei R kommutativer Ring

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (d_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m} \in R^{n\times n}$$

$d_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$ heißt **n-elementige Einheitsmatrix**

(1.32) Satz

Sei R kommutativer Ring

a) Für alle $A,\ B,\ C \in R^{m\times n}$ gilt:
   1. $(A+B)+C = A+(B+C)$
   2. $0+A = A = A+0$
   3. $A+(-1)A = 0 = (-1)A+A$
   4. $A+B = B+A$

b) 1. $(AB)C = A(BC) \quad \forall A \in R^{m\times n}, B \in R^{n\times l}, c \in R^{l\times p}$
   2. $E_mA = A = AE_n \quad \forall A \in R^{m\times n}$
   3. $(A+B)C = AC+BC \quad \forall A,B \in R^{m\times n}, C \in R^{m\times l}$
      $A(B+C) = AB+AC \quad \forall B,C \in R^{m\times n}, A \in R^{m\times l}$
   4. $+(AB) = (+A)B = A(+B) \quad \forall A,B \in R^{m\times n}$

c) 1. $(A^t)^t = A \quad \forall A \in R^{m\times n}$
   2. $(A+B)^t = A^t+B^t \quad \forall A,B \in R^{m\times n}$
   3. $(A\cdot B)^t = B^t\cdot A^t \quad \forall A \in R^{m\times n}, B \in R^{m\times l}$

Auslassung: Beweis dazu

(1.33) Folgerung

Sei R kommultiver Ring, dann ist $R^{m\times n}$ ein Ring bzgl. Matrixaddition und -multiplikation (aus Def. 1.27). Sind $0 \in R^{m\times n}$ und $E_n \in R^{m\times n}$

Beweis: Satz 1.32 (Falls $m=n$)

(1.34) Bemerkung und Beispiele

Sei $R \neq \{0\}$ (dh. $1 \neq 0$) $n > 1$

a) $\exists A \in R^{m\times n}$, $A \neq 0$ mit $A^2 = 0$

zB. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(B2) ist verletzt, also $R^{m\times n}$ kein Körper (selbst wenn R Körper ist)

b) $R^{m\times n}$ ist nicht kommutativ

zB. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Schema für Multiplikation in $R^{n\times n}$

$$\begin{array}{ccccc} & B & C & D & \cdots \\ A & A\cdot B & A\cdot B\cdot C & A\cdot B\cdot C\cdot D & \end{array}$$

d) $R^{n\times n}$ ist auch (sogar kommutativer) Ring mit der komponentenweise Multiplikation. Dieser Ring ist nicht besonders interessant.

(1.35) Definition (Lineare Gruppe)

Sei R kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}$. Die Einheitengruppe von $R^{n\times n}$

$$\mathrm{GL}_n(R) := (R^{n\times n})^* = \{A \in R^{n\times n} \mid A \text{ invertierbar}\}$$

heißt volle **Lineare Gruppe** über R vom Grad n. Genauer: $(\mathrm{GL}_n(R), \cdot)$

(1.36) Bemerkung

Sei R kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}$

- Ist $A \in \mathrm{GL}_n(R)$, so ist auch $A^t \in \mathrm{GL}_n(R)$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Beweis: Prüfe: $(A^t)\cdot(A^{-1})^t = E_n$ und $(A^{-1^t} \cdot A^t = E_n$ $A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1}\cdot A)^t = E_n^t$
(hier fehlt eine Grafik)

(1.37) Bemerkung

Die Multiplikation in $R^{n\times n}$ mit dem Falk-Schema erfordert n^3 Multiplikation in R $n^2(n-1)$ Additionen.

Vektorräume und lineare Abbildungen

§4 Vektorräume

(2.1) Definition (Vektorraum)

Sei K ein Körper und $(V,+)$ eine abelsche Gruppe. V heißt K-**Vektorraum** oder Vektorraum über K, wenn eine skalare Multiplikation definiert ist:

$$\cdot : K \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v = \lambda v$$

mit:
(V1) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
(V2) $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$
(V3) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$
(V4) $1v = v$ für alle $\lambda, \mu \in K$ und $v, w \in V$

Die Elemente von V heißen *Vektoren*, die Elemente von K *Skalare*.

Achtung: 0 bezeichnet sowohl $0 \in K$ als auch $0 \in V$. Die $0 \in V$ heißt *Nullvektor*, geschrieben $\mathcal{O}$

(2.2) Folgerungen

Sei V ein K-Vektorraum (kurz: K-VR). Für alle $\lambda \in K, v \in V$ gelten:
(W1) $0v = \mathcal{O}$
(W2) $\lambda\mathcal{O} = \mathcal{O}$
(W3) $\underbrace{-v}_{(V,+)} = \underbrace{(-1)}_{(K,+)}v$

(2.3) Beispiele

a) $V = \{0\}$ ist der *triviale K-Vektorraum*.

b) Sind $K \subseteq L$ zwei Körper (insbes. $K = L$) dann ist L ein K-VR mit

$\cdot : K \times L \to L, \quad (\lambda, a) \mapsto \underbrace{\lambda a}_{\text{Mult. in } L}$

Zum Beispiel $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{Q}$-VR, $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{R}$-VR

c) $(K^{m\times n}, +)$ ist K-VR mit

$\cdot : K \times K^{m\times n} \mapsto K^{m\times n}, (\lambda, A) \mapsto \lambda A \quad$ (Def. 1.27b)

Die Elemente von $K^n = K^{n\times 1}$ und $K^{1\times n}$ heißen *Spaltenvektor* bzw. *Zeilenvektor*

d) Sei M Menge. Dann ist K^M ein K-VR mit

$$\cdot : K \times K^M \to K^M,\ (\lambda, f) \mapsto \lambda f$$

$$(\lambda f)(x) = \underbrace{\lambda f(x)}_{\text{Mult. in } K}$$

Speziell:

$M = \underline{m} \times \underline{n}$

$K^M = K^{\underline{m} \times \underline{n}} = K^{m \times n}$

$$\mathbb{R}\text{-VR: } \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \\ C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{stetig}\} \\ C^\infty(\mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{beliebig oft diffbar}\} \\ \text{Pol}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a_n x^n + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0\} \end{cases}$$

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ (Folgenraum, Funktionalanalysis(?))

(2.4) Definition und Bemerkung (Untervektorraum)

Sei V ein K-VR, $W \subseteq V$ W heißt *(K-)Untervektorraum* (Kurz: UVR oder Unterraum) von V, geschrieben $W \leqslant V$, wenn folgende Bedingungen gelten:
(UV1) $W \neq \emptyset$
(UV2) $w + w' \in W \forall w, w' \in W$
(UV3) $\lambda w \in W \forall \lambda \in K, w \in W$

Bemerkung: Dann ist W selbst K-VR bzwl. Addition und Multiplikation von V. Es ist $0 \in W$

(2.5) Beispiele

a) Sei U K-VR. $\{0\} \leqslant V, V \leqslant U$. Für jedes $v \in V$ ist

$K \cdot V = \{\lambda v | \lambda \in K\} \leqslant U$

b) Für $W := \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \in K^{l \times n} \mid \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0 \right\} \leqslant V = K^{1 \times n}$

c) $\text{Pol}(\mathbb{R}) \leqslant C^\infty(\mathbb{R}) \leqslant C(\mathbb{R}) \leqslant \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

d) $V = \mathbb{R}^2$ (Ebene).

Geraden durch $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind UVR von V.

Geraden die nicht durch 0 gehen sind keine UVR von V

e) Sei V K-VR, $W_1, W_2 \leqslant V$.

Dann ist $W_1 + W_2 \leqslant V$ und $W_1 \bigcup W_2 \leqslant V$

(0.21): $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 | w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$

Übung: Nachprüfen UV1-UV3

(2.6) Definition (Linearkombination/Erzeugnis)

Sei V K-VR.

a) Seien $v_1,\dots,v_n \in V$

Eine *Linearkombination* von $\underbrace{(v_1,\dots,v_n)}_{n-\text{Tupel}}$ ist ein Element $v \in V$ der Form

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \text{ mit } \lambda_i \in K$$

b) Sei $M \leqslant U$, $M \neq \emptyset$

$\langle M \rangle := \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i \mid \lambda_i \in K,\ v_i \in M,\ n \in \mathbb{N} \right\}$ ist die Menge aller Linearkombinationen (LK) von Elementen aus M

$\langle \emptyset \rangle := \{0\}$

$\langle M \rangle$ heißt *lineare Hülle* von M oder *Erzeugnis von M*

(2.7) Beispiele

a) $V = \mathbb{R}^3, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 - v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind LK von (v_1, v_2)

$\langle \{v_1, v_2\} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} | a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\}$ (Übung)

b) $K = \mathbb{R}$, $V = C^\infty(\mathbb{R})$

$v_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, $v_2 = \sin$

$\langle \{v_1, v_2\} \rangle = \{a \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + b \cdot \sin \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mapsto ax + b \sin x \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

(2.8) Satz

Sei V $K\text{-}VR, M \leqslant V$

a) $\langle M \rangle \leqslant V$

b) Ist $M \leqslant W \leqslant V$ dann ist $\langle M \rangle \leqslant W$

(d.h. $\langle M \rangle$ ist der kleinste UVR von V, der M enthält)

Beweis:

Seien $v_1,\dots,v_n \in M$ und $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$, dann ist $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \in W$

$v_i \in M \leqslant W \Rightarrow \lambda_i v_i \in W$ (UV3) $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \in W$, also $\langle M \rangle \leqslant W$

(2.9) Beispiel und Definition (Spalten-/Zeilenraum)

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ mit Zeilen $z_1, \dots z_m \in K^{1\times n}$ und Spalten $s_1, \dots, s_n \in K^m$

Sind $x_1, \dots, x_n \in K$, dann ist

$$A\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i s_i, \quad \text{ist eine LK von } (s_1, \dots, s_n) \text{ (hier } V = K^m)$$

Sind $y_1, \dots, y_n \in K$, dann ist

$$(y_1, \dots, y_n)\cdot A = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i, \quad \text{ist eine LK von } (z_1, \dots, z_m) \text{ (hier } V = K^{1\times n})$$

$ZR(A) := \langle\{z_1, \dots, z_m\}\rangle \leqslant K^{1\times n} \Rightarrow ZR(A)$ heißt *Zeilenraum* von A

$SR(A) := \langle\{s_1, \dots, s_n\}\rangle \leqslant K^m \Rightarrow SR(A)$ heißt *Spaltenraum* von A

(2.10) Definition (lineare Abbildung/K-Homomorphismus

Sei $V, WK-$VR, $\varphi : V \to W$

1. φ heißt *lineare Abbildung* oder **K**-*Homomorphismus*, falls gelten:
   a) $\varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v') \qquad \forall v, v' \in V$
   b) $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) \qquad \forall \lambda \in K, v \in V$
   $Hom_K(V, W) := \{\varphi : V \to W \mid \varphi \text{ linear}\}$
2. Ein $\varphi \in Hom_k(V, V)$ heißt **Endomorphismus** von V
   $End_K(V) := Hom_K(V, V)$
3. $$\varphi \in Hom_k(V,W) \text{ heißt } \begin{cases} Monomorphismus \\ Epimorphismus \\ Isomorphismus \end{cases} \text{falls } \varphi \begin{cases} injektiv \\ surjektiv \\ bijektiv \end{cases}$$
   V, W heißen *isomorph*. geschrieben $V \approxeq W$, falls ein Isomorphismus $V \to W$ existiert.

(2.11) Beispiele

a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$

$$\varphi_1 : V \to W, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ ist linear}$$

$$\varphi_1 : V \to W, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1+a \\ b \end{pmatrix} \text{ ist nicht linear: } (1+a)+(1+b) = 2+(a+b) \neq 1+(a+b)$$

$$\varphi_1 : V \to W, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b^2 \end{pmatrix} \text{ ist nicht linear: } a^2+b^2 \neq (a+b)^2$$

$$\varphi_1 : V \to W, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a+c \\ b \end{pmatrix} \text{ ist linear}$$

b) $\varphi : K^{m\times n} \to K^{m\times n},\ A \longmapsto A^+$ ist Isomorphismus

c) $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, r \in \mathbb{R}$

$\varepsilon_r : V \to \mathbb{R},\ f \to f(r)$ ist linear (ε_r heißt *Auswertungshomomorphismus*)

Beweis:

$\varepsilon(f+g) = (f+g)(r) = f(r)+g(r) = \varepsilon_r(f)+\varepsilon_r(g)$

$\varepsilon(\lambda f) = (\lambda f)(r) = \lambda f(r) = \lambda \varepsilon_r(f)$

Also ist ε_r linear

d) $A \in K^{m\times n}$

$\varphi_A : K^n \to K^m,\ x \longmapsto A \cdot x$ ist linear

Beweis:

$\varphi_A(x+y) = A(x+y) = A(x)+A(y) = \varphi_A(x)+\varphi_A(y)$

$\varphi_A(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda \varphi_A(x)$

e) $K = \mathbb{R},\ V = \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$

$\varphi : V \to V,\ f \longmapsto f^{'}$ (Ableitung) ist linear

Beweis: (Nach Analysis)

$(f+g)^{'} = f^{'} + g^{'}$

$(\lambda f)^{'} = \lambda f^{'}$

(2.12) Definiton (Kern + Bild)

Sei $\varphi \in Hom_K(V,W)$

1. $Ker\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = \mathcal{O}\} = \varphi^+(\{0\}) \leqslant V$ heißt *Kern* von φ
2. $Im\varphi := \varphi(V) = \{\varphi(v) \mid v \in V\} \leqslant W$ heißt *Bild* von φ

(2.13) Bemerkung

a) $Ker\varphi \leqslant V$

b) $Im\varphi \leqslant W$

c) φ injektiv $\Leftrightarrow Ker\varphi = \{0\}$

d) φ surjektiv $\Leftrightarrow Im\varphi = W$

e) Sei $w \in Im\varphi$, etwa $\varphi(v) = w,\ \ v \in V$

dann ist $\varphi^{-1}(\{w\}) = v + Ker\varphi = \{v + v^{'} \mid v^{'} \in Ker\varphi\}$

Beweis:

i) Sei $\varphi(v) = w$
$v + Ker\varphi \leq \varphi^{-1}(w) : v' \in Ker\varphi \Rightarrow \varphi(v+v') = \varphi(v)+\varphi(v') = w+0 = w \Rightarrow v+v' \in \varphi^{-1}(w)$

ii) $\varphi^{-1}(w) \leq v + Ker\varphi$
Sei $u \in \varphi^{-1}(w)$, d.h. $\varphi(u) = w$ zu zeigen: $u = v+v'$ für ein $v' \in Ker\varphi$
Setze $v' := u - v$. Dann ist $u = v+v'$ und $\varphi(v') = \varphi(u) - \varphi(v) = w - w = O$. D.h. $v' \in Ker\varphi$

(2.14) Beispiele (u.a. Lösungsmengen bzgl. Kern/Bild)

a) Sei $K = \mathbb{R},\ V = \mathbb{C}^{\infty}(\mathbb{R}),\ \varphi : V \to V,\ f \to f^{'}$ ist linear.

   φ ist surjektiv (Hauptsatz der Infinitesimalrechnung)

   $Ker\varphi = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f$ konstante$\}$

b) Sei $A \in K^{m\times n},\ b \in K^n,\ \varphi_A : K^n \to K^m,\ x \to A \cdot x$ linear.

   a) $Im\varphi_A = \{A \cdot x \mid x \in K^n\} = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle = SR(A)$ wobei $s_1, \ldots, s_n \in K^m$ die Spalten von A sind.

   b) $Ker\varphi_A = \{c \in K^n \mid A \cdot c = 0\} = \mathbb{L}(A, 0) =$ Lösungsmenge des homogenen LGS $A \cdot x = 0$ „Lösungsraum“.

   c) Sei $c \in K^n$ Lösung des inhomogenenen LGS $A \cdot x = b \quad \mathbb{L}(A, b) = c + Ker\varphi_A$
   $\mathbb{L}(A, b) = \{c \in K^n \mid A \cdot c = b\} = \varphi_A^{-1}(\{b\}) \underset{Bew.2.13e}{=} c + Ker\varphi_A$
   vgl. $\mathbb{L}(A, b) = s + \mathbb{L}(A, 0)$

(2.15) Satz

Sei $A \in K^{m\times n},\ b \in K^n$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $A \cdot x = b$ ist lösbar
2. $b \in Im\varphi_A \quad$ ($\varphi_A$aus Bsp. (2.11d))
3. $b \in SR(A)$
4. $SR(A) = SR(A, b)$

Beweis
$(i) \underset{Def.\varphi_A}{\Leftrightarrow} (ii) \underset{Im\varphi_A = SR(A)}{\Leftrightarrow} (iii), (iv) \Rightarrow (iii),\ (iii) \Rightarrow (iv), b \in SR(A)$
$\Rightarrow \{s_1, \ldots, s_n, b\} \leqslant SR(A)$
$\Rightarrow \langle\{s_1, \ldots, s_n, b\}\rangle \leqslant \langle SR(A)\rangle = SR(A)$
$\Rightarrow SR(A, b)$

§5 Basis und Dimension

(2.16) Definition (linear un-/abhängig)

Sei K Körper, VK-VR (Vektorraum)

1. Ein n-Tupel $(v_1,\dots,v_n)$ mit $v_i \in V$ heißt *linear abhängig* (l.a.), wenn $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ existiert mit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq 0$ und
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \mathcal{O}$$
Anderfalls heißt $(v_1,\dots,v_n)$ *linear unabhängig* (l.u.).
2. $M \leqslant V$ heißt linear abhängig wenn ein linear abhängiges n-Tupel $(v_1,\dots,v_n)$ existiert mit $v_i \in M$. Anderfalls heißt M linear unabhängig.
Insbesondere: $\emptyset$ linear unabhängig (Schreibweise: $\langle v_1,\dots,v_n\rangle := \langle\{v_1,\dots,v_n\}\rangle$)
linear abhängig: Nullvektor lässt sich als nicht-triviale Linearkombination (LK) schreiben.

(2.17) Bemerkung

Sei $v \in M$, $M' \subseteq M \subseteq V$

i) $\mathcal{O} \in M \Rightarrow M$ linear abhängig

ii) $v \neq \mathcal{O} \Rightarrow \{v\}$ linear unabhängig $\lambda \cdot v = \mathcal{O} \overset{(W5)}{\Longrightarrow} \lambda = 0$

iii) M' linear abhängig $\Rightarrow M$ linear abhängig

iv) M linear unabhängig $\Rightarrow M'$ linear unabhängig

v) $(v_1,\dots,v_n)$ ist genau dann l.u. wenn für alle $\lambda_1,\dots,\lambda_N \in K$ gilt:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \mathcal{O} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

(2.18) Beispiele (Überprüfung auf l.a. bzw. l.u.)

a) $V = \mathbb{Q}^2$ $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$ linear unabhängig:

Sei $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \mathcal{O} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 3\\0 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow$ eindeutig lösbar (d.h. nur die triviale Lsg). Also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ linear abhängig: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

b) $A \in K^{m\times n}$ in Zeilenstufenform $\Rightarrow (z_1,\dots,z_n) \in K^{1\times n}$(Zeilen von A) linear unabhängig.
Insbesondere: Zeilen von E_n sind linear unabhängig.

(2.19) Satz (Erzeugnisse bzgl. l.a./l.u.)

Sei $M \subseteq V, v \in V$

1. M l.a. $\Leftrightarrow \langle M \setminus \{w\} \rangle = \langle M \rangle$ für ein $w \in M$
2. M l.u. $\Leftrightarrow \langle M \setminus \{w\} \rangle \subsetneqq \langle M \rangle$ für alle $w \in M$
3. M l.u., $M \cup \{v\}$ l.a. $\Leftrightarrow v \in \langle M \rangle$
4. M l.u., $v \notin \langle M \rangle \Leftrightarrow M \cup \{v\}$ l.u.

Beweis zu 1.)

Sei M l.a., dann existiert $v_1, \dots, v_n \in M$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit: $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i k_i = \mathcal{O}$
$v_1, \dots, v_n$ paarweise verschieben, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$, mit
$\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i k_i = \mathcal{O} \Longrightarrow w := v_i = \sum\limits_{i=2}^{n} (-\lambda_i^{-1} \lambda_i) k_i$
$\Rightarrow v_1 \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq \langle M \setminus \{v_1\} \rangle$
$\Rightarrow M \subseteq \langle M \setminus \{v_1\} \rangle$
$\Rightarrow \langle M \rangle \subseteq \langle \langle M \setminus \{v_1\} \rangle \rangle = \langle M \setminus \{v_1\} \rangle$
$\Rightarrow \langle M \rangle = \langle M \setminus \{v_1\} \rangle$ Damit ist „$\Rightarrow$“ gezeigt

„$\Leftarrow$“: Sei $\langle M \setminus \{w\} \rangle = \langle M \rangle$
$\Rightarrow w = \sum\limits_{i=2}^{n} (\lambda_i) v_i,\ v_i \in M \setminus \{v_i\} \Rightarrow \sum\limits_{i=2}^{n} (\lambda_i) v_i + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} w = \mathcal{O}$

(2.20) Definition (Erzeugendensystem + Basis)

Seie $v_1, \dots, v_n \in V,\ M \subseteq V$.
M heißt **Erzeugendensystem von V** wenn $\langle M \rangle = V$.
M heißt **Basis von V** wenn M ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V ist.
$(v_1, \dots, v_n)$ heißt geordnete Basis, wenn $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis ist und $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$.
(d.h. $|\{v_1, \dots, v_n\}| = n$)

(2.21) Beispiele

a) øBasis von $\{\mathcal{O}\}$

b) $V = K^n$ für $1 \leqslant i \leqslant n$. Sei $e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Stelle}$ der i-te *Einheitsvektor*

dann ist $(e_1, \dots, e_n)$ geordnete Basis von k^n, genannt *Standardbasis*.

c) $V = K^{m \times n}$für1 $\leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n$. Sei $E_{ij} \in K^{m \times n}$ die Matrix mit einer 1 an Position (i, j) und Nullstellen sonst, dann ist $(E_{11}, \dots, E_{1n}, E_{21}, \dots, E_{2n}, E_{31}, \dots, E_{mn})$ eine geordnete Basis von V.

(2.22) Satz (Charakterisierung einer Basis)

Für $B \subseteq V$ sind aquivalent:

1. B ist Basis von V
2. B ist ein minimales Erzeugendensystem von V (d.h $B^{'} \subsetneqq B \Rightarrow \langle B^{'} \rangle \subsetneqq V$)
3. B ist maximale l.u. Teilmenge von V (d.h $B \subseteqq B^{'} \Rightarrow B^{'}$ l.a.)

Beweis: (Ringschluss 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 1.)

1. $\Rightarrow$ 2.
B Basis, d.h. B l.u., $\langle B \rangle = V$. Sei $B^{'} \subsetneqq B$, sei etwa w $\in B \setminus B^{'}$, dann
$B^{'} \subseteq B \setminus \{w\} \Rightarrow \langle B^{'} \rangle \subseteq \langle B \setminus \{w\} \rangle \Rightarrow \underset{2.19\ (2.)\ \text{B l.u.}}{\subsetneqq} \langle B \rangle = V$

2. $\Rightarrow$ 3.
Sei B minimal mit $\langle B \rangle = V$. Nach (2.19b) ist B l.u. Sei $B^{'} \subsetneqq B$, etwa $w \in B^{'} \setminus B$ Zu zeigen: $B^{'}$ l.a.
$w \in B^{'} \setminus B \Rightarrow B \subseteq B^{'} \setminus \{w\} \Rightarrow V = \langle B \rangle \subseteq \langle B^{'} \setminus \{w\} \rangle \subseteq \langle B^{'} \rangle \subseteq V$
$\Rightarrow \langle B^{'} \setminus \{w\} \rangle = \langle B^{'} \rangle \underset{(2.19a)}{\Rightarrow} B^{'}$ l.a.

3. $\Rightarrow$ 1. (Übung!!!)

(2.23) Bemerkung

Sei $(v_1, \dots, v_n)$ geordnet Basis von V. Dann gibt es zu jeden $v \in V$ eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Beweis:
$v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^{'} v_i \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda_i^{'}) v_i = \mathcal{O} \underset{(v_1,\dots,v_n)\ l.u.}{\Longrightarrow} \lambda_i - \lambda_i^{'} = 0 \Rightarrow \lambda_i = \lambda_i^{'} \ \ \forall i = 1, \dots, n$

(2.24) Satz + Definition (Basisergänzungssatz + Dimension)

Ist $B_0 \subseteq V$ l.a., dann gibt es Basis $B \subseteq V$ mit $B_0 \subseteq B$ (*Basisergänzungssatz*). Insbesondere hat jeder VR eine Basis. Weiter tritt eines der Folgenden Fälle ein:

1. jede Basis von V hat unendlich viele Elemente
2. es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass jede Basis von V genau n Elemente hat. Wir definieren:

$$dimV = dim_K V := \left\{ \begin{array}{ll} \infty & \\ n & \end{array} \right. \text{im Fall } \begin{array}{l} 1. \\ 2. \end{array}$$

Beispiele:

a) $dim_K \{\mathcal{O}\} = 0$

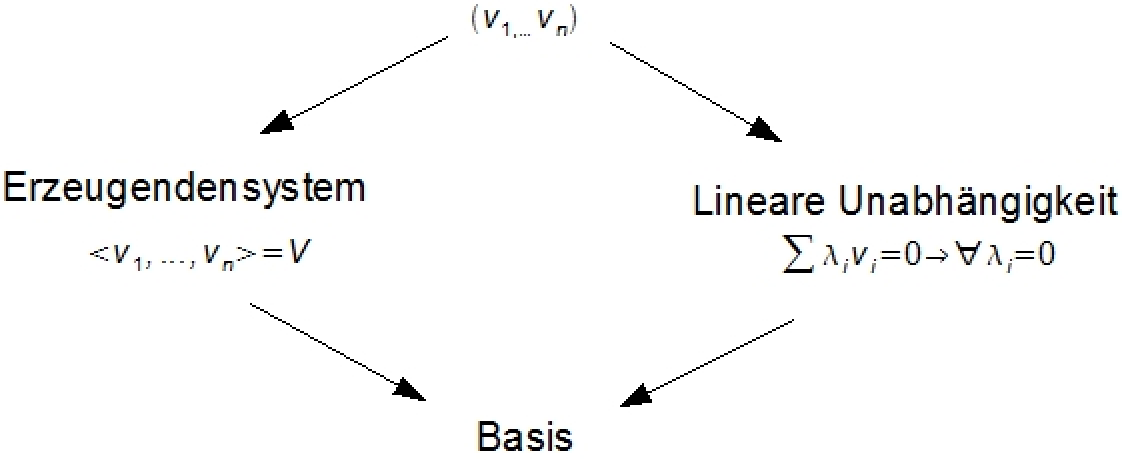
$dim_K K^n = n$

$dim_K K^{m \times n} = m \cdot n$

b) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$

$dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2 \quad (1, i)$ ist Basis.



$$\left.\begin{array}{l} = \text{l.u. Erzeugendensystem (Def.)}\\ = \text{minimales Erzeugendensystem}\\ = \text{max. l.u. Teilmenge}\end{array}\right\} = 2.22$$

Dimension := Länge einer (bzw. jeder) Basis

$$(v_1, \ldots, v_n) \left\{ \begin{array}{l} \text{Erzeugendensystem} \\ \text{l.u} \\ \text{Basis} \end{array} \right. \qquad \text{jedes } v \in V \text{ lässt sich auf}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{mindestens} \\ \text{höchstens} \\ \text{genau} \end{array} \right. \quad \text{eine Art von Linearkombination } v = \sum \lambda_i v_i \text{ schreiben}$$

$M \leq V$ l.u., $v \notin < M > \Rightarrow M \cup \{v\}$ l.u.

(2.19b') = 27b

Basisergänzung:

$V = \mathbb{R}^2, B_0 = \emptyset, < B_0 > = \{\mathcal{O}\}, B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 42 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

$< B_1 > = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 42 \cdot \lambda \\ \sqrt{2} \cdot \lambda \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 42 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} \right\}$

$< B_2 >$

(2.25) Folgerung

Sei K endliche Körper, etwa $|K| = q < \infty$,

$dim_K V = n \Rightarrow |V| = q^n.$

(2.26) Bemerkung

Sei $dim_K V = n < \infty$

i) $B \subseteq V$ l.u. : B Basis $\Leftrightarrow |B| = n.$

ii) $B \subseteq V$, $\langle B\rangle$: B Basis $\Leftrightarrow |B| = n.$

iii) $v_1, \ldots, v_{n+1} \in V \Rightarrow (v_1, \ldots, v_{n+1})$ l.a.

(2.27) Beispiele (Dimension)

a) $dim_K\{\emptyset\} = 0$

$dim_K K^n = n$

$dim_K K^{m\times n} = m \cdot n$

b) $dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R} = dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{C} = \infty$

c) Die $\mathbb{R} - VR$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $Pol(\mathbb{R})$, $C(\mathbb{R})$, $C^\infty(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aus (2.3) haben alle $dim_{\mathbb{R}} = \infty$

d) $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2,\ dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$

(2.28) Folgerung

Sei $U \leq V$ und $dim_K V = n < \infty$

i) $dim_K U \leq dim_K V$ (folgt aus Basisergänzungsatz)

ii) $dim_K U = dim_K V \Leftrightarrow U = V$

Beweis

i) B Basis von $U \Rightarrow B \leqslant V$ l.u. $\Rightarrow$ es gibt Basis B' von V mit $B' \supseteq B$

$\Rightarrow \underbrace{n}_{dim_K V} = |B'| \supseteq |B| = dim_K U$

ii) „=“ gilt $\Leftrightarrow B' = B \Leftrightarrow U = \langle B'\rangle = \langle B\rangle = V \Leftrightarrow U = V$

(2.29) Beispiel (Matrixdarstellung der komplexen Zahlen)

Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Also $dim_{\mathbb{R}} V = 4$ $(dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2)$

Setzte $E := E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{C} := \langle E, I\rangle \leq V$

(E,I) l.u. (E, I sind l.u.)

$\lambda \cdot E + \mu \cdot I = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$ Also (E,I) l.u. also auch $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$

Insbesondere ist (E,I) Basis von $\mathbb{C}$ jedes $x \in \mathbb{C}$ lässt sich eindeutich schreiben als $\lambda \cdot E + \mu \cdot I = \lambda + \mu \cdot i$

Es gilt $I^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$, also

$(\lambda\cdot E+\mu\cdot I)(\lambda^{'}\cdot E+\mu^{'}\cdot I)=\lambda\lambda^{'}E^2+\lambda\mu^{'}EI+\lambda^{'}\mu IE+\mu\mu^{'}I^2=(\lambda\lambda^{'}-\mu\mu^{'})E+(\lambda\mu^{'}+\lambda^{'}\mu)I$
Also ist $\mathbb{C}$ der Körper der Komplexen Zahlen.

Basen werden verwendet:

- zur Beschreibung von Unterräumen, insbesondere Lösungsmengen von homogenen LGS
- zur Beschreibung von linearen Abbildungen
- zur Einführung von Koordinaten bzw. Koordinatensystem

(2.30) Definition und Bemerkung (Rang von Matrizen)

Sei $A\in K^{m\times n}$. $ZR(A)=\langle z_1,\dots,z_n\rangle\leqslant K^{1\times n}$ wobei $z_i=$ Zeilen von A

$Rg\ A:=dim\ ZR(A)$ *Rang* von A $0\leqslant Rg\ A\leqslant n$
$Rg\ A=dim\ SR(A)\Leftrightarrow Rg\ A=Rg\ A^T$

Bemerkung
Wenn $A^{'}\in A$ durch elementare Zeilentransformation hervorgeht, dann ist $ZR(A)=ZR(A^{'})$, also $Rg\ A=Rg\ A^{'}$

Ebenso: $\mathbb{L}(A,0)=\mathbb{L}(A^{'},0)$ (1.13 Gauß Algorythmus)
Wenn A Zeilenstufenform hat, dann $Rg\ A=r$, wobei r ist die Anzahl der nicht Nullzeilen.

(2.31) Anwendung (Lösung eines LGS mittels Normalform)

Sei $A\in K^{m\times n}, b\in K^m$

- $A\cdot x=b$ lösbar $\Rightarrow b\in SR(A)$ (2.15)
- $A\cdot x=b$ lösbar $\Rightarrow A\cdot s=b,$ wobei $s\in K^n\Rightarrow\mathbb{L}(A,b)=s+\mathbb{L}(A,0)$ (2.19b)
- $\mathbb{L}_0:=\mathbb{L}(A,0)=Ker\varphi_A\leqslant K^n$
- Normalform: $A=\left(\begin{array}{c|c} E_r & * \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$, $r=Rg\ A$.

Sei A in Normalform etwa:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & c_{11} & \dots & c_{1n-r} \\ & 1 & & \vdots & \dots & \vdots \\ & & 1 & c_{r1} & \dots & c_{rn-r} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), b=\left(\begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ \hline b_{r+1} \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right)$$

$A\cdot x=b$ lösbar $\Leftrightarrow b_r,\dots,b_m=0$
$s:=b\in K_n$ ist Spezielle Lösung. Fehlt noch $\mathbb{L}_0(A)$!

a) $\mathbb{L}_0(A)=SR(A)\leq K^n$

b) Die Spalten von L sind l.u., bilden also eine Basis von $\mathbb{L}_0(A)$.

Folge: $\dim \mathbb{L}_0(A) = n - r = n - RgA = \#$, wobei # Anzahl der freien Unbekannten.

Beweis:

a) $L = (v_1, \ldots, v_{n-r})$mit $v_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ri} \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow r+i \\ \\ \end{matrix}$

$$A \cdot V_i = \begin{pmatrix} 1 \cdot c_{1i} + 0 + \ldots + 0 \cdot c_{11} + 0 + \ldots + (-1) \cdot c_{1i} + \ldots + 0 \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also $(v_1, \ldots, v_{n-r}) \in \mathbb{L}_0(A)$und $\langle v_1, \ldots, v_{n-r} \rangle \leqslant \mathbb{L}_0(A)$

$\mathbb{L}_0(A) \leq SR(L)$:

Sei $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_0(A)$und $\lambda_i := s_{r+i}$

$$\Rightarrow s^{'} := s + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \Rightarrow A \cdot s^{'} = 0 \Rightarrow E_r \cdot \begin{pmatrix} s^{'}_1 \\ \vdots \\ s^{'}_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} s^{'}_1 \\ \vdots \\ s^{'}_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_0(A) \Rightarrow \begin{pmatrix} s^{'}_1 \\ \vdots \\ s^{'}_r \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ alle $s^{'}_1, \ldots, s^{'}_r = 0 \Rightarrow s^{'} = 0$

Also $s = -(\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_r v_r) \in \langle v_1, \ldots, v_r \rangle = SR(L)$

Also ist $\mathbb{L}_0(A) \leqslant SR(L)$.

b) Nach Konstruktion sind $v_1, \ldots, v_{n-r}$ l.u.

(2.32) Beispiel

Sei K beliebiger Körper. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in K^{3 \times 7}$. Bestimme $\mathbb{L}_0(A)$

Spaltenvertauschung $x_3 \leftrightarrow x_4$:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \qquad RgA = Rg\tilde{A} = 3$$

$$\mathbb{L}_0(\tilde{A}) \overset{(2.31a)}{=} SR(L) = SR\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix} \end{array}$$

Spaltenvertauschung rückgängig:

$$\mathbb{L}_0(A) = SR(L) = SR\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{L}_0 A = \{t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots | t_1, t_2, \ldots \in \mathbb{R}\}$$

(2.33) Bemerkung

LGS $A \cdot x = b, A \subset K^{m \times n}$

Wiederholung:

$RgA = dim\underbrace{ZR(A)}_{\leqslant K^{m\times n}} =$ # Stufen nach Gauß I

i) $A \cdot x = b$, lösbar $\Leftrightarrow RgA = Rg(A,b)$

ii) $A \cdot x = b$, eindeutig lösbar $\Leftrightarrow dim\mathbb{L}_0(A) = 0 \Leftrightarrow n = RgA$

iii) $m < n \Rightarrow dim\mathbb{L}_0(A) = n - \underbrace{RgA}_{\leqslant m} \geqslant n - m > 0 \Rightarrow \mathbb{L}_0(A) \supsetneqq \{\emptyset\}$

iv) $n = m$, d.h. $A \in K^{n \times n}$

$A \cdot x = b$, eindeutig lösbar $\Leftrightarrow RgA = n \Leftrightarrow$ Für alle $b \in K^m$ ist $A \cdot x = b$ eindeutig lösbar.

Beweis: zu iv)

$n = RgA \leqslant Rg(A,b) \leqslant n \Rightarrow n = RgA = Rg(A,b) = n \overset{i)}{\Rightarrow} A \cdot x = b$ lösbar.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(2.34) Satz (Eindeutigkeit)

Seien V,W VR und $(v_1,\dots v_n)$ Basis von V zu beliebigen $w_1,\dots,w_n \in W$, existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ mit $\varphi(v_i) = w_i$ für $i = 1,\dots,n$ (Eine lineare Abbildung ist eindeutig definiert durch die Bilder der Basiselemente)

Beweis: Eindeutigkeit

Sei $\varphi : V \to W, v_i \to w_i$ lineare Abbildung. Sei $v \in V$ beliebig, $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ wobei $\lambda_i \in K$.

Dann $\varphi(v) = \varphi(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i)$.

Existenz: Definiere $\varphi : V \to W,\ \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \to \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$

(2.35) Beispiel

$V = \mathbb{R}^3$ mit Basis $(e_1,e_2,e_3), W = \mathbb{R}^2$.

Wähle beliebige $w_1,\ w_2,\ w_3 \in W$ z.B. $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

Dann sieht φ aus (2.34) so aus:

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+c \\ 2a+3b-7c \end{pmatrix}$$

(2.36) Bemerkung

Sei $V \to W$ linear.

i) $M \subseteq V \Rightarrow \varphi(\langle M \rangle) = \langle \varphi(M) \rangle$

ii) $U \subseteq V \Rightarrow \varphi(U) \subseteq W$

Wähle $U = V \Rightarrow Im\varphi \leqslant W,\ \varphi(v) = Im\varphi \leqslant W$

iii) $U \subseteq W \Rightarrow \varphi^{-1}(U) \subseteq V,\ U = \{0\} \Rightarrow Ker\varphi \subseteq V$

Beweis: zu i)

$\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(v_i) = \varphi(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i)$

ii) und iii) wie oben

(2.37) Definition (Rang und Defekt von φ)

Sei $\varphi : V \to W$ linear Abbildung.

$Rg(\varphi) := dim_K Im\varphi$ *Rang von* φ $\quad 0 \leqslant Rg(\varphi) \leqslant dimW$

$Def(\varphi) := dim_K Ker\varphi$ *Defekt von* φ $\quad 0 \leqslant Def(\varphi) \leqslant dimV$

Ist $dimV < \infty$, dann:

$|Rg(\varphi) + Def(\varphi) = n|$

(2.38) Beispiel (Abbildung linear?)

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ linear. Projektion entlang der z-Achse auf $x \cdot y$-Ebene

$Im\varphi = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \quad Rg(\varphi) = 2$

$Ker\varphi = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad Def(\varphi) = 1$

$Rg(\varphi) + Def(\varphi) = 3$ (Definitionsbereich)

(2.39) Folgerung

(Charakterisierung von injektiv, surjektiv, bijektiv bei linearen Abbildungen)

i) φ surjektiv
   $\Leftrightarrow Im(\varphi) = W$
   $\Leftrightarrow Rg(\varphi) = dimW$
   $\Leftrightarrow Def(\varphi) = dimV - dimW$

ii) φ injektiv
   $\Leftrightarrow Ker(\varphi) = \{\mathcal{O}\}$
   $\Leftrightarrow Def(\varphi) = 0$
   $\Leftrightarrow Rg(\varphi) = dimV$

iii) φ bijektiv (d.h. φ Isomorphismus)
   $\Leftrightarrow dimV = dimW = Rg(\varphi)$
   $\Leftrightarrow (B \leqslant V$ Basis $\Rightarrow \varphi(B) \leqslant W$ Basis)

iv) Spezialfall $n = dimV = dimW$(z.B. $\varphi : V \to V$)
   $Rg(\varphi) = n \Leftrightarrow \varphi$ surjektiv $\Leftrightarrow \varphi$ injektiv $\Leftrightarrow Rg(\varphi) = n$

(2.40) Satz (Isomorphie + Dimension)

Seien $V, W K$-VR, $dimV$, $dimW < \infty$ dann gilt:
$dim_K V = dim_K W \Leftrightarrow V \approxeq W$
Insbesondere: $dimV = n \Rightarrow V \approxeq K^n$

Beispiel
$\mathbb{C} \approxeq \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-VR
$\mathbb{R}^{2\times 2} \approxeq \mathbb{R}^4$ als $\mathbb{R}$-VR.

Beweis „$\Leftarrow$“ (2.37)
„$\Rightarrow$“ Sei $dimV = dimW := n < \infty$. Seien $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ Basen von V, W.

(2.33) Es gibt $\varphi : V \to W,\ v_i \to w_i$ für $i = 1, \dots, n$
Wegen $dimV = dimW$ reicht es zu zeigen z.B.: φ surjektiv
$w_1, \dots w_n \in Im\varphi \Rightarrow W = \langle w_1, \dots w_n \rangle < Im\varphi \Rightarrow \varphi$ surjektiv.

(2.41) Definition + Bemerkung (Koordinatensystem + -vektor)

Seien $\dim V = n < \infty$. Ein *Kordinatensystem* auf V ist ein Isomorphismus. Für $v \in V$ heißt $\varphi(V)$ der *Koordinatenvektor* von v bzgl. φ.

$$\varphi : V \to K^n$$

Beweis

Koordinatensysteme entsprechen Basen:
$B = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V ist $\Rightarrow \varphi_B : v\varphi K^n, v_i \to e_i$ für $i = 1, \dots, n$ Koordinaten System.
φ Koordinatensystem von V.
$\Rightarrow (\varphi^{-1}(e_1), \dots, \varphi^{-1}(e_1))$ Basis von V.

(2.42) Beispiele

a) Betrachte $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R} \to$ VR.

$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, a + b_i \to \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ist Koordinatensystem auf $\mathbb{C}$

Die Zugehörige Basis ist: $(1, i)$.

b) $\varphi : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ ist Koordinatensystem auf $\mathbb{R}^{2\times2}$

zug. Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

Anwendung von Koordinatensystem

Berechnung von:

- Basen von UR (z.B. $Ker\varphi$, $Im\varphi$)
- Dimensionen von UR (z.B. $Rg\varphi$, $Def\varphi$)

in belibigen VR wird zurückgeführt auf eine Berechnung in K^n.

§6 Unterräume des K^n

Beispiele

$\mathbb{R}^n$ n-dimensionale euklidische Raum

$\mathbb{Z}_p^n$ Gitterpunkte im n-dimensionalen Würfel Seitenlänge p. z.B.: $\mathbb{Z}_2^3$

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
$ZR(A)^t \leqslant K^n$
$SR(A)^t \leqslant K^{1\times n}$
$\mathbb{L}_0(A) \leqslant K^n$ heißt *Nullraum* von A.

(2.43) Bemerkung

Die Abbildungen
$(\cdot)^t : K^n \to K^{1\times n}, x \to x^t$
$(\cdot)^t : K^{1\times n} \to K^n, x \to x^t$ sind Isomorphismen.

Für alle $A \in K^{m\times n}$ gilt:
$ZR(A)^t = SR(A^t) \leqslant K^n$
$SR(A)^t = ZR(A^t) \leqslant K^{1\times m}$

Fragen

i) Wie bestimmt man Basis/Dimension von $SR(A)$, $ZR(A)$, $\mathbb{L}_0(A)$?

ii) Wie testet man $x \in SR(A)$, $ZR(A)$, $\mathbb{L}_0(A)$?

(2.44) Bemerkung

Sei A in ZS-Form mit Zeilen $z_1, \dots, z_r$ und $z_1, \dots, z_r \neq 0$, dann ist $RgA = r$ und $(z_1, \dots, z_r)$ Basis von $ZR(A)$.
Folge: $(z_1^t, \dots, z_r^t)$ Basis von $ZR(A)^t = SR(A)^t$.

(2.45) Anwendung (Bestimmung von Basis/Dimension von SR, ZR und L_0

Sei A beliebig $A \in K^{m\times n}$.

1. Bring A auf ZS-Form mit Zeilentransfomation

2. Lese Basis von $ZR(A)$ aus Zeilen ab (dabei Null-Zeilen weglassen)

oder

1. Bring A^t auf ZS-Form

2. Lese Zeile ab und transponiere diese → Basis von $SR(A)$.

(2.46) Beispiel

$$U := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle \leqslant \mathbb{R}^4 \quad U = SR(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{=:A\in\mathbb{R}^{4\times 3}})$$

Spaltentransformationen

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow dimU = 2, (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}) \text{ Basis von } U$$

$\mathrm{SR}(A) = \mathrm{ZR}(A^t)^t$

(2.47) Bemerkung

Sei $A \in K^{m\times n}, U \in K^m, V \in K^{1\times n}, w \in K^n$

i) $u \in SR(A) \Leftrightarrow Ax = u$ lösbar (LGS lösen)

ii) $v \in ZR(A) \Leftrightarrow A^t x = v^t$ lösbar (LGS lösen)

iii) $w \in \mathbb{L}_0(A) \Leftrightarrow Aw = 0$ prüfen (Matrix ...)

Beweis zu b)

$v \in ZR(A) \overset{(\cdot)^t Isomorphismus}{\Longleftrightarrow} v^t \in ZR(A)^t = SR(A)^t \overset{a)}{\Leftrightarrow} A^t x = v^t$ lösbar.

(2.48) Satz

Jeder UV $U \leqslant K^n$ ist Spaltenraum $SR(A)$ einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit $m = dimU$

Beweis

Wähle Basis von U und trage diese in die Spalten von A ein. Anwendung (2.31)
$\Rightarrow \mathbb{L}_0(A) = \mathrm{SR}(L)$

(2.49) Hilfsatz

Sei $A \in K^{m\times n}, L \in K^{n\times m}$ dann gilt:
$\mathbb{L}_0(A) = SR(A) \Rightarrow \mathbb{L}_0(L^t) = SR(A^t)$

Beweis

$SR(L) \leqslant \mathbb{L}_0(A) \Rightarrow A \cdot L = 0 \Rightarrow L^t \cdot A^t = 0 \Rightarrow SR(A^t) \leqslant \mathbb{L}(L^t)$
$\mathbb{L}_0(L^t) = SR(A^t)$

„="

$\Rightarrow Rg(L) = n - Rg(A) \Rightarrow Rg(A) = n - Rg(L) \Rightarrow Rg(A^t) = n - RgL^t$
fertig nach Bemerkung (2.28b)

(2.50) Folgerung

Jeder Unterraum $U \leqslant K^n$ ist Nullraum $Ł_0(A)$ einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit m = n - $dimU = Rg(A)$
$U = \mathbb{L}_0(A) = \{u \in K^n \mid Au = 0\}$

Beweis

1. $U = SR(B),\ B \in K^{n\times d},\ d = dim(U) = Rg(B)$
2. $\mathbb{L}_0(B^t) = SR(L),\ L \in K^{n\times(n-d)},\ Rg(L) = dim\mathbb{L}_0(B^t) = n-d \overset{(2.31)}{\Rightarrow} SR(B) = \mathbb{L}_0(L^t)$
3. Setzen $A := L^t \Rightarrow U = SR(B) = \mathbb{L}_0(L^t) = \mathbb{L}_0(A)$

(2.51) Bemerkung

Je nach Anwendung ist eine Beschreibung von $U \leqslant K^n$ als SR oder als NR vorzuziehen:

i) für Basis : *SR*

ii) für Elementtest : NR

iii) $dim(U)$ „groß“: NR „effektiver“ z.B. $dim(U) = n-1$ (U Hyperebene)
$\rightarrow U = \mathbb{L}_0(A), A \in K^{1\times n}$ einzeilig!

Anwendung Codierungstheorie

$K = \mathbb{Z}_2$ Annehmen:

- es gehen keine bits verloren
- Fehlerwahrscheinlichkeit „klein“ $(< \frac{1}{2})$

Ziel:
Empfänger kann Fehler erkennen bzw. sogar korrigieren können.
Für $\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ wird $\begin{cases} (0,0) \\ (1,1) \end{cases}$ gesendet (Wiederholungscode)
Bei Empfang von (0,1) oder (1,0) ist mit sicherheit ein Fehler aufgetreten.

Aufgabe
Sei n fest. Finde geeignete *Codes* d.h. Teilmengen $C \leqslant \mathbb{Z}_2^n$ inkl. Codiervorschrift und Prüfschritt (bzw. Korrekturvorschrift).

(2.52) Definition (Codewörter, Generator- und Kontrollmatrix)

Ein UR $C \leqslant \mathbb{Z}_2^n$ (binärer) *linearer Code* der Länge n. Die Elemente von C heißen *Codewörter* (es gibt 2^{dimC} viele). (Folgerung (2.25))

Codierung
Sender wählt $G \in \mathbb{Z}_2^{n\times k}$ mit $C = \mathrm{SR}(G)$ Die Codierungsabbildung ist:
$c : \mathbb{Z}_2^k \rightarrow \mathbb{Z}_2^n, v \mapsto Gv$
$\varphi : \mathbb{Z}_2^k \rightarrow C$ ist Isomophismus: (c ist srujektiv nach Wahl von g)

$\Rightarrow Rg\varphi = dimC = k \Rightarrow Def\varphi = k - Rg\varphi = k - k = 0 \Rightarrow \varphi$ injektiv $\Rightarrow \varphi$ bijektiv. G heißt *Generatormatrix.*

Prüfung

Empfänger wählt $H \in \mathbb{Z}_2^{(n-k)\times n}$ mit $C = \mathbb{L}_0(H)$ Zur Prüfung Empfangswörtes $w \in \mathbb{Z}_2^n$ wird $H \cdot w$ berechnet.
$H \cdot w \neq 0 \Rightarrow w \notin c \Rightarrow$ Fehler passiert.
$H \cdot w = 0 \Rightarrow w \in c \Rightarrow$ (wahrscheilich) kein Fehler passiert.
H heißt *Kontrollmatrix.*

(2.53) Bemerkung (Fehler)

Es bleiben genau die Fehler $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^n$ unerkannt, für die $H \cdot w = 0$ ist, d.h. sie selbst Codewörter sind.

Beweis

Sei $W = c + \varepsilon$. Fehler bleibt unendeckt $\Leftrightarrow H \cdot w = 0 \Leftrightarrow Hc + H\varepsilon = 0 \Leftrightarrow H\varepsilon = 0$

Annahme: 1-fache Fehler am häufigsten.

(2.54) Satz (Fehler)

Sei C binärer linearer Code mit Kontrollmatrix H. Ein Fehler $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^n$ heißt 1-fach, wenn $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ genau eine 1 enthält.

1. Sind die Spalten von H alle $\neq 0$, so werden alle 1-fachen Fehler erkannt.
2. Sind die Spalten von H paarweise verschieben und $\neq 0$, so können alle 1-fachen Fehler korriegiert werden.

Beweis

$$\varepsilon \text{ 1-fach} \Rightarrow \varepsilon = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \quad \text{für ein } i \in \{1, \dots, n\} \quad H \cdot e_i = \text{i-te Spalte von } H.$$

1. $H \cdot e_i \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\} \Rightarrow$ alle Fehler e_i werden erkannt.
2. Die Abbildung $f : \underline{n} \to \mathbb{Z}_2^n, \underset{\text{Stelle des Fehlers}}{i} \longrightarrow \underset{\text{Prüfungsergebnis}}{He_i}$ ist injektiv.

Also kann man aus dem Prüfungsergebnis He_i die Stelle des Fehlers ablesen.

(2.55) Beispiel (Konstruktion von Codes (Hamming-Code))

Wir konstruieren H. Dann $C := \mathbb{L}_0(H)$.

- $|c| = 2^{n-Rg(H)}$, also wähle n gross und $Rg(H)$ klein.
- Wähle die Spalten von H paarwiese verschieben und $\neq 0$

Beispiel

$$Rg(H) = 3, \quad H \in \mathbb{Z}_2^{3\times n}, \quad n = 7$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 01 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 00 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C := \mathbb{L}_0(H) \text{ heißt } \textit{Hamming-Code} \text{ (aus (2.32))}$$

$C = SR(G)$ (aus (2.32))
$dim(C) = n - Rg(H) = 7 - 3 = 4 \quad |c| = 2^4 = 16$
4 bit Nachricht wird zu 7 bit Codewort codiert.

Beispiel

$$\underset{\in \mathbb{Z}_2}{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{c}{\to} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{+\varepsilon}{\to} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{4-te Stelle von H.}$$

Fehler war an 4. Stelle (Binärdarstellung an der Stelle des Fehlers).

$C := \mathbb{L}_0(\tilde{H})$ heißt **erweiterter Hamming-Code**. $\tilde{H}$ codiert (Aufgabe 36b) bit zu 8 bit. Reed-Solomon Codes (z.B. auf CD) sind Codes über $\mathbb{F}_8$.

§7 Lineare Abbildungen und Matrizen

Sei K Körper.

U, V, W, ...	K-VR (endl.-dim)
$\mathcal{A}, \mathcal{A}', \dots$	Basis von $\mathcal{U}$ $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_l)$
$\mathcal{B}, \mathcal{B}', \dots$	Basis von $\mathcal{V}$ $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_l)$
$\mathcal{C}, \mathcal{C}', \dots$	Basis von $\mathcal{W}$ $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_l)$
$\varphi, \psi, \chi, \dots$	lineare Abbildung
A, B, C, ...	Matrizen

$$\chi_{\mathcal{B}} : V \overset{\cong}{\rightarrow} K^n, \sum \lambda_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

(2.56) Definition (Abbildungsmatrix)

Sei $\varphi \in Hom_K(V,W)$, d.h. $\varphi : V \to W$ linear. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ gewählt.
Definiere $a_{ij} \in K$ durch $\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$, $1 \le j \le n, 1 \le i \le m.$
Dann heißt $M_\varphi := {}^{\mathcal{C}}M_\varphi^{\mathcal{B}} := (a_{ij}) \in K^{m \times n}$
(Abbildungs-)Matrix von φ bzgl. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.
Bemerkung: $\mu\varphi = (\chi_{\mathcal{C}}\varphi(v_1), \dots, \chi_{\mathcal{C}}\varphi(v_n))$

(2.57) Beispiele

Wir bezeichnen mit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n$ die (Standard-)Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von K^n.

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix}$ linear.

$M_\varphi = {}^{\mathcal{E}}M_\varphi^{\mathcal{E}} = ?$ $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 = (e_1, e_2)$

$$\varphi(e_1) = \varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_2) = \varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $A \in K^{mxn} \varphi_A : K^n \to K^m, x \mapsto Ax$
${}^{\varepsilon}M_\varphi^{\varepsilon} = ? = (\cdots, \chi_\varepsilon \varphi(e_j), \cdots)$
$\varphi(e_j) = Ae_j =$ j-te Spalte von $A \Rightarrow M_\varphi = A$

c) $V = W$, B Basis von $V. \varphi \in Hom_k(V,V)$. Dann ist $\varphi = id_v \Leftrightarrow {}^BM_\varphi^B = E_n (n = dim(V))(\varphi(v_j) = v_j \Leftrightarrow M_\varphi = E_n)$

d) Sei $V = Pol_n(\mathbb{R}) = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 | a_i \in \mathbb{R}\}$ ist $\mathbb{B} - VR$ mit $\dim V = n+1$ und Basis $(1, x, x^2, \cdots, x^n)$
$\varphi : V \to V, f \mapsto f'$ linear (Ableitung)
$M_\varphi = ?$

$$\varphi(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = 0 \\ ix^{i-1} & \text{falls } i > 0 \end{cases} \quad i = 0, \cdots, n$$

$$\Rightarrow M_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)x(n+1)}$$

Abstrakte VR	→ Koord.sys. (Basen) →	Standard VR
V		K^n
$v \in V$		$\chi_B(v)$
lin. Abb		Matrizen
φ		M_φ
$\varphi(v)$		$M - \varphi x$
$Ker(\varphi)$		$\mathbb{L}_0(M_\varphi)$
$Im(\varphi)$		$SR(M_\varphi)$
$Rg(\varphi)$		$Rg(M_\varphi)$
$\varphi \circ \psi$		$M_\varphi \cdot M_\psi$
ψ^{-1}		$M_{\varphi^{-1}}$
φ isom.		M_φ invertierbar

(2.58) Satz

$\varphi \in Hom(V,W), n = dim(V), m = dim(W)$

a) $\chi_C \circ \varphi(v) \in K^m = {}^C M_\varphi^B \cdot \chi_B(v) \forall v \in V.$

$\chi_B(v) \in K^n, {}^C M_\varphi^B \cdot \chi_B(v) \in K^m$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, leftrightarrow, "\chi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & W \arrow[d, leftrightarrow, "\chi_{\mathcal{C}}"] \\ K^n \arrow[r, "\varphi_{M_\varphi}"] & K^m \\ x \arrow[r, mapsto, "M_\varphi"] & M_\varphi x \end{tikzcd}$$

a’ $\chi_{\mathbb{C}} \circ \varphi = \varphi_{M_\varphi} \circ \chi_{\mathcal{B}}$

a„ $\varphi = \chi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \varphi_{M_\varphi} \circ \chi_{\mathcal{B}}$

b [i] $Ker\varphi = \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbb{L}_0(M_\varphi))$

ii $Im\varphi = \varphi_{\mathcal{C}}^{-1}(SR(M_\varphi))$

iii $Rg\varphi = RgM_\varphi$

<u>Beweis:</u> Satz(2.34): es reicht (a) z.z. für $v_1, \cdots, v_n$
$M_\varphi = (\cdots, \chi_C \varphi(v_j), \cdots)$
$\chi_C \varphi(v_j) = j$-te Spalte M_φ

$M_\varphi \chi_{\mathcal{B}}(v_j) = M_\varphi \varphi_j =$ j-te Stelle $M_\varphi \forall j$
$[b][i]\varphi(v) = 0 \overset{\chi_{\mathcal{B}isom.}}{\Leftrightarrow} \chi_{\mathcal{B}}\varphi(v) = 0 \overset{[a]}{\Leftrightarrow} M_\varphi \chi_{\mathcal{B}}(v) = 0 \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{B}}(v) \in \mathbb{L}_0(M_\varphi) \overset{\chi_{\mathcal{B}isom.}}{\Leftrightarrow} v \in \chi_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathbb{L}_0(M_\varphi))$
[ii],[iii] als Übung

(2.59) Beispiel

a)

$$\begin{tikzcd}
Pol_n(\mathcal{R}) \arrow[r, "\varphi Abl."] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathcal{B}=(1,x,\cdots,x^n)"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Pol_n(\mathcal{R}) \arrow[d, leftrightarrow, "\mathcal{B}"] \\
K^n \arrow[r, "\varphi_{M_\varphi}"] & K^m \\
\mathcal{R}^{n+1} \arrow[r, mapsto, "M_\phi"] & \mathcal{R}^{n+1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc}
a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 & \mapsto & n a_n x^{n-1} + \ldots + 2a_2 x + a_1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & n \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ \vdots \\ n a_n \end{pmatrix}
\end{array}$$

b) $A \in K^{m \times n}$ $V, W dim V = n, dim W = m$
$\varphi := \chi_\varphi^{-1} \circ \varphi_A \circ \chi_B \in Hom_K(V, W)$
Dann $M_\varphi = A$

(2.60) Satz (TODO)

TODO

a) TODO

(2.61) Folgerung (TODO)

Wenn phi Isomorphismus (also bijektiv), genau dann ist die Abbildungsmatrix invertierbar.
TODO

(2.62) Folgerung

Sei $A \in K^{n \times n}$.
A invertierbar $\Leftrightarrow RgA = n$.
Beweis:
$\varphi_A : K^n \to K^n, x \mapsto Ax$
Bsp (2.57c) $M_{\varphi_A} = A$
A invertierbar $\Leftrightarrow$ φ_A Isomorphismus $\Leftrightarrow Rg\varphi_A = n$

Basiswechsel $\varphi \in Hom(V, W)$

B, B' Basen von V
C, C' Basen von W
Wie hängen ${}^{C}M_{\varphi}^{B}$ und ${}^{C'}M_{\varphi}^{B'}$ zusammen?

(2.63) Definiton + Bemerkung (Basiswechselmatrix)

${}^{B}T^{B'} := {}^{B}M_{id}^{B'}$ heißt die *Basiswechselmatrix* (auch *Darstellungsmatrix* und *Abbildungsmatrix* genannt) von B nach B'.

Merke: Die Koordinaten der neuen Basisvektoren (aus B') bzgl. B (der alten Basis) kommen in die Spalten der Basiswechselmatrix.

Bemerkung: ${}^{B}T^{B'}$ invertierbar und $({}^{B}T^{B'})^{-1} = {}^{B'}T^{B}$. Beweis: id_v homomorphismus, Folgerung (2.61) $\Rightarrow$ ${}^{B}M_{id_v}^{B'}$ invertierbar.

(2.64) Satz (Basiswechselsatz)

Es ist ${}^{\mathcal{C}'}M_{\varphi}^{\mathcal{B}'} = {}^{\mathcal{C}'}T^{\mathcal{C}} \cdot {}^{\mathcal{C}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}} \cdot {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{B}'} = \left({}^{\mathcal{C}}T^{\mathcal{C}'}\right)^{-1} \cdot {}^{\mathcal{C}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}} \cdot {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{B}'}$
Beweis:

$$\begin{tikzcd}
{}^{\mathcal{B}}V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, leftrightarrow, "id_V"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & W^{\mathcal{C}} \arrow[d, leftrightarrow, "id_W"] \\
{}_{\mathcal{B}'}V \arrow[r, "\varphi"] & W^{\mathcal{C}'}
\end{tikzcd}$$

$\varphi = id_W \cdot \varphi \cdot id_V$. Also:
${}^{\mathcal{C}'}M_{\varphi}^{\mathcal{B}'} = {}^{\mathcal{C}'}M_{id_W \cdot \varphi \cdot id_V}^{\mathcal{B}'} \overset{(2.60)}{=} {}^{\mathcal{C}'}M_{id_V}^{\mathcal{C}} \cdot {}^{\mathcal{C}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}} \cdot {}^{\mathcal{B}}M_{id_W}^{\mathcal{B}'} = {}^{\mathcal{C}'}T^{\mathcal{C}} \cdot {}^{\mathcal{C}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}} \cdot {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{B}'}$

(2.65) Bemerkung

Sei $dim V = n$. Jede Matrix $T \in GL_n(K)$ ist Basiswechselmatrix ${}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{B}'}$ für eine geeignete Basis $\mathcal{B}'$ von V, und diese ist eindeutig bestimmt.
Beweis:
Sei $T = (t_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in GL_n(K)$, $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_n)$.
Gesucht: $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ mit $T = {}^{\mathcal{B}}M_{id_V}^{\mathcal{B}'} = \left(\ldots, \overbrace{\chi_{\mathcal{B}} \cdot id_V \left(v'_j\right)}^{\text{j-te Spalte}}, \ldots \right)$. $\chi_{\mathcal{B}} \cdot id_V \left(v'_j\right) = \chi_{\mathcal{B}} \cdot \left(v'_j\right) \Rightarrow v'_j = \chi_{\mathcal{B}}^{-1}$ (j-te Spalte von T) $= \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \cdot v_i$. $\mathcal{B}' := (v'_1, \ldots . v'_n)$ ist die gesuchte Basis.

(2.66) Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $E = (e_1, e_2)$ die Einheitsbasis.
$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\varphi_A(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_A(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
$B := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\varphi_B(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varphi_B(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
allgemein:
φ_C mit $C := \begin{pmatrix} cos\,\alpha & sin\,\alpha \\ -sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}$ ist eine Drehung um Winkel α.

(2.67) Bemerkung (Basiswechsel entsprechen Isomorphismen)

Basiswechsel entsprechen Isomorphismus

$$\underbrace{\mathcal{B}}_{(v_1,\ldots,v_n)} \rightsquigarrow \underbrace{\mathcal{B}'}_{v'_1,\ldots,v'_n} \xrightarrow{\text{entspricht}} \begin{array}{c} \varphi : V \xrightarrow{\cong} V \\ \varphi(v_j) := v'_j (j = 1,\ldots,n) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{B} \rightsquigarrow \mathcal{B}' \\ v'_j = \varphi(v_j) \end{array} \xleftarrow{\text{entspricht}} \varphi : V \xrightarrow{\cong} V$$

Es gilt dann:

$$^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{B}'} = {}^{\mathcal{B}}M^{\mathcal{B}'} \left(= {}^{\mathcal{B}}M^{\mathcal{B}'}_{id_v}\right)$$

Wdh.

$$\varphi : V \to W$$

- $\chi_{\mathcal{C}}\varphi(v) = M^{\mathcal{B}}_{\varphi\chi_{\mathcal{B}}(v)}$
- (Basiswechselsatz) $^{\mathcal{C}}M^{\mathcal{B}'}_{\varphi} = {}^{\mathcal{C}'}T^{\mathcal{C}} \circ {}^{\mathcal{C}}M^{\mathcal{B}}_{\varphi} \circ {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{B}'}$

(2.68) Folgerung

$\mathcal{B},\mathcal{B}'$ Basis von V, $T := {}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{B}'}$

1. $\chi_{\mathcal{B}}(v) = T \circ \chi_{\mathcal{B}'}(v)$ bzw. $\left(T^{-1} = {}^{\mathcal{B}'}T^{\mathcal{B}}\right)$
   $\chi_{\mathcal{B}'}(v) = T^{-1} \circ \chi_{\mathcal{B}}(v)$
2. Sei $\varphi \in Hom_K(V,V)$ Schreibe $M^{\mathcal{B}}_{\varphi}$ fuer $^{\mathcal{B}}M^{\mathcal{B}}_{\varphi}$
   $M^{\mathcal{B}'}_{\varphi} = T^{-1} \circ M^{\mathcal{B}}_{\varphi} \circ T$

(2.69) Beispiel

$V = \mathbb{R}, B = E = (e_1,e_2), B' = (v'_1,v'_2), v'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v'_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T := {}^{B}T^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} {}^{B}T^{B'} = {}^{B}M^{B'}_{id_v}$
$T^{-1} = {}^{B'}T^{B} = \cdots = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Sei $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} .\chi_{B'}(v) =?\ \chi_{B'}(v) = T^{-1}\chi_B(v) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
b) $\phi : \mathbb{R}^2\mathbb{R}^2, \phi := \phi_A, A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, d.h. $\phi_A\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3a+4b \\ 4a+3b \end{pmatrix}$
Bessere Beschreibung von ϕ_A? z.B. $E \rightsquigarrow B$!

§8 Matrix-Inversion und LU-Zerlegung

Sei K Körper, $A \in K^{n\times n}$.
A invertierbar $A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \varphi_A$ Isomorphismus (bijektiv $x \mapsto Ax) \Leftrightarrow RgA = n \Leftrightarrow \forall b \in K^n$ ist $Ax = b$ eindeutig lösbar (dann ist $A^{-1}b$ die eindeutige Lösung).

Anwendung der Inversenmatrix:

- Basiswechseln (T^{-1})
- Umkehrabbildung
- ein LGS lösen für viele verschiedenen b $(x = A^{-1}b)$

Invertieren

Finde $B \in K^{n\times n}$ mit $A \cdot \overset{x}{B} = \overset{b}{E_n}$.
$AB = E_n \Leftrightarrow$ die j-te Spalte von B ist LGS von $Ax = e_j$ für $\underline{j} = 1,\dots,n$.
Ansatz: Löse alle $A \cdot x = e_j$ gleichzeitig, etwa so:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & E_n \end{array}\right) \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \left(\underbrace{\begin{array}{c|} E_n \end{array}}_{\substack{RgA=n \\ \text{(Normalform)}}} \underbrace{\quad * \quad}_{A^{-1}}\right)$$

denn die j-te Spalte ist Lösung von $Ax = e_j$.

(2.70) Beispiel

$T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} T^{-1} = ?$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} |(-2) \\ + \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right) \; |\cdot(\tfrac{1}{5}) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \begin{array}{c} + \\ |\cdot 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \Rightarrow T^{-1} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

LU/LR-Zerlegung
deutsch: links-rechts, englisch: lower-upper

Sei $A \in \mathrm{GL_n}(K)$ (quadratische, invertierbare Matrix). Betrachte Matrixgleichung der Form
(*) $L \cdot U = A$, wobei $L,\ U \in \mathrm{GL_n}(K)$
z.B. $E_n \cdot A = A$.

(2.71) Satz

Seien $(s_1,\dots,s_n)$ die Spalten von L und $(z_1,\dots,z_n)$ die Zeilen von U. Folgende Umformungen erhalten die Gleichung (*):
(Typ I) $z_i \rightsquigarrow \lambda z_i, s_i \rightsquigarrow \frac{1}{\lambda}s_i,\ 0 \neq \lambda \in K,\ 1 \leqslant i \leqslant n$. ($\rightsquigarrow$= „wird ersetzt durch„)
(Typ II) $z_i \rightsquigarrow z_i + \lambda z_j,\ s_j \rightsquigarrow s_j - \lambda s_i,\ \lambda \in K,\ 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

A bleibt erhalten. (Vertauschung fürs erste nicht erlaubt).

Anwendung Löse $Ax = b$

1. Löse $Ly = b$
2. Löse $Ux = y$

Dann ist $Ax = LUx = Ly = b$. $(L \cdot U = A)$

(2.72) Algorithmus (LU/LR-Zerlegung)

$\mathbf{A} \in \mathrm{GL_n}(\mathbf{K})$ Starte mit $E_n \cdot A = A$, d.h. $L = E_n$ und $U = A$, und bringe U durch Umformungen aus Satz (3.71) auf Zeilenstufenform. (genauer: obere „Dreiecksform„weil $RgA = n$) mit Einsen in der Diagonalen (falls die Matrix überhaupt invertierbar ist). Am Ende hat L untere „Dreiecksform“.

(2.73) Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \cdot 2 & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot \frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} + & \cdot(-3) & & & & \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 3 \\ \;\; + \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} + & & \cdot 4 & & & \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 9 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-4) \\ \\ \quad\;\; + \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} & + & \cdot(-3) & & & \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ |\cdot 3 \\ \;\; + \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & \cdot 7 & & & \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot\frac{1}{7} \end{array} \Rightarrow \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{array}}_{=L} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{=U}\right) = A = L \cdot U$$

Für jeden Schritt gilt, dass der linke Teil der Matrix multipliziert mit dem rechten Teil der Matrix A ergibt.

Löse $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$:

1. Löse $Ly = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l} 2y_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 1 \\ y_2 = 3y_1 + 2 \Rightarrow y_2 = 5 \\ 7y_3 = -4y_1 + 3y_2 + 3 = 14 \Rightarrow y_3 = 2 \end{array} \quad \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Löse $Ux = y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ (Rückwärtssubstitution)

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_2 &= -3x_3 + 5 = -1 \\ x_1 &= -3x_2 - x_3 + 1 = 3 - 2 + 1 = 2 \end{aligned} \qquad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2.74) Bemerkung

$A \in \mathrm{GL_n}(K)$. Löse $Ax = b$ für viele b.

LU-Zerlegung braucht $\approx \frac{1}{3}n^3$ Multiplikationen.
Inversion braucht $\approx \frac{4}{3}n^3$ Multiplikationen.
Für jedes b braucht die LU-Zerlegung $\approx n^2$ Multiplikationen. $2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \approx n^2$
Für jedes b braucht $A^{-1}b$ auch $\approx n^2$ Multiplikationen.

φ_A surjektiv $\Leftrightarrow$ existiert B mit $A \cdot B = E$

Frage: Wie löst man $Ax = b$ für viele b's wenn $A \in Km \times n$ nicht quadratisch?

Anwendung:
V Nachricht $\in \mathbb{Z}_2^K$
$C = GV$ Codewort $\in \mathbb{Z}_2^n$
Empfänger löst $Gv = c$ für v

(2.75) Satz

Sei $A \in K^{m\times n}$. Ist φ_A injektiv, so existiert $B \in K^{n\times m}$ mit $B \cdot A = E_n$.
Ist $Ax = b$ lösbar, so ist $B \cdot b$ die eindeutige Lösung.

Beweis:

$B \cdot A = E_n \Leftrightarrow A^t \cdot B^t = E_n$

Zeige: existiert $C \in K^{m\times n}$ mit $\underbrace{A^t}_{\in K^{n\times m}} \cdot C = E_n, A^t \in K^{n\times m}$ und wähle $B := C^t$

$$\begin{aligned} c \text{ existiert} \quad &\Leftrightarrow \quad A^t \cdot x = e_j \text{ lösbar } \forall j \\ &\Leftrightarrow \quad Im\varphi_{A^t} = K^n \\ &\overset{\varphi_{A^t}:K^m \to K^n}{\Leftrightarrow} \quad \varphi_{A^t} \text{ surjektiv} \\ &\overset{\varphi_A:=K^n \to K^n}{\Leftrightarrow} \quad n = Rg\varphi_{A^t} = RgA^t = RgA = Rg\varphi_A \\ &\Leftrightarrow \quad Def\varphi_A = n - Rg\varphi_A = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi_A \text{ injektiv.} \end{aligned}$$

$$Ax = b \Rightarrow x = \underbrace{BA}_{=E_n} x = Bb$$

(2.76) Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \quad RgA = 2 \Rightarrow \varphi_A$ injektiv.

Gesucht:

$B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $B \cdot A = E_2 \quad A^t \cdot B^t = E_2$ für $B^t \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} + \\ |\cdot(-2) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ |\cdot(-1) \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Also $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ bzw. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

1. Löse $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$:

   $B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (Eindeutige Lösung), Probe: $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Löse $Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$:

   $B \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (existiert keine Lösung, da die Probe fehlschlägt)

   Probe: $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Determinanten und Eigenvektoren

§9 Determinanten

$det : K^{n\times n} \to K$ ist eine Abbildung mit z.B.

- $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertierbar
- $det(A\cdot B) = det(A)\cdot det(B)$

R kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}$, $A \in R^{n\times n}$. Seien $A = (s_1,\ldots,s_n)$, $s_j \in R^n$ j-te Spalte von A.

(3.1) Definition

Eine Abbildung $D : R^{n\times n} \to R$ heißt *Determinante*, wenn gelte:

1. D ist „multilinear“: $D(s_1,\ldots,s_{j-1},\lambda s_j + \mu s'_j, s_{j+1},\ldots,s_n)$
   $= \lambda\cdot D(s_1,\ldots,s_j,\ldots,s_n) + \mu\cdot D(s_1,\ldots,s'_j,\ldots,s_n) \forall 1 \leq i \leq n$ und $\lambda,\mu \in R$.
2. D ist „alternierend“: $D(S_1,\ldots,s_n) = 0$ falls $s_i = s_j$ für $i \neq j$.
3. D ist „normiert“: $D(E_n) = 1$.

(3.2) Beispiel

a) $n = 1 \quad D : R^{1\times 1} \to R, (a) \mapsto a.$

b) $n = 2 \quad D : R^{2\times 2} \to R, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc.$

(3.3) Bemerkung (Determinanteneinfluss auf Spaltentranformationen)

Sei $D : R^{n\times n} \to R$ eine Determinante.

a) $D(\ldots,s_i,\ldots,s_j,\ldots) = -D(\ldots,\underbrace{s_j}_{i-teSpalte},\ldots,\underbrace{s_i}_{j-teSpalte},\ldots)$ (vergleich: $\tau_{i,j}$).

b) $D(s_{\Pi(1)},s_{\Pi(2)},\ldots,s_{\Pi(n)}) = sgn\,\Pi\cdot D(s_1,\ldots,s_n)\,\forall\,\Pi \in S_n$.

c) $D(e_{\Pi(1)},e_{\Pi(2)},\ldots,e_{\Pi(n)}) = sgn\,\Pi\cdot \underbrace{D(E_n)}_{=1} = sgn\,\Pi.$

d) $D(s_1,\ldots,\lambda s_i,\ldots,s_n) = \lambda\cdot D(s_1,\ldots,s_n)$ (vergleich: $\mu_i(\lambda)$)

d’) $D(s_1,\ldots,0,\ldots,s_n) = 0$

e) $D(s_1,\ldots,\underbrace{s_i + \lambda s_j}_{i-teSpalte},\ldots,s_n) = D(s_1,\ldots,s_n)\,\forall\, i \neq j$ (vergleich: $\alpha_{i,j}(\lambda)$).

f) $D(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot D(A)$

Beweise:

a) $D(\dots,s_i,\dots,s_j,\dots) = D(\dots,s_j,\dots,s_i,\dots)$

$$\begin{aligned}
0 &= D(\dots,s_i+s_j,\dots,s_i+s_j,\dots) \\
multi- &= D(\dots,s_i,\dots,s_i+s_j,\dots)+D(\dots,s_j,\dots,s_i+s_j,\dots) \\
linear &= \underbrace{D(\dots,s_i,\dots,s_i,\dots)}_{=0}+D(\dots,s_i,\dots,s_j,\dots)+ \\
&\ D(\dots,s_j,\dots,s_i,\dots)+\underbrace{D(\dots,s_j,\dots,s_j,\dots)}_{=0} \\
&= D(\dots,s_i,\dots,s_j,\dots)+D(\dots,s_j,\dots,s_i,\dots). \quad \square
\end{aligned}$$

e) $D(s_1,\dots,\underbrace{s_i+\lambda s_j}_{i-teSpalte},\dots,s_n) = D(s_1,\dots,s_n)\forall i \neq j.$

$$\begin{aligned}
D(\dots,s_i+\lambda s_j,\dots) &= D(\dots,\underbrace{s_i}_{i},\dots)+\lambda\cdot\underbrace{D(\dots,\overbrace{s_i}^{i},\dots,\overbrace{s_j}^{j},\dots)}_{=0} \\
&= D(s_1,\dots,s_n). \quad \square
\end{aligned}$$

Weitere geht's mit den Eigenschaften in (3.7).

(3.4) Satz (Leibnitz Formel)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine Determinante, geschrieben $det : R^{n\times n} \to R, A \mapsto det(A)$ oder $|A|$. Es gilt die *Leibnitz-Formel*:

$$det(A) = \sum_{\Pi\in s_n} sgn(\Pi)\cdot a_{\Pi(1),1},\dots,a_{\Pi(i),i}$$

$A = (a_{ij})$ (kurz: $\sum_\Pi sgn(\Pi)\prod_i a_{\Pi(i),i}$)

Herleitung der Leibnitz-Formel: Sei D Determinante.

Sei $A = (s_1,\dots,s_n) = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$, d.h. $s_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ij}\cdot e_i$

$$\begin{aligned}
D(A) &= D(s_1,\dots,s_n) \\
&= D(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 j}e_{i_1},s_2,\dots,s_n) \\
&= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1 j}D(e_{i_1},\underbrace{s_2}_{\sum_{i_2=1}^n a_{i_2 j}e_{i_2}},\dots,s_n) \\
&= \sum_{i_1=1}^n\sum_{i_2=1}^n\dots\sum_{i_n=1}^n a_{i_1}1\cdot a_{i_2}2\dots a_{i_n}n\cdot D(e_{i_1},\dots,e_{i_n})
\end{aligned}$$

$D(e_{i_1},\dots,e_{i_n}) \neq 0$ nur falls $\{i_1,\dots,i_n\} = \{1,\dots,n\}$, d.h. falls $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$.
Also:

$$\begin{aligned} D(A) &= \sum_{\Pi\in S_n} a_{\Pi(1),1}, a_{\Pi(2),2},\dots,a_{\Pi(n),n} \\ &= \sum_{\Pi\in S_n} sgn(\Pi)\cdot a_{\Pi(1),1},\dots,a_{\Pi(n),n}. \end{aligned}$$

$$\underbrace{D(e_{\Pi(1)},\dots,e_{\Pi(n)})}_{=sgn\Pi\cdot D(E_n)\ =sgn\Pi}$$

(3.5) Beispiel

a) $n=2, S_2 = \{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{sgn=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{sgn=-1}\}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1\cdot a_{11}\cdot a_{22} + (-1)\cdot a_{21}\cdot a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

b) $n=3, S_3 = \{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{sgn=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{sgn=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{sgn=-1},$
$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{sgn=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{sgn=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{sgn=-1}\}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix}$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1\cdot 1\cdot 5 + 2\cdot 2\cdot(-1) + 3\cdot 0\cdot 0 - (-3)\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 5 - 1\cdot 2\cdot 0 \\ = 5 + (-4) + 0 - (-3) - 0 - 0 \quad = 4. \end{matrix}$$

c) n beliebig, A obere Dreiecksmatrix $\in K^{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow a_{\Pi(1),1},\dots,a_{\Pi(n),n} \neq 0 \,\text{für}\, \Pi = id_n$$

$\Rightarrow det(A) = \sum_{\Pi\in S_n} sgn(\Pi) a_{\Pi(1),1},\dots,a_{\Pi(n),n} = a_{11},\dots,a_{nn}$ „Produkt der Diagonalen“
Funktioniert ebenso mit einer unteren Dreiecksmatrix!

d) n beliebig. Gauß mit Spaltenumformungen (a), d), e)):

$$\text{z.B.} \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 1 \\ -9 & -2 & 5 \end{vmatrix}}_{\mu_1(\frac{1}{3})} =^{d)} 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix}}_{\tau_{2,3}} =^{a)} -3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -2 \end{vmatrix}}_{\alpha_{2,1}(2)}$$

$$=^{e)} -3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix}}_{\text{hat „ZSF“}} \Rightarrow^{Bsp.c)} -3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot (-2) = 30.$$

(3.6) Folgerung ($det = 0$ / $det \neq 0$)

Sei R = K Körper. Dann gilt:

- $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow Rg(A) = n.$
- $det(A) = 0 \Leftrightarrow Rg(A) < n \Leftrightarrow Ax = 0$ hat nicht-triviale Lösung.

(3.7) Eigenschaften (Fortsetzung von Bem. (3.3))

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, führe basierend auf (a)-(f) aus Bemerkung (3.3) fort:

g) $det(A) = det(A)^t \Rightarrow$ auch Zeilenumformungen sind erlaubt.

h) $det \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array} \right) = det\, B \cdot det\, C$ *„Kästchensatz“*

i) $det(A \cdot B) = det\, A \cdot det\, B$

j) $det(T^{-1}) = det(T)^{-1}$ falls T invertierbar. $det(T^{-1}AT) = det\, A.$

k) $A_{ij} := (-1)^{i+j}$ heißt *Adjunkte zu a_{ij}*

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ \hline a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{array} \right| \text{ i-te Zeile und j-te Spalte „streichen“}$$

Laplace-Entwicklung nach der i-ten Zeile: $det\, A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$
Laplace-Entwicklung nach der j-ten Spalte: $det\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$

l) $\tilde{A} := (A_{ij}) \in R^{n \times n}$

$$A\tilde{A}^t = \tilde{A}^t A = \begin{pmatrix} det\, A & 0 \\ & \vdots \\ 0 & det\, A \end{pmatrix} = det(A \cdot E_n).$$

$\tilde{A}^t$ heißt die zu A *komplementäre Matrix.*

m) A invertierbar ⇔ $\overbrace{det\,A}^{\in\mathbb{R}}$ invertierbar ⇔ $det\,A \in \mathbb{R}^*$.

Adjunktenformel: $det\,A$ invertierbar

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{det\,A} \cdot (A_{ij})^{tr}$$

$R = K$ Körper: A invertierbar ⇔ $det\,A \neq 0$ (Folgerung 3.6).

(3.8) Beispiel (Adjunkte und Adjunktenformel)

zu (3.7) k - Adjunkte: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= (-2) \cdot \left(- \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0 + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) - \left(1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 + 1 - 6(-4-6) + 3(4-2) \quad = 4 + 60 + 6 \quad = 70$$

zu (3.7) m - Adjunktenformel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = 6 \neq 0 \Rightarrow A$ ist invertierbar.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} +3 & -(-3) + (-3) & \\ -3 & +1 & -(-1) \\ +(-3) & -1 & +5 \end{pmatrix} \Rightarrow A$$

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$

$\widetilde{A}^t = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ Probe: $A \cdot A^{-1} = E_3 \ldots \quad A \in K^{n \times n}, T \in GL_n(K)$

zu (3.7) j - $\det(A) = \det(T^{-1}AT)$**:** *Determinanten von Endomorphismen.*

$$\varphi \in End_k(V) = Hom_k(V,V), \quad V \text{ endl. dim } K-VR,\, V \neq \{0\} \quad (1 \leq \dim_k V < \infty)$$

(3.9) Definition + Bemerkung

Wähle eine Basis B von V und setze $det\,\varphi := det\,M^B(\varphi)$. (wohldefiniert wegen (j): B' andere Basis von $V \Rightarrow M^{B'}(\varphi) = T^{-1}M^B(\varphi)T$ mit $T = {}^BT^{B'} \Rightarrow det\,M^{B'}(\varphi) = det\,M^B(\varphi)$)

Bemerkung: $det\,\varphi = 0 \Leftrightarrow Rg\varphi < n \Leftrightarrow$ Def. $\varphi > 0 \Leftrightarrow \varphi$ nicht injektiv $\Leftrightarrow Kern\,\varphi \overset{\supset}{\neq} \{0\}$.

§10 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei K Körper, V endlich dimensionaler K-VR, $\varphi \in End_K(V) = \{\varphi : V \to V \text{ linear}\}$.

(3.10) Definition (Eigenwert, -raum, -vektor)

Sei $\varphi \in End_K(V), A \in K^{n\times n}, c \in K$, c Eigenwert und v Eigenvektor.

$$V(c,\varphi) := \{v \in V | \varphi(v) = cv\} \supseteq \{0\}$$
$$V(c,A) := \underbrace{\{v \in K^n | Av = cv\}}_{=V(c,\varphi_A)} \supseteq \{0\}$$

c heißt *Eigenwert* (EW) von $\left\{ \begin{array}{c} \varphi \\ A \end{array} \right.$ wenn $\left\{ \begin{array}{c} V(c,\varphi) \neq \{0\} \\ V(c,A) \neq \{0\} \end{array} \right.$

Wenn c Eigenwert ist, so heißen $V(c,\varphi)$ bzw. $V(c,A)$ *Eigenräume von* φ bzw. *von* A zum Eigenwert c und ihre Elemente außer $\mathcal{O}$ heißen *Eigenvektoren* (EV) *von* φ bzw. *von* A zum Eigenwert c.

Erinnerung: Für beliebige K-VR V, W ist $Hom_K(V,W)$ (also insbesondere $End_K(V)$) ein K-VR mit +, $\cdot$ (skalare Multiplikation) definiert durch:

- $(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x)$
- $(\lambda \cdot \varphi)(x) := \lambda \cdot \varphi(x)$

$\forall \lambda \in K, \varphi, \psi \in Hom_K(V,W)$.

(3.11) Bemerkung

$\varphi \in End_K(V), A \in K^{n\times n}, c \in K$.

a) $\varphi(v) = cv \Leftrightarrow \varphi(v) - cv = \mathcal{O} \Leftrightarrow \underbrace{(\varphi - c \cdot id_V)}_{\in End_K(V)}(v) = \mathcal{O} \Leftrightarrow v \in Kern\,(\varphi - c \cdot id_V)$

Also ist $V(c,\varphi) = Kern(\varphi - c \cdot id_V)$ Unterraum von V.

b) $Av = cv \Leftrightarrow Av - cv = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(A - cE_n)}_{\in K^{n\times n}} v = 0$

Also ist $V(c,A) = \mathbf{L}_0(A - cE_n)$ Unterraum von K^n.

c) c EW von $\varphi \overset{a)}{\Leftrightarrow} Def(\varphi - c \cdot id_V) > 0 \overset{Bem(3.9)}{\Leftrightarrow} det(\varphi - c \cdot id_V) = 0.$

d) c EW von $A \overset{b)}{\Leftrightarrow} Rg(A - c \cdot E_n) < n \overset{Folg(3.6)}{\Leftrightarrow} |A - c \cdot E_n| = 0.$

e) 1 EW von $\varphi \Leftrightarrow$ es gibt $\mathcal{O} \neq V = V$ mit !!LÜCKE!!

f) 0 EW von $\varphi \Leftrightarrow Def\,\varphi > 0 \Leftrightarrow \varphi$ ist nicht injektiv.

(3.12) Beispiel (Spiegelung)

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\varphi_A(e_1) = e_2, \quad \varphi_A(e_2) = e_1$

φ_A ist Spiegelung an $< e_1 + e_2 >$.

GRAFIK

φ_A hat die Eigenwerte 1, -1, wobei 1 auf der Spiegelachse festgelassen wird.

$\varphi \in End_K(V)$
$\varphi(v) = \underbrace{c}_{\text{Eigenwert}} \cdot \underbrace{v}_{\text{Eigenvektor } (v \neq 0)}$

$\varphi_A(e_1 + e_2) = e_2 + e_1 \Rightarrow e_1 + e_2 \in V(1,A)$
$\varphi_A(e_1 + e_2) = e_2 - e_1 = -(e_1 + e_2) \Rightarrow e_1 - e_2 \in V(-1,A)$
$\mathscr{B}' := (e_1 - e_2, e_1 + e_2)$ ist l.u. $\Rightarrow \mathscr{B}'$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$, die aus Eigenvektoren besteht!

$$M^{\mathscr{B}'}(\mathcal{C}_A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

${}^{\mathscr{B}'}M^{\mathscr{B}'}_{(\varphi_A)} \qquad \chi_{\mathscr{B}'}\varphi_A(e_1 - e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -(e_1 - e_2)$
$V(1,A) = < e_1 + e_2 > \qquad V(-1,A) = < e_1 - e_2 >$

b) Sei $dim_K V = K \geq 2$, $\varphi \in End_K(V), 1 \neq -1$ in K
φ heißt *Spiegelung*, falls gilt:
$1, -1$ sind Eigenwerte von φ und $dim_K V(1,\varphi) = n - 1$ (d.h. $V(1,\varphi)$ ist Hyperebene).
Sei φ Spiegelung, $\mathcal{O} \neq v_1 \in V(-1,\varphi)$, d.h $\varphi(v_1) = -v_1, (v_2, \ldots, v_n)$ Basis von $V(1,\varphi)$.
$v_1 \notin < v_2, \ldots, v_n > \Rightarrow \mathscr{B} := (v_1, \ldots, v_n)$ ist Basis von V.

$$M^{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Wir sagen: φ ist Spiegelung an $V(1,\varphi)$. Außerhalb der Hauptdiagonalen der Diagonalmatrix befinden sich nur Nullen.

(3.13) Definition (Diagonalmatrix)

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ heißt *Diagonalmatrix*, falls $a_{ij} = 0 \, \forall \, i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}$$

(3.14) Definition (diagonalisierbar)

$\varphi \in End_K(V), A \in K^{n \times n}$.

a) φ heißt *diagonalisierbar*, falls Basis B von V existiert, so dass $M^{\mathscr{B}}(\varphi)$ Diagonalmatrix ist.

b) A heißt *diagonalisierbar*, falls $T \in GL_n(K)$ (invertierbare Matrix) existiert, so dass $T^{-1}AT$ Diagonalmatrix ist.

(3.15) Bemerkung

a) φ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ V besitzt Basis aus Eigenvektoren von φ.

b) Für jede Basis $\mathscr{B}$ von V gilt: φ diagonalisierbar $\Leftrightarrow M^{\mathscr{B}}(\varphi)$ diagonalisierbar

b') φ_A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A diagonalisierbar.

Beweis:

a) Sei $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von v.

$$M^{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \varphi(V_j) = c_j \cdot v_j \forall j = 1, \dots, n \text{ (d.h. } v_j \text{ EV von } \varphi)$$

b) (Satz (2.64)) oder (Folgerung (2.68b)):

$$\underbrace{M^{\mathscr{B}'}(\varphi)}_{\text{Diagonalmatrix}} \quad = T^{-1} M^{\mathscr{B}}(\varphi) \cdot T, \text{ mit } T = {}^{\mathscr{B}}T^{\mathscr{B}'}.$$

„$\Rightarrow$“ Wähle $T := {}^{\mathscr{B}}T^{\mathscr{B}'}$.

„$\Leftarrow$“ Wähle $\mathscr{B}'$ mit ${}^{\mathscr{B}}T^{\mathscr{B}'} = T$.

(3.16) Definition (ähnlich)

$A, B \in K^{n \times n}$ heißen *ähnlich*, wenn $T \in GL_n(K)$ existiert mit

$$B = T^{-1}AT \Rightarrow TBT^{-1} = \underbrace{TT^{-1}}_{E_n} A \underbrace{TT^{-1}}_{E_n} = A \;\Rightarrow\; (T^{-1})^{-1}B(T^{-1}) = A$$

$A \in K^{n \times n}$ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A ähnlich zu Diagonalmatrix.

(3.17) Satz (paarweise verschiedene EW)

Sei $\varphi \in End_K(V), n = dim_K(V)$.

a) Seien $c_1, \dots, c_m \in K$ *paarweise verschiedene EW* von φ (d.h. $c_i \neq c_j$ für $i \neq j$). Ist v_j EV von φ zum EW c_j, dann ist $(v_1, \dots, v_n)$ l.u.

b) Besitzt φ_n paarweise verschiedene EW, dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis: b) folgt aus a) mit Bemerkung (3.15).

a) Induktion nach m:

Induktionsanfang (I.A.) $m = 1$: klar. $(v \neq \mathcal{O})$.

Induktionsschritt (I.S.) $m > 1$,

Induktionsvorraussetzung (I.V.): $(v_1, \dots, v_{m-1})$ l.u.

$$\text{Sei} \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j = 0, \quad \lambda_j \in K$$

zu zeigen: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$.

$$
\begin{aligned}
\text{Es gilt:}\quad 0 \quad &= \quad \underbrace{(\varphi - c_m \cdot id_V)}_{\in End(V)}(0) \\
&= \quad \underbrace{(\varphi - c_m \cdot id_V)(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j)}_{(\varphi - c \cdot id_V)(v) = \varphi(v) - c \cdot v} \\
&= \quad \textstyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j (\varphi - c_m \cdot id_V)(v_j) \\
&= \quad \textstyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j (\varphi(v_j) - c_m \cdot v_j) \\
&= \quad \textstyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \underbrace{(c_j - c_m)}_{=0 \text{ falls } j=m} v_j \\
&= \quad \textstyle\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j (c_j - c_m) v_j \\
&\overset{(v_1,\ldots,v_{m-1}) l.u.}{\Rightarrow} \quad \lambda_j \underbrace{(c_j - c_m)}_{\neq 0} = 0 \quad \text{für } j = 1, \ldots, m-1. \\
&\Rightarrow \quad \lambda_j = 0 \quad \text{für } j = 1, \ldots, m-1. \\
&\Rightarrow \quad \lambda_m \underbrace{v_m}_{\neq \mathcal{O}} = 0 \\
&\Rightarrow \quad \lambda_m = 0 \quad \square
\end{aligned}
$$

(3.18) Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist nicht diagonalisierbar.

Beweis: Angenommen, es gibt $\underbrace{T \in GL_2(K)}_{\text{invertierbare } 2\times 2\text{-Matrix}}$ mit $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = T^{-1}A\underbrace{T \cdot T^{-1}}_{=E_2}AT = T^{-1}A^2T = T^{-1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=A^2} T$$

$$= T^{-1}(-E_2)T = -T^{-1}T = -E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a^2 = b^2 = -1$ (Widerspruch) $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist Drehmatrix um 90° im UZS.

$$A = \begin{pmatrix} cos\ \alpha & sin\ \alpha \\ -sin\ \alpha & cos\ \alpha \end{pmatrix} \overset{\alpha = \frac{\pi}{2}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A$ (Drehung) hat keine Eigenwerte.

§11 Der Polynomring

Sei K Körper.

(3.19) Definition

Der formale Ausdruck $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ mit $a_n \in K$ heißt *Polynom über K*, wenn nur endlich viele $a_n \neq 0$ sind. (sonst „Reihe“)

- $a_0, a_1, a_2, \ldots$ heißen *Koeffizienten*
- a_0 heißt *konstanter Koeffizient*
- sind alle $a_n = 0$, dann heißt $f(x)$ das *Nullpolynom*, geschrieben $f(x) = 0$.
- $K[x]$ bezeichnet die Menge aller Polynome über K.

Polynome sind *hier* keine Abbildung. $K = \mathbb{Z}_2$
$f(x) = x^2 - x$, $g(x) = 0 \quad f(x) \neq g(x)$, denn $x^2 - x \neq 0 \, \forall x \in \mathbb{Z}_2$
Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n \in K[x]$ und $\lambda \in K$.

(1) $f(x) = g(x)$ wenn $a_n = b_n \, \forall n \in \mathbb{N}_0$

(2) $\deg f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} -\infty & f(x) = 0 \\ \max\{n \in \mathbb{N} | a_n \neq 0\} & f(x) \neq 0 \end{array} \right\} \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$ heißt *Grad von* $f(x)$.

(3) $f(x) \neq 0$ und $n = \deg f(x)$, dann heißt n *höchster Koeffizient* von f.

(4) $f(x)$ heißt $\left\{ \begin{array}{lll} normiert & & a_n = 1, n = \deg f(x) \\ konstant & \text{falls} & \deg f(x) \leq 0 \\ linear & & \deg f(x) = 1 \end{array} \right\}$

(5) $(f + g)(x) := f(x) + g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$

(6) $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (c_nx^n) mit c_n = \sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}$.

(7) $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n)x^n$

(5)+(6) $\Rightarrow$ Ring
(5)+(7) $\Rightarrow$ Vektorraum

(3.20) Bemerkung

a) $K[x]$ ist bzgl. der Verknüpfung aus Def. (3.19) ein kommutativer Ring und ein K-Vektorraum. (Es ist $dim_K K[x] = \infty$ und $\{1, x, x^2 \ldots\}$ Basis von $K[x]^* = \{a_0 | \underbrace{a_0 \in K}_{a_0 \neq 0}\}$ = $\{f(x) | \deg f(x) = 0\}$

b) Man schreibt oft f anstatt von $f(x)$ und lässt Summanden der Form $0 \cdot x^n$ weg.

c) Für $0 \neq f, g \in k[x]$
$deg(f \cdot g) = deg(f) + deg(g) \quad (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots) \cdot (b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots) = a_nb_mx^{n+m} + (a_nb_{m-1} + a_{n-1}b_m)x^{n+m-1} + \ldots + (a_1b_0 + a_0b_1)x + a_0b_0)$
$deg\,(f + g) \leq max(\deg f, \deg g)$, wenn $deg\,(f) \neq deg\,(g)$, dann gilt ”=”.

Beispiel (Polynomdivision):

$(x^3+2+x^2+x+1):(x^2-2x-1)=x+4$
$-(x^3-2x^2-x)$
$----------$
$4x^2+2x+1$
$-(4x^2-8x-4)$
$----------$
$10x+5 \qquad => x^3+2x^2+x+1=(x+4)\cdot(x^2-2x-1)+(10x+5)$

(3.21) Satz

$f,\, g \in K[x],\, g \neq 0$
Existieren $q,\, r \in K[x]$, $deg(r) < deg(g)$, mit $f = q \cdot g + r$.
Beweis: Algorithmus der Polynomdivision.

(3.22) Definition

Sei $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$.
f(x) hat an der Stelle $a \in K$ den Wert $f(a) := a_n a^n + \ldots + a_1 a + a_0$.
„a wird für x eingesetzt"
Einsetzen: $K \to K$, $a \mapsto f(a)$ ist i.A. nicht linear (außer wenn $deg(f) \leq 1$) $\quad K[x] \to K, f \mapsto$ f(x) linear?
Erinnerung:

- $(K[x],+,\cdot)$ ist Ring mit $+,\cdot$ aus Def.(3.19(5)+(6))
  0 = Nullpolynom
  1 = Konstantes Polynom mit $a_0 = 1$
  „Polynomring"(über K)

- K[x] ist K-VR mit skalarer Multiplikation (3.19(7)).

- auch: K[x] ist K-Algebra $dim_k K[x] = \infty$
  Basis: $\{x^i | i \geq 0\}$

(3.23) Bemerkung (Einsetzungshomomorphismus)

Seien $f,g \in K[x], \lambda, a \in K$

a) $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$

b) $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$

c) $(\lambda \cdot f)(a) = \lambda \cdot f(a)$

d) $1(a) = a1 \qquad 1 = \ldots + 0 \cdot x + 1 \quad 1(a) = \ldots + 0 \cdot a + 1 = 1$ (1 ist Name einer Funktion)

Zusammen: Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung $\tau_a : K[x] \to K, f \mapsto f(a)$ linear und ein *Ringhomomorphismus*.
auch: τ_a ist *K-Algebrahomomorphismus*. τ_a heißt *Einsetzungshomomorphismus*
a heißt *Nullstelle* von $f(x) \in K[x]$, wenn $f(a) = 0$.

(3.24) Satz

Sei $f(x) \in K[x]$.

a) $a \in K$. Nullstelle von $f(x) \Leftrightarrow$ es gibt $g(x) \in K[x]$ mit $f(x) = g(x) \cdot (x-a)$ (d.h. ”$x-a$ teilt $f(x)$”)

b) Seien $a_1, \dots, a_l$ paarweise verschieden. $a_1, \dots, a_l$ sind Nullstellen $f(x) \Leftrightarrow$ es gibt $g(x) \in K[x]$ mit $f(x) = g(x) \cdot (x-a_1) \cdot (x-a_l)$. Insbesondere hat $f(x)$ höchstens $\deg f$ viele verschiedene Nullstellen.

Beweis:

a) Es gibt $q, r \in K[x]$ mit $f(x) = q(x)(x-a) + r(a)$ und $def\, r(x) < 1$
Also ist $r(x)$ konstant, etwa $r(x) = r_0, r_0 \in K$.
Also $f(a) = \underbrace{q(a)\underbrace{a-a}_{=0}}_{=0} + r(a) - r(a)$
Also: $f(a) = 0 \Leftrightarrow r(a) = r_0 = 0 \Leftrightarrow r(x) = 0$.

b) Induktion nach l:
$l = 1$: a)
$l > 1$: Nach Induktionsvorraussetzung gibt es $g'(x) \in K[x]$ mit

$$\begin{aligned} & f(x) = g'(x)(x-a_1)\dots(x-a_{l-1}) \\ \Rightarrow\ & f(a_l) = g'(a_l)\underbrace{\underbrace{(a_l-a_1)}_{\neq 0}\dots\underbrace{(a_l-a_{l-1})}_{\neq 0}}_{\neq 0} \\ \Rightarrow\ & f(a_l) = 0 \\ \Rightarrow\ & g'(a_l) = 0 \end{aligned}$$

”$\Leftarrow$”: klar.

”$\Rightarrow$”: es gibt $f(a_l) = 0$, also $g'(a_l) = 0$.
Nach a) gibt es $g(x) \in K[x]$ mit $g'(x) = g(x)(x-a_l)$.
$\Rightarrow f(x) = g(x)(x-a_1)\dots(x-a_{l-1})(a-a_l)$. $\square$

(3.25) Bemerkung (Zerfall in Linearfaktoren)

a) Man sagt, $f(x)$ *zerfällt über K vollständig in Linearfaktoren* wenn es $0 \neq a \in K$ gibt und paarweise verschieden $a_1, \dots, a_k \in K$ sowie $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, so dass:
$f(x) = a(x-a_1)^{n_1} \cdots (x-a_k)^{n_k}$

n_j heißt *Vielfachheit* der Nullstelle a_j

b) *Fundamentalsatz der Algebra*:
Über $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ vollständig in Linearfaktoren:

$$\begin{aligned} \text{z.B.}\quad x^4 - 1 &= (x^2-1)(x^2+1) \\ &= (x+1)(x-1)(x^2+1) \text{ über } \mathbb{R} \\ &= (x+1)(x-1)(x+i)(x-i) \text{ über } \mathbb{C} \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind also ± 1 und $\pm i$.

§12 Das charakteristische Polynom

K Körper, V K-VR, $dim_K V = n < \infty \quad \varphi \in End_K(V), A \in K^{n\times n}$, $c \in K$.

Motivation:

$$\text{c EW von A} \overset{(3.11d)}{\Leftrightarrow} det(A - c \cdot E_n) = 0 \Leftrightarrow det(c \cdot E_n - A) = 0$$

→ Finde $c \in K$ mit $det(c \cdot E_n - A) = 0$.

Idee: Setze ”x” für c ein und berechne Leibnitz-Formel; das liefert ein Polynom in x über K.

(3.26) Bemerkung

Sei $\mathcal{B}$ Basis von V.

a) c EW von $\varphi \Leftrightarrow$ c EW von $M^{\mathcal{B}}(\varphi)$

b) $\chi_{\mathcal{B}} V(c,\varphi) = V(c, M^{\mathcal{B}}(\varphi))$

Beweis:

$$V(c,\varphi) = \{v \in V | \varphi(v) = c \cdot v\}$$
$$V(c, M^{\mathcal{B}}(\varphi)) = \{v \in K^n | M^{\mathcal{B}}(\varphi) \cdot v = cv\}$$

$$\begin{aligned} \varphi(v) = cv \quad &\overset{\chi_{\mathcal{B}} \text{ Isom.}}{\Leftrightarrow} \quad \chi_{\mathcal{B}}\varphi(v) = \chi_{\mathcal{B}}(cv) \\ &\Leftrightarrow \quad M^{\mathcal{B}}(\varphi)\chi_{\varphi}(v) = c\ \chi_{\mathcal{B}}(v) \end{aligned}$$

Also: $v \in V(c,\varphi) \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{B}}(v) \in V(c, M^{\mathcal{B}}(\varphi))$ D.h. b)

$$\begin{aligned} &\text{zu a) c EW von } \varphi && \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \quad V(c,\varphi) \neq \{\mathcal{O}\} \\ &\text{zu b) } \chi_{\mathcal{B}} \text{ Isom.} && \Leftrightarrow \quad V(c, M^{\mathcal{B}}(\varphi)) \neq \{\mathcal{O}\} \\ & && \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \quad \text{c EW von } M^{\mathcal{B}}(\varphi). \end{aligned}$$

□

(3.27) Definition + Bemerkung

a) Für $A \in K^{n\times n}$ heißt $\lambda_A(x) = det(\underbrace{xE_n - A}_{\in K[x]^{n\times n}}) \in K[x]$ *charakteristisches Polynom* von A.

z.B. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{n\times n} \qquad xE_n - A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \in K[x]^{n\times n}$

$\chi_A(x) = det(xE_n - A) = x^2 + 1 \in K[n]$.

Bemerkung: Für $T \in GL_n(K)$ gilt $\chi_{T^{-1}AT} = \chi_A$.

b) Seit $\mathcal{B}$ Basis von V. Für $\varphi \in \text{End}_K(V)$ heißt $\chi_\varphi := \chi_M^{\mathcal{B}}(\varphi)$ *charakteristisches Polynom* von φ. (ist unabhängig von der Wahl von $\mathcal{B}$).

Beweis:

a) $\chi_{T^1AT}(x) = det(x \underbrace{E_n}_{T^1E_nT} - T^{-1}AT) = det(T^{-1}(xE_n - A)T) \overset{\text{Satz (3.7j)}}{=} det(xE_n - A) = \chi_A$

b) (Folg. 2.68b): $M^{\mathcal{B}'}(\varphi) = T^{-1}M^{\mathcal{B}}(\varphi)T \quad \Rightarrow \chi_{M^{\mathcal{B}'}}(\varphi) = \chi_{M^{\mathcal{B}}}(\varphi)$

(3.28) Beispiel

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_A = x^2 + 1$

b) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ obere Dreiecksmatrix

$$\Rightarrow \chi_A(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & & & -* \\ & x - a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x - a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x - a_{ii})$$

Insbesondere zerfällt $\chi_A(x)$ vollständig in Linearfaktoren.

(3.29) Bemerkung

$A \in L^{n \times n} \Rightarrow \chi_A(x)$ normiert und $deg\, \chi_A(x) = n$

Beweis:

Sei $xE_n - A = (f_{ij}) \in K[x]^{n \times n}$

$\Rightarrow deg\, f_{ij} = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{falls} & i = j \\ 0 & \text{falls} & i \neq j \end{array} \right\} \leq 1 \quad (deg\, f \neq deg\, g \Rightarrow deg\, f + g = max\{deg\, f, deg\, g\})$

$\chi_A(x) = \sum_{\Pi \in S_n} sgn\Pi \underbrace{f_{\Pi(1),1}, \ldots, f_{\Pi(n),n}}_{deg \leq n}$ (Bem. 3.20c)

$deg\, f_{\Pi(1),1}, \ldots, f_{\Pi(n),n} \left\{ \begin{array}{lll} < n & \text{falls} & \Pi \neq \text{id} \\ = n & \text{falls} & \Pi = \text{id} \end{array} \right\}$

$\Rightarrow deg\, \chi_A(x) = n.$

Der höchste Koeffizient von $\chi_A(x)$ ist der von $f_n \ldots f_{nn}$, also $sym(id) = 1$. Also ist $\chi_A(x)$ normiert.

□

(3.30) Satz (EW "≅" Nullstelle)

a) c EW von $A \Leftrightarrow c$ Nullstelle von χ_A

b) c EW von $\varphi \Leftrightarrow c$ Nullstelle von χ_φ

Ist c m-fache Nullstelle von χ_A bzw. χ_φ, so nennen wir *c m-fachen Eigenwert*.

Beweis:

a) $$\begin{aligned} c\,EW \text{ von } A &\overset{(3.11a)}{\Leftrightarrow} det(cE_n - A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \chi_A(c) = 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} c\,EW \text{ von } \varphi &\Leftrightarrow c\,EW \text{ von } M^B(\varphi) \\ &\Leftrightarrow c \text{ Nullstelle von } \chi_M^B(\varphi) \overset{Def.}{=} \chi_\varphi \quad \Box \end{aligned}$$

c EW von A ⇔ $\varphi_A(c) = 0$. φ diagonalisierbar ⇔ V besitzt Basis aus EV von φ $\quad (\varphi \in End_K(V))$

(3.31) Beispiele

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hat keine EW in $\mathbb{R}$, denn $\chi_A(x) = x^2 + 1$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow A$ keine Eigenwerte über $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ nicht diag.bar.

Aber: A hat über $\mathbb{C}$ die Eigenwerte $\pm i\,(\pm\sqrt{-1})$.

$\Rightarrow$ A ähnlich zu $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

b) Ähnliche Matrizen haben die gleichen EW, denn $\chi_A(x) = T^{-1}AT(x)$ (aber nicht die gleichen Eigenvektoren/-räume).

c) Ist A ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

dann hat A die Eigenwerte $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, denn

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & & & -* \\ & x - a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x - a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n}(x - a_{ii})$$

(3.32) Beispiel (Bestimmung von EW, EV, ER und Diagonalmatrix)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$$

Bestimmen der Eigenwerte (durch Nullstellen des charakteristischen Polynoms):

$$\chi_A(x) = det(x \cdot E_n - A) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (x-2)^3 - 1 + 1 - (x-2) - (x-2) + (x-2) \\ &= (x-2)^3 - (x-2) \\ &= (x-2)((x-2)^2 - 1) \quad \text{(Nicht ausmultiplizieren!)} \\ &= (x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

Also sind $1,2,3$ die EW von A. (Diese EW sind jeweils 1-fach.)

$\Rightarrow$ A diag.bar und A ähnlich zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Bestimmen der Eigenvektoren (durch Einsetzen der Eigenwerte):
$V(c,A) = ? \quad = \mathbb{L}_0(A - c \cdot E_n) \Leftrightarrow \mathbb{L}_0 \cdot (c \cdot E_n - A)$

$$\text{c = 1: } A - 1 \cdot E_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ & & -\mathbf{1} \end{array} \right\|\Bigg) \text{ (Es wird } -E_n \text{ ergänzt)}$$

$$\Rightarrow V(1,A) =< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} >$$

$$\text{c = 2: } A - 2 \cdot E_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ & & -1 \end{array} \right\|\Bigg)$$

$$\Rightarrow V(2,A) =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} >$$

$$\text{c = 3: } A - 3 \cdot E_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Spaltenvertauschung: } x_2 \leftrightarrow x_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ & & -1 \end{array} \right\|\Bigg)$$

$$\overset{\text{Spaltenvertauschung berücksichtigen: } x_2 \leftrightarrow x_3}{\Rightarrow} \underbrace{V(3,A)}_{\text{Eigenraum}} = \underbrace{< \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} >}_{\text{Eigenvektor}} =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$$

$\mathcal{B} :=< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ ist l.u (Satz 3.17a), also Basis von $\mathbb{Q}^3$ aus Eigenvektoren!

$\Rightarrow A$ ähnlich zur Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{(Beachte die Reihenfolge der EW in der Matrix!)}$$

Begründung: $T = {}^{\mathcal{E}}T^{\mathcal{B}} \Rightarrow \overbrace{\underbrace{M^{\mathcal{B}}(\varphi_A}_{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}}\quad) = \underbrace{{}^{\mathcal{B}}T^{\mathcal{E}}}_{=T^{-1}}\underbrace{M^{\mathcal{E}}(\varphi_A)}_{=A}\underbrace{{}^{\mathcal{E}}T^{\mathcal{B}}}_{=T}}^{\text{Basiswechselsatz}}$

z.B. die zweite Spalte: $\chi_{\mathcal{B}}(2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$

(3.33) Folgerung

$A \in K^{n\times n}$, $\varphi \in \mathrm{End}_K(v)$, $n = dim_K V$

a) A bzw. φ haben höchstens n verschiedene EW.

b) Zerfällt $\chi_A(x)$ bzw. $\chi_\varphi(x)$ vollständig in paarweise verschiedene Liniearfaktoren, so ist φ diag.bar.

Beweis:

a) $deg\ \chi_A(x) = deg\ \chi_\varphi(x) = n \Rightarrow \chi_A(x), \chi_\varphi(x)$ haben höchstens n verschiedene Nullstellen
$\Rightarrow A, \varphi$ haben höchstens n verschiedene EW

b) $\chi_\varphi(x)$ hat n verschiedene Nullstellen $\Rightarrow \varphi$ hat n verschiedene EW $\overset{(3.17)}{\Rightarrow}$ φ diag.bar.

$\underbrace{\chi_A(x)}_{=\chi_{\varphi_A}(x)}$ hat n verschiedene Nullstellen $(M^{\mathcal{B}}_{\varphi} = M^{\mathcal{B}}(\varphi)) \Rightarrow \varphi_A$ diag.bar $\Leftrightarrow$ A diag.bar

(3.34) Beispiel

$A = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ ist nicht diag.bar (über jedem Körper K)

Angenommen: $T^{-1}AT = \begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$, $a,b \in K,\ T \in GL_2(K)$

$\Rightarrow a,b$ sind EW von $T^{-1}AT$

$\Rightarrow a,b$ sind EW von A

$\Rightarrow a,b$ Nullstellen von $\chi_A(x) = (x-1)(x-1)$

$\Rightarrow a = b = 1 \quad \Rightarrow T^{-1}AT = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = E_2 \Rightarrow A = \underbrace{TE_2}_{T}T^{-1} = TT^{-1} = E_2 \Rightarrow$ Widerspruch!

(3.35) Definition (φ-invariant)

$\varphi \in \mathrm{End}_K(v)$.

$U \subseteq V$ heißt φ-*invariant*, falls $\varphi(U) \underset{„\leq“}{\subseteq} U$

In diesem Fall ist

$\varphi_U : U \to U, u \mapsto \varphi(u) \in \mathrm{End}_K(u)$ und heißt *Einschränkung von* φ auf U.

(3.36) Beispiel

a) V und $\{0\}$ sind φ-invariant.

b) Alle Eigenräume von φ sind φ-invariant

$$\begin{aligned} v \in V(c,\varphi) \quad &\Rightarrow \quad \varphi(v) = cv \\ &\Rightarrow \quad \varphi(\varphi(v)) = \varphi(cv) = c \cdot \varphi(v) \\ &\Rightarrow \quad \varphi(v) \in V(c,\varphi) \end{aligned}$$

D.h. $V(c,\varphi)$ ist φ-invariant.

(3.37) Bemerkung

Sie $U \subseteq V$ φ-invariant.

a) Sei $A = (v_1, \dots, v_m)$ Basis von U.
Ergänze A zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ von V.
Dann gilt $M_\varphi^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} M_{\varphi_U}^{\mathcal{A}} & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$ für geeignete Matrizen C, D.

b) Es gibt $f(x) \in K[x] mit \chi_\varphi(x) = f(x) \cdot \chi_{\varphi_U}(x)$.
"$\chi_{\varphi_U}(x)$ teilt $\chi_\varphi(x)$".

Beweis:

a) Definition von $\chi_\varphi^{\mathcal{B}}$ und $\chi_{\varphi_U}^{\mathcal{A}}$.

b) $\chi_\varphi(x) = \chi_{M_\varphi^{\mathcal{B}}}(x) = \left|xE_n - M_\varphi^{\mathcal{B}}\right| \overset{a)}{=} \left|\begin{array}{c|c} xE_m - M_{\varphi_U}^{\mathcal{A}} & -c \\ \hline -0 & xE_{n-m} - D \end{array}\right|$

$\overset{\text{Satz (3.7h)}}{=} \underbrace{\left|xE_m - M_{\varphi_U}^{\mathcal{A}}\right|}_{=\chi_{\varphi_U}(x)} \cdot \underbrace{\left|xE_{n-m} - D\right|}_{=f(x)} \quad \square$

(3.38) Satz

$A \in K^{n \times n}$. A ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix $\Leftrightarrow$ $\chi_A(x)$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren. Über $\mathbb{C}$ ist das immer der Fall (Fundamental-Satz).

Beweis:

"$\Rightarrow$" Beispiel (3.31c).

"$\Leftarrow$" Induktion nach n. Sei $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - c_i)$.

n = 1: klar.

n $>$ 1: Sei $v_1 \in K^n$ EV von A zum EW c und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von K^n.

$< v_1 >$ ist φ-invariant (wie oben)

$$\overset{Bem(3.37)}{\Rightarrow} M_\varphi^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} c_1 & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \quad \text{A und } M_{\varphi_A'}^{\mathcal{B}} \text{ sind ähnlich} = M_{\varphi_A}^{\mathcal{B}}$$

$$\Rightarrow \chi_A(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n) \overset{(3.37)}{=} \chi_{M^{\mathcal{B}}}(\varphi_A) = (x - c_1) \cdot \chi_D(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x - c_1)}_{deg=1} \underbrace{((x - c_2) \cdots (x - c_n) - \chi_D(x))}_{\Rightarrow deg=-\infty \quad \Rightarrow =0} = \underbrace{0}_{deg=-\infty}$$

$$\Rightarrow \chi_D(x) = (x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

$\overset{Ind.Vorr.}{\Rightarrow}$ es gilt $S \in GL_{n-1}(K)$ mit $S^{-1}DS$ ist obere Dreiecksmatrix. Setze

$$T := \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right) \Rightarrow T \in GL_n(K), \qquad \text{dann } T^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & S^{-1} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow T^{-1} M_\varphi^{\mathcal{B}} T = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & S^{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} c_1 & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} c_1 & * \\ \hline 0 & S^{-1}DS \end{array}\right),$$

wobei $S^{-1}DS$ obere Dreiecksmatrix.

$\Rightarrow$ A ähnlich zu obere Dreiecksmatrix. $\square$

(3.39) Satz

Es zerfällt χ_φ vollständig in Linearfaktoren. Dann ist:

$$\varphi \text{ diag'bar} \Leftrightarrow \text{für jeden Eigenwert von c von } \varphi \text{ gilt: } dim V(c, \varphi) = \text{ Vielfachheit von c.}$$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $A := M_\varphi^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}$ für ein geeignetes also $\chi_\varphi(x) = (x - c_1) \cdots (x - c_n)$.

Sei c m-facher EW von φ, etwa $c = c_1 = c_2 = \ldots = c_n$, $c \neq c_i$ für $i > m$ $\quad dim V(c, \varphi) = dim\, \mathbf{L}_0(A - c \cdot E_n) = n - Rg(A - cE_n) = n - (n - m) = m$.

$$A - cE_n = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & c_{m+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & c_{n-c} \end{pmatrix}, \quad m0\text{'en}, n - mc\text{'s}$$

”$\Leftarrow$” $\chi_\varphi(x) = \prod_{i=1}^{l}(x-c_i)^{n_i}$, c_i paarweise verschieden
Sei $(v_1^i,\dots,v_{n_i}^i)$ Basis von $V(c_i,\varphi)$, $i=1,\dots,l$.
Man zeigt: $(v_1^1,\dots,v_{n_1}^1,v_1^2,\dots,v_{n_1}^2,\dots,v_1^l,\dots,v_{n_1}^l)$ l.u.
dann folgt wegen $n_1+\ldots+n_l = deg\,\chi_\varphi(x) = n$ folgt also die Behauptung mit Bem.(3.15)

Zusammenfassung

$\varphi \in End_k(V)$, $n = dim_k V < \infty$

1. Immer:
   - φ hat höchstens n verschiedene EW (3.33a)
   - c m-facher EW $\Rightarrow dim\,V(c,\varphi) \leq m$
2. φ ähnlich zu oberer Dreieicksmatrix $\Leftrightarrow \chi_\varphi(x)$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren
3. φ diagonalisierbar $\overset{(3.15)}{\Leftrightarrow}$ V besitzt Basis aus Eigenvektoren $\overset{(3.39)}{\Leftrightarrow}$ $\chi_\varphi(x)$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren und $dim\,V(c,\varphi) =$ Vielfachheit von c ($max\,dim(c)$) $\Leftrightarrow \sum dim\,V(c,\varphi) = n$, c EW von φ)
4. Spezialfall: $\chi_\varphi(x)$ zerfällt in paarweise verschiedene Linearfaktoren (dann ist φ diagonalisierbar) bzw. φ hat n verschiedene Eigenwerte.

4) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1)

(3.40) Beispiel

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -2 & -2 & x+1 \end{vmatrix} = x^3+x^2-2x-2 = (x^2-2)(x+1)$

Über $\mathbb{Q}$ zerfällt $\chi_A(x)$ nicht vollständig. ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) $\Rightarrow A$ nicht ähnlich zu oberer Dreiecksmatrix (und nicht diagonalisierbar). Über $\mathbb{R}$ hat φ 3 verschiedene EW. ($\pm\sqrt{2}$ und -1) $\Rightarrow$ A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ (3.34), K beliebig

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 \Rightarrow$ 1 ist 2-facher EW.

$V(1,A) = \mathbb{L}_0(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \Rightarrow dim\,V(1,A) = 1 < 2$ (Vielfachheitswert)

$\Rightarrow A$ nicht diagonalisierbar (jedes K) $\quad (TAT^{-1} = D)$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ K beliebig

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1) \Rightarrow \pm 1$ sind EW.

$\Rightarrow A$ diagonalisierbar, wenn $1 \neq -1$ (z.b. für $K = \mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$ mit $p \neq 2$)

K = $\mathbb{Z}_2$: 1 ist einziger EW und 2-fach.
$V(1,A) = \mathbb{L}_0(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}) = \mathbb{L}_0(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \Rightarrow dim\,V(1,A) = 1 < 2$
$\Rightarrow$ A nicht diagonalisierbar über $\mathbb{Z}_2$.

(3.41) Definition + Bemerkung (Begleitmatrix)

Sei $f(x) = x^2 + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$ normiert. Dann heißt

$$C(f) := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

die *Begleitmatrix von f.*

Bemerkung: $\chi_{C(f)} = f$

"Jedes normierte Polynom ist charakteristisches Polynom einer geeigneten Matrix."

Beweis: Induktion nach n.

$n = 1$: $\chi_{C(x+a_0)} = \chi_{(-a_0)} = |x + a_0| = x + a_0$.

$$n > 1\text{: } \chi_{C(f)} = \begin{vmatrix} x & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & & & \vdots & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix} = |xE_n - C(f)|$$

LaPlace-Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\chi_{C(f)} = \underbrace{\begin{vmatrix} x & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ -1 & \ddots & & & \vdots & a_2 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}}_{\chi_{C(x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1)}} + 0 + \ldots + (-1)^{n+1} a_0 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{vmatrix}}_{(-1)^{n-1}}$$

$$\overset{\text{Ind.Vorr.}}{=} x \cdot (x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1) + a_0 = f(x). \quad \square$$

Einschub:

$(K^{n\times n}, +, \cdot)$ ist Ring und K-VR. $End_K(V) = Hom_K(V,V) \hat{=}$ lineare Abbildung von V in sich selbst. Mit den folgenden Verknüpfungen $\varphi + \psi : V \to V,\ v \mapsto \varphi(v) + \psi(v)$

$\varphi \circ \psi : V \to V, v \mapsto \varphi(\psi(v))$

$\lambda \cdot \psi : V \to V, v \mapsto \lambda \cdot \varphi(v)$
ist $(End_K(V), +, \circ)$ Ring und K-VR.

z.B. Distributivgesetz:

TODO

(3.42) Definition (Nullstelle)

Sei $A \in K^{n \times n}$. Sei $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in K[x]$
$f(A) = a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 \underbrace{E_n}_{A^0} \in K^{n \times n}$

$$f(\varphi) = a_n \underbrace{\varphi^n}_{\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{\text{n-mal}}} + \ldots + a_1 \varphi + a_0 \underbrace{id_V}_{=\varphi^0} \in End_K(V)$$

A bzw. φ heißt *Nullstelle von f*, wenn f(A) = 0 bzw. f(φ) = 0.

(3.43) Beispiel

TODO

Bemerkung: Die Abbildungen $\tau_A : K[x] \to K^{n \times n}, f \mapsto f(A)$ und $\tau_A : K[x] \to K^{n \times n}, f \mapsto f(A)$ sind Ringhomomorpismus und VR-Homomorphismus und heißen *Einsetzungshomomorphismen*.
z.B. $\tau_\varphi(f \cdot g) = (f \cdot g)(\varphi) = f(\varphi) \circ g(\varphi) = \tau_\varphi(f) \circ \tau_\varphi(g)$
Ziel: $\chi_A(A) = 0 \qquad \chi_\varphi(\varphi) = 0$

(3.44) Vorbetrachtung

$\varphi \in End_K(V)$, $n = dim_K V < \infty$. Sei $0 \neq v \in V$, $(v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^n(v))$ l.a. $(n+1 > dim_K V)$
Sei $m \in \mathbb{N}$ minimal mit $(v, \varphi(v), \ldots, \varphi^m(v))$ l.a.
Es folgt $(v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{m-1}(v))$ l.u. und $\varphi^m(v) \in \langle v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{m-1}(v) \rangle =: U$
Insbesondere ist U φ-invariant, $dim_K U = m$ und $\mathcal{A} := (v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{m-1}(v))$ ist
Basis von U.

$$M^{\mathcal{A}}_{\varphi_U} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_0 \\ 1 & 0 & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_{m-1} \end{pmatrix} \in K^{m \times m} \text{ mit } \varphi^m(v) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i \varphi^i(v),\ \lambda_i \in K$$

$$\Rightarrow \chi_{\varphi_U}(x) \overset{(3.40)}{=} \chi_{M_{\varphi_U}}A(x) \overset{\text{Begleitmatrix}}{=} x^m - \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i x^i$$

$$\Rightarrow \chi_{\varphi_U}(v) = \varphi^m - \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i \varphi^i \qquad \in End_K(V)$$

$$\Rightarrow \chi_{\varphi_U}(v) = \varphi^m(v) - \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i \varphi^i(v) = 0.$$

(3.45) Satz von Cayley-Hamilton

Sei $\varphi \in End_K(V), A \in K^{n\times n}, dim V = n < \infty$.
Es gilt $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ und $\chi_A(A) = 0$.
"φ bzw. A ist Nullstelle seines charakteristischen Polynoms."

Beweis:
Aussage für A folgt aus der für φ (wende $M^{\mathcal{B}}$ an auf $\chi_\varphi(\varphi) = 0$).
zu zeigen: $\chi_\varphi(\varphi)(v) = 0 \forall v \in V$.
$v = \mathcal{O}$: ok.
Für $v \neq \mathcal{O}$ sei $U := < v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots, \varphi^{m-1}(v) >$ wie in (3.44)

Erinnerung: U ist φ-invariant ($\chi_{\varphi_U}(\varphi)(v) = 0$

Nach Bemerkung (3.37) gibt es ein

$$f(x) \in K[x] mit \chi_\varphi(x) = f(x) \cdot \chi_{\varphi_U}(x) \Rightarrow \chi_\varphi(\varphi) = \underbrace{f(\varphi)}_{\in End_K(V)} \cdot \underbrace{\chi_{\varphi_U}(\varphi)}_{\in End_K(V)} \in End_K(V)$$

$$\Rightarrow \chi_\varphi(\varphi)(v) = f(\varphi)\underbrace{(\chi_{\varphi_U}(\varphi)(v))}_{=0 \text{ nach (3.44)}} = \mathcal{O}.$$

$$\overset{\text{dies gilt für alle v}}{\Rightarrow} \chi_\varphi(\varphi) = 0. \quad \square$$

(3.46) Beispiel (Matrix-Inverses mit Cayley-Hamilton

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$

$$\chi_A(x) = \begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{pmatrix} = (x-1)(x-4) - 6 = x^2 - 5 - 2$$

nach Cayley-Hamilton (3.45): $\chi_A(A) = A^2 - 5A - 2E_2 = 0$
$\Rightarrow A^2 - 5A = 2E_2$
$\Rightarrow A \cdot \frac{1}{2}(A - 5E_2) = E_2$
$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5E_2)$.

Warum diagonalisieren wir?
→ geometrische Anschauung (welches LGS steckt hinter Matrix)
→ Potenzieren von Matrizen (effektiver)

Anwendung: "Rekursive Folgen":

Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in K definiert durch lineare Rekursionsgleichung:

$$a_n := c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

und Anfangsgliedern $a_0,\dots,a_{k-1}$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_{n-k} \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:C\in K^{k\times k}} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{pmatrix} \in K^{k\times k}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{n+k-1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = C^n \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} \quad \text{Was ist } C^n \text{ für große n?}$$

Idee: Wenn C diagonalisierbar und diagonalisiert (Diagonalmatrix) für ein T: $D = T^{-1}CT$ Diagonalmatrix.
$\Rightarrow C^n = \underbrace{C\cdot\ldots\cdot C}_{n-mal} = T\underbrace{(T^{-1}CT)}_{D}\underbrace{(T^{-1}C\cdot\ldots\cdot CT)}_{D\cdots D}T^{-1} \overset{\text{Assoziativität}}{=} TD^nT^{-1}$ leicht zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_k \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} d_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & d_k^n \end{pmatrix}$$

(3.47) Beispiel (Fibonacci)

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad q_0 = 0, a_1 = 1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = C^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_C(x) = x^2 - x - 1 \quad \Rightarrow \quad \text{EW sind } c_{1,2} = \tfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \text{ EV sind } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Löse LGS zur Berechnung:

$$\Rightarrow T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow D := T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow C^n = TD^nT^{-1}$$

Wegen $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = C^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist a_n der Eintrag von C^n in Zeile 2 und Spalte 1 (also berechnen wir "nur" diese):

$$C^n = TD^nT^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & * \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & * \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-\sqrt{5}}}_{(det(T)=-\sqrt{5})\text{ Adjunktenformel!}}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) & * \end{pmatrix} \Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Euklidische und unitäre Vektorräume

§13 Euklidische Vektorräume

Im gesamten Kapitel ist $K = \mathbb{R}$ und V ein $\mathbb{R}-$VR (aber nicht notwendigerweise endlichdimensional!).

(4.1) Definition

Eine Abbildung $\langle \star, \star \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt *Skalarprodukt auf* V wenn für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$ gelten:

- (S1) $\langle v, \lambda \cdot w_1 + \mu \cdot w_2 \rangle \;=\; \lambda \cdot \langle v, w_1 \rangle \,+\, \mu \cdot \langle v, w_2 \rangle$ (Linearität)
- (S2) $\langle v, w \rangle \;=\; \langle w, v \rangle$ (Symmetrie)
- (S3) $\langle v, v \rangle \;>\; 0$ für alle $v \;\neq\; \mathcal{O}$ (Positiv definiert)

Bemerkung:

- Wendet man (S2) auf (S1) an, so folgt auch $\langle \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2, w \rangle \;=\; \lambda \cdot \langle v_1, w \rangle \,+\, \mu \cdot \langle v_2, w \rangle$
- $\langle v, 0 \rangle \;=\; \langle 0, v \rangle \;=\; 0$

Ist auf V eine Skalarprodukt definiert, so heißt V *Euklidischer Vektorraum* und für $v \in V$ heißt $\|v\| := \sqrt{\underbrace{\langle v, v \rangle}_{\text{immer positiv (S3)}}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die *Länge* oder *Norm* von v.

(4.2) Beispiel

1. Standardskalarprodukt

   $$V = \mathbb{R}^n, \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle := \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}_{\geq 0} \in \mathbb{R}$$

   $$\left[\text{bzw. } := \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right]$$, ist das *Standardskalarprodukt*

   damit heißt $\mathbb{R}^n$ der *n-dimensionale euklidische Raum.*

   Es ist $\left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$

   GRAFIK

   $l = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} =$ Länge nach Pythagoras

2. Stetige Funktionen
   $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid , f \text{ stetig}\}$ ist $\mathbb{R} - VR$
   $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt \ \in \mathbb{R}$ ist Skalarprodukt auf V.
   (Beachte: $\int_0^1 f(t)^2 dt \overset{\text{(f stetig)}}{>} 0$ für $f \neq 0$, also ist (S3) erfüllt)

3. Symmetrische Matrizen
   $V = \mathbb{R}^n$, $A \in K^{n\times n}$ *symmetrisch*, also $A = A^t$.
   Ist $\langle v, w \rangle := v^t \cdot A \cdot w \ \in \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt?
   Es ist $\langle v, w \rangle = v^t \cdot A \cdot w = (w^t \cdot A^t \cdot v)^t \overset{\text{(A symmetrisch)}}{=} w^t \cdot A \cdot v = \langle w, v \rangle$.
   Also ist (S2) erfüllt. Doch was ist mit (S3)?
   Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
   $\langle v, v \rangle = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \cdots = (2a-b)^2 + 2b^2 > 0$ für $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} > 0$.
   (S3) ist erfüllt, also definiert A ein Skalarprodukt.
   Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
   $\langle v, v \rangle = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 < 0$
   (S3) ist nicht erfüllt, also definiert A kein Skalarprodukt.
   Symmetrie ist also kein ausreichendes Kriterium.

(4.3) Definition und Bemerkung

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *positiv definiert*, wenn A symmetrisch ist ($A = A^t$) und $v^t \cdot A \cdot v \ > \ 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$.

Bemerkung: A ist positiv definiert $\Leftrightarrow$ $\langle v, w \rangle := v^t \cdot A \cdot w$ ein Skalarprodukt ist.

(4.4) Eigenschaften des Skalarproduktes

Sei $\langle \star, \star \rangle$ ein Skalarprodukt auf V, dann gilt für alle $v, w \in V$; $\lambda \in \mathbb{R}$:

a) *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*: $|\langle v, w \rangle| \ \leq \ ||v|| \cdot ||w||$
   (und $|\langle v, w \rangle| \ = \ ||v|| \cdot ||w||$ genau dann wenn v und w linear abhängig (parallel) sind).

b) $||v|| \ \geq \ 0$ und $||v|| \ = \ 0$ nur wenn $v \ = \ \mathcal{O}$.

c) $||\lambda v|| = \lambda \cdot ||v||$, $\underbrace{\frac{v}{||v||}}_{\Rightarrow \frac{1}{||v||} \cdot v}$ ist normiert.

d) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (Dreiecksungleichung)

e) aus d folgt: $|||v|| - ||w||| \leq ||v - w||$

f) $< v, w >= \frac{1}{2}(||v + w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2)$ (Polarisationsformel)

Beweis:

a) $w = \mathcal{O} \Rightarrow < v,w >= 0 = \|v\| \cdot \|w\|, (v,w)\, l.a. \checkmark$

Sei $w \neq \mathcal{O}$. Setze $\lambda := -\frac{<v,w>}{<w,w>} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow 0 \overset{(S3)}{\leq} < v+\lambda w, v+\lambda w > \overset{(S1)}{=} < v,v > +\lambda < v,w > +\lambda \overbrace{< w,v >}^{<v,w>(S2)} + \lambda^2 < w,w >$$

$$= < v,v > -2\frac{<v,w>^2}{<w,w>} + \frac{<v,w>^2}{<w,w>} = < v,v > - \frac{<v,w>^2}{<w,w>}$$

$$\Rightarrow < v,w >^2 \leq < v,v > \cdot < w,w > \overset{\sqrt{\cdot}}{\Rightarrow} |< v,w >| \leq \|v\| \cdot \|w\| \quad \square.$$

d) $\|v+w\| = < v+w, v+w >$

$$\overset{(S1)}{=} |< v,v > +2 < v,w > + < w,w >| \leq \underbrace{|< v,v >|}_{=\|v\|} + 2\underbrace{|< v,w >|}_{\overset{(a)}{\leq} \|v\|\cdot\|w\|} + \underbrace{|< w,w >|}_{\|w\|}$$

(gewöhnliche Dreiecksungleichung für $\underbrace{|\cdot|}_{Betrag}$)

$$\leq (\|v\| + \|w\|)^2 \quad \square$$

(4.4) Definition

Eine Abbildung $< *,* >: V \times V \to \mathbb{R}$ heißt *Skalarprodukt auf V* für alle $\lambda, \mu \in V$ gelten:

(S1) $< v, \lambda w_1 + w_2 >= \lambda \cdot < v, w_2 > + \mu \cdot < v, w_2 >$ (Linearität)

(S2) $< v,w >=< w,v >$ (Symmetrie)

(S3) $< v,v >> 0 \; \forall \, v \neq 0$ (positiv definiert)

(Bemerkung: (S1), (S2) $\Rightarrow < \lambda v_1 + \mu v_2, w >= \lambda < v_1, w > + \mu < v_2, w >$)

a) $|< v,w >| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ (Cauchy-Schwartzsche Ungleichung)

$|< v,w >| = \|v\| \cdot \|w\| \Leftrightarrow (v,w)\, l.a.$

b) $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \mathcal{O}$

c) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$, $\frac{v}{\|v\|}$ ist normiert.

d) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

e) $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\|$

f) $< v,w >= \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$ Polynomformel

(4.5) Definition (Winkel)

V eukl. VR, $v,w \in V$. Nach Satz (4.4a) ist: $\frac{|<v,w>|}{\|v\|\cdot\|w\|} \leq 1$, d.h. $-1 \leq \frac{<v,w>}{\|v\|\cdot\|w\|} \leq 1$.
$cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ ist bijektiv:
Das eindeutige $\alpha \in [0,\pi]$ mit $cos\ \alpha = \frac{<v,w>}{\|v\|\cdot\|w\|}$ heißt *Winkel zwischen v und w*.

!!GRAPH DER SINUS-FUNKTION!!

v und w heißen *orthogonal*, geschrieben $V \perp W$, wenn $< v,w >= 0$ (d.h. $cos\, \alpha = \frac{\pi}{2}$).

(4.6) Beispiel

a) Sei $V := C^0([-\pi,\pi]) = \{f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} | f\ stetig\}$ und

$< f,g >:= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. $< sin, cos >= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{sin(x)cos(x)}_{=\frac{1}{2}sin(2x)} dx = 0$. d.h. *sin* und *cos* sind orthogonal.

b) V eukl. VR, $v,w \in V$.

$(v,w)\, l.a. \Leftrightarrow |< v,w >| = \|v\| \cdot \|w\| \Leftrightarrow cos\ a = \pm 1 \Leftrightarrow \alpha \in \{0,\pi\} \Leftrightarrow v,w$ „parallel“

c) $V = \mathbb{R}^2$ euklidischer Raum. $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow cos\ \alpha = \frac{<v,w>}{\|v\|\cdot\|w\|} = \frac{a\dot{1}+b\cdot 0}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{1}} = \frac{a}{\sqrt{\underbrace{a^2+b^2}_{l}}}$ $\checkmark$.

!!GRAPH EINES VEKTORS MIT WINKEL UND LÄNGE!!

$< v,w >:= v^{tr}Aw$, A pos. def.

(4.7) Definition (Gram-Matrix)

V euklidischer Vektorraum mit $B = (v, \ldots, v_n)$.
Dann heißt $G^B(<,>) := (< v_i, v_j >)_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die *Gram-Matrix von* $<,>$ bezüglich B z.B. $V = \mathbb{R}^n, B = \varepsilon$

a) $<,>$ Standardskalarprodukt $\Rightarrow G^B(<,>) = E_n$.

b) $< v,w >_A := V^t Aw$ (vgl. Bsp. (4.2c)) $\Rightarrow G^B(<,>)_A$.

Bemerkung: Ist $A = G^B(<,>)$ dann gilt $\forall\, v,w \in V : < v,w >= \chi_B(v)^t A \chi_B(w)$ folgt aus (S1).
Insbesondere ist $G^B(<,>)$ positiv definiert (wegen (S3)).

$$x^t Ax > 0 \ \forall\ x \neq 0$$

Umgekehrt definiert (*) für jede positiv-definierte Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein Skalarprodukt $<,>$ mit $G^B(<,>) = A$, d.h. $< v_i, v_j >= (a_{ij})$, wobei $A = (a_{ij})$. B beliebig, aber fest.

$\{$Skalarprodukt auf V $\} \xrightarrow{G^B} \{A \in K^{n \times n}, A$ pos. def $\}$ $<,> \mapsto G^B(<,>)$ $< v,w >:= \underbrace{\chi_B(v)^t A \chi_B(w)}_{A \mapsto}$

(4.8) Satz

Sei V euklidischer Vektorraum mit Basen $B = (v_1, \ldots, v_n)$ und $B' = (v'_1, \ldots, v'_n)$. Dann gilt für $A = G^B(<,>)$, $A' = G^B(<,>) : A' = T^{tr}AT$ wobei $T = {}^BT^{B'}$

Beweis:

Sei $T = (t_{ij})$, d.h. $v'_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} v_i$.
Sei $A = (a_{ij})$, d.h. $a_{ij} =< v_i, v_j >$
Sei $A' = (a'_{ij})$, d.h. $a'_{ij} =< v'_i, v'_j >$
$\Rightarrow a'_{ij} =< \sum_{k=1}^n t_{ki} v_k, \sum_{l=1}^n t_{lj} v_{vl} >$

$= \sum_{k=1}^n t_{ki} \underbrace{< v_k, \sum\limits_{l=1}^{n} te_j v_l >}_{\sum_{l=1}^n tlj \underbrace{< v_k, v_l >}_{a_k}}$

$= \sum_{l=1}^{n} a_{kl} t e_j = (k,j)$-Eintrag von $A \cdot T = (i,j)$-Eintrag von $T^t A T \square$

(4.9) Anwendung (Skalarprodukt von Suchvektoren)

Gegeben: n Dokumente, m Terme

Definiere zu Dokument j den Vektor $d_j = \begin{pmatrix} d_{1j} \\ \vdots \\ d_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ wobei $d_{ij} =$ Häufigkeit des Terms im Dokument j.
Dabei wird d_j normiert, d.h. ersetze d_j durch $\frac{1}{||d_j||} d_j$.

Die Matrix $D : (d_{ij}) \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine „Term-dokumente-Matrix“.

D ist im Allgemeinen „dünn besetzt“(d.h. viele Nullen). Aus einer Suchanfage nach den Termen $i_1, \cdots, i_l$ wird der Suchvektor $s = \begin{pmatrix} 0 \ldots \underbrace{1}_{i_1} \; \underbrace{1}_{i_2} \ldots \underbrace{1}_{i_l} \ldots 0 \end{pmatrix}$ gebildet und normiert ($s \rightsquigarrow \frac{1}{||s||} \cdot s$).
Welche Spalte d_j von D paßt am besten zu s?
Wähle als Maß das Standard-Skalarprodukt $\mathbb{R}^m : 0 \leq' < s, d_j >' \leq ||s|| - \left|\left|d_j\right|\right|$. $< s, d_j >= 1 \Leftrightarrow (s, d_j)$ l.a. $\Leftrightarrow s = \pm d_j \Leftrightarrow s = d_j$ $< s, d_j >= 0 \Leftrightarrow$ keiner der gesuchten Terme kommt in d_j vor.

Antwort: gesucht das Dokument j für das $< s, d_j >$ maximal wird.

$$s^t \cdot D = (< s^t, d_1 >, < s^t, d_2 >, \cdots, < s^t, d_m >)$$

(4.10) Definition

Sei V euklidischer Vektorraum. Eine Basis heißt *Orthogonalbasis* (ONB), wenn alle Vektoren aus B normiert und paarweise orthogonal sind, d.h. $< v, w >= \begin{cases} 0 & \text{falls } v \neq w \\ 1 & \text{falls } v = w \end{cases} \quad \forall v, w \in B$

Bemerkung: Für $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ gilt:

$$\mathcal{B}\ ONB \Leftrightarrow G^{\mathcal{B}}(<,>) = E_n$$

Insbesondere ist dann für $v, w \in \mathcal{B}$ mit

$$\chi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \chi_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

1. $< v, w >= \chi_{\mathcal{B}}(v)^t \ \chi_{\mathcal{B}}(w) = \underbrace{x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m}_{\text{Standard Skalarprodukt} \to < \chi_{\mathcal{B}}(v), \chi_{\mathcal{B}}(x)}$

2. $< v, w >= \chi_{\mathcal{B}}(v)^t e_i = x_i$
   Wir bezeichnen ONB in der Regel mit $(c_1, ..., c_n)$

(4.11) Beispiel)

$V = \mathbb{R}^3$ mit Standard-Skalarprodukt

$$\text{Die Menge } \mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=:e_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{e_3} \right\} \text{ ist ONB von } \mathbb{R}^3$$

$$||e_2|| = ||\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}|| = |\frac{1}{\sqrt{2}}| \cdot || \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}||$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = 1$$

$$< e_2, e_3 >= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)) = 0$$

TODO zuende machen

(4.12) Satz)

(4.13) Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren

Sei $m = n - 1$, also $B = (e_1, \dots, e_{n-1}, v_n)$. (Der Rest folgt durch Induktion)
Setze $e'_n := v_n - \sum_{i=1}^{n-1} < v_n, e_i > e_i \neq 0$
Für

$$1 \leq j \leq n - 1 ist < e'_n, e_j >$$

$$=< v_n, e_j > - \sum_{i=1}^{n-1} < v_n, e_i >< e_i, e_j >$$

$$=< v_n, e_j > - < v_n, e_j >< e_j, e_j >= 0$$

Also sind $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_n)$ paarw. orthogonal,
insbesondere auch linear unabhängig nach a.
Setze $e_n := \frac{1}{||e'_n||} e'n \Rightarrow < e_1, \dots, e_n >$ ONB von V.

(4.14) Beispiel (Gram-Schmidt-Verfahren)

$$V = \mathbb{R} \text{ eukl. Raum}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1' := v_1, e_1 := \frac{1}{||e_1'||}e_1' = \frac{1}{\sqrt{a}}e_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$e_2' := v_2 - < v_2, e_1 > e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) e_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$||e_2'|| = \sqrt{\frac{4+4+1}{9}} = 1, e_2 = e_2'$$

$$e_3' := v_3 - < v_3, e_1' > e_1' - < v_3, e_2' > e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0e_1' - 1e_2' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$||e'3'|| = \sqrt{\frac{4+1+4}{9}} = 1, e_3 := e_3'$$

(4.15) Folgerung

Sei $A \in \mathbb{R}^{nxn}$. Dann:
A positiv definiert (=1. symmetrisch; 2. $x^T A \gg 0 \forall x \neq 0$)
$\Leftrightarrow$ es gibt ein $S \in GL_n(\mathbb{R}$ mit $A = S^T S$.
Beweis: "$\Rightarrow A$ pos. def. $\Rightarrow < v, w > := v^T AW$ ist Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ mit $G^\varepsilon(<,>) = A$. (Bsp. 4.7b).
Sei B ONB bzgl. $<,>_A$. (Satz 4.14c)

Dann ist $G^B(<,>_a) = E_n$. (Def 4.10). (Satz 4.8): $A = G^B(<,>_A) = S^T \overbrace{G^B(<,>_A)} = E_n S$ mit $S = {}^B T^\varepsilon \in GL_n(\mathbb{R})$
Also $A = S^T S$.
„$\Leftarrow$“Sei $A = S^T S$, $S \in GL_n(\mathbb{R})$.

- $A^T = (S^T S)^T = S^T (S^T)^T = S^T S = A$ (Symmetrie)
- $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $V^T AV = (V^T S^T)(SV) = (SV)^T (SV) =< s_v, s_v >\geq 0$

(4.16) Definition + Bemerkung

V eukl. VR, $U \subset V$, $\dim V = n \ll \infty$
$U^\perp := \{v \in V | < u, v >= 0 \; \forall u \in U\} = \{v \in V | u \perp v \; \forall u \in U\}$heißt *Orthogonalraum von U.*

- $U^\perp \leq V$ (…ist Untervektorraum)
- $U \cap U^\perp = \{0\}$
- $U + U^\perp = V$
- $\dim U^\perp = n - \dim U$
- $(U^\perp)^\perp = U$

Beweis von c)
Sei $(v_1, \cdots, v_m)$ ONB von U. Ergänze Sie zu einer ONB $(v_1, \cdots, v_n)$ von V. Es folgt, dass $v_{m+1}, \cdots, v_n \in U^\perp$, denn $< v_i, v_j >= 0 \; \forall i \leq m, j \geq m+1$.
Also $v_1, \cdots, v_n \in U \cup U^\perp \subseteq U + U^\perp$.
$\Rightarrow V =< v_1, \cdots, v_n >\leq U + U^\perp \leq V$
$\Rightarrow U + U^\perp)V$.

(4.17) Beispiel

$V = \mathbb{R}^4$ eukl. Raum. Sei $A \in \mathbb{R}^{nxd}$,$B \in \mathbb{R}$,$d \in \mathbb{N}$.
Dann gilt $SR(A)^{\perp} = \mathbb{L}_0(A^T)$
$\mathbb{L}_0(B)^{\perp} = SR(B^T)$

Beweis: Seien $s_1, \cdots, s_d$ die Spalten von A. $x \in SR(A)^{\perp}$

$\Leftrightarrow < n,x >= 0 \; \forall n \in SR(A)$
$\Leftrightarrow < n,x >= 0 \; \forall u = s_1, \cdots, s_d$
$\left[< s_i,x >= s_i^T x\right]$
$\Leftrightarrow s_i^T = 0 \; \forall \; i = 1, \cdots, d$
$\Leftrightarrow A^T x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{L}_0(A^T)$.

§14 Orthogonale Endomorphismen

V euklid. VR, $dim_{\mathbb{R}} V = n < \infty$

(4.18) Definition + Beispiel

$p \in End_K(V), A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) ϕ heißt orthogonal, wenn

$$< \phi(v), \phi(w) >=< v,w > \forall v,w \in V.$$

b) A heißt orthogonal, wenn $A^t A = E_n$
z.B.:

- $id_v : v \mapsto v$
- $-id_v : v \mapsto v \;\; < -v, -w >= (-1)^2 < v,w >=< v,w >$
- $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, e_1 \mapsto e_2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^t A = A^2 = E_2$$

Bemerkung:
ϕ orthogonal $\Rightarrow$

- $\|\phi(v)\| = \|v\| \; \forall v \in V$ („ϕ erhält Länge“).
- $\alpha(\phi(v), \phi(w)) = \alpha(V,W) \; \forall v,w \in V$(„Winkelerhaltend“)
- nur ±1 können EW von ϕ sein.

$$\phi(v) = c \cdot v \Rightarrow \|\phi(v)\| = \|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\| \underset{v \neq 0}{\Rightarrow} |c| = 1$$

(4.19) Bemerkung

a) A orthogonal $\Rightarrow A$ invertierbar und $detA = \pm1$

b) Sei $\phi \in End_K(V), B$ ONB von V.
ϕ orthogonal $\Leftrightarrow M^B_\phi$ orthogonal $\underset{a)}{\Rightarrow}$ ϕ bijektiv und det $\phi = \pm 1$

Beweis

a) $A^{-1} = A^t$
$A^t \cdot A = E_n \Rightarrow 1 = det(E_n) = det(A^t) \cdot det(A) = det(A)^2 \Rightarrow det(A) = \pm 1.$

b) Sei $A = M^B_\phi\ B\ ONB = G^B(<,>) = E_n$, also $\forall\ v, w \in V$:

- $< v, w >= X_B(v)^t \cdot X_B(w)$
- $< \phi(v), \phi(w) >= X_B(\phi(v))^t \cdot X_B(\phi(w)) = (M^B_\phi X_B(v))^t \cdot (M^B_\phi X_B(w))$
  $(AX_B(v))^t \cdot (AX_B(w)) = X_B(v)^t A^t A X_B(w)$

$$< v, w >=< \phi(v), \phi(w) > \Leftrightarrow e_i^t A^t A e_i = (i, j) - \text{Eintrag von } A^t A$$

$$e_i^t e_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\rightarrow A^t A = E_n$$

D.h. ϕ orthogonal $\Leftrightarrow$ A orthogonal.
Erinnerung: (2.6.7): Isomorphismus von $V \leftrightarrow$ Basiswechsel von V.
hier (eukl. VR):
orthog. Homomorphismus von $V \leftrightarrow$ Wechsel zwischen ONB von V.
ϕ orthog. Isom. $\Rightarrow$ (B ONB von $V \Rightarrow \phi(B)$ ONB von V)

(4.20) Satz

B ONB von V, $\phi \in End_K(V)$ bijektiv (d.h. Homomorphismus).
$B^{'}$ Basis von V.

a) $B^{'}$ ONB von $V \Leftrightarrow {}^B T^{B^{'}}$ orthogonal.

b) $\phi(B)$ ONB von $V \Leftrightarrow \phi$ orthogonal.

Beweis

a) $G^{B^{'}}(<,>) = T^t G^B(<,>) T$ mit $T = {}^B T^{B^{'}}$
Also $B^{'}$ ONB $\Leftrightarrow G^{B^{'}}(<,>) = E_n$

$$\Leftrightarrow T^t T = E_n$$

$$\Leftrightarrow T \text{ orthogonal}$$

b) folgt aus a).

(4.20) Definition + Bemerkung

$O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | A^tA = E_n \subset GL-N(\mathbb{R})\}$

heißt orthogonale Gruppe.

Bem.: O(n) ist Gruppe bzgl. Matrix-Mult.

$$\text{z.B. A,B } \in O(n) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} A\cdot B \in O(n) \\ A^{-1} \in O(n) \\ E_n \in O(n) \end{array}\right\} \text{Übung}$$

(4.21) Beispiel

n=2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$A \in O(n) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} 1. & a^2+c^2=1 \\ 2. & b^2+d^2=1 \\ 3. & ab+cd=0 \end{array}$$

1. $\Leftrightarrow a = cos\ \alpha, c = sin\ \alpha$ für ein $\alpha \in [0,2\pi)$

2. $\Leftrightarrow b = sin\ \beta, d = cos\ \beta$ für ein $\beta \in [0,2\pi)$

3. $\overset{1.+2.}{\Leftrightarrow} \underbrace{cos\ \alpha \cdot \text{ sind } \beta + sin\ \alpha \cdot cos\ \beta}_{=sin(\alpha+\beta) \text{ Add.theorem}} = 0$

$\Leftrightarrow \alpha+\beta = k\cdot\pi$ f. e. $k \in \mathbb{Z}$.

Setze $\beta = k\cdot\pi-\alpha$ ein in 1.+2. :

$d = cos(k\cdot\pi-\alpha), b = sin(k\cdot\pi-\alpha)$.

1. Fall: k gerade:

$\Rightarrow d = cos(-\alpha) = cos\ \alpha$

$b = sin(-\alpha) = -sin\ \alpha$

Also: $A = \begin{pmatrix} cos\ \alpha & -sin\ \alpha \\ sin\ \alpha & cos\ \alpha \end{pmatrix}$

$detA = cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$

$\chi_A(x) = x^2 - 2cos\alpha x + 1$

nicht diag.bar weil keine EW außer bei $\alpha \in \{0,\pi\}$.

2. Fall: k ungerade

$\Rightarrow d = cos(\pi-\alpha) = -cos(-\alpha) = -cos(\alpha)$

$b = sin(\pi-\alpha) = -sin(-\alpha) = sin\alpha$

Also $A = \begin{pmatrix} cos\ \alpha & sin\ \alpha \\ sin\ \alpha & -cos\ \alpha \end{pmatrix}$

$detA = -1$

$\chi_A(x) = (x-1)(x+1)$

Spiegelachse = V(1,A)

immer diag.bar, ähnlich zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

—

$A^tA = E_n$

$\Rightarrow \underbrace{det(A^t)}_{det(A)} \cdot det(A) = \underbrace{det(E_n)}_{=1}$

$\Rightarrow detA = \pm 1$

(4.22) Bemerkung + Definition

A $\in$ O(n) heißt $\left\{ \begin{array}{l} \text{eigentlich orthogonal oder Drehung} \\ \text{uneigentlich orthogonal (im } \mathbb{R}^2\text{Spiegelung)} \end{array} \right.$ wenn $\left\{ \begin{array}{l} detA = 1 \\ detA = -1 \end{array} \right.$

$AO(n) := \{A \in O(n) | detA = 1\}$

heißt spezielle orthogonale Gruppe.

Bem.: $SO(n) \leq O(n) \leq GL_n(\mathbb{R})$ sind Gruppen

die Spiegelungen bilden <u>keine</u> Gruppe!

$$\begin{array}{ccccc} \text{Drehung} & \circ & \text{Drehung} & = & \text{Drehung} \\ det1 & & det1 & & det1 \end{array}$$

im $\mathbb{R}^2$: $\begin{array}{ccccc} \text{Drehung} & \circ & \text{Spiegelung} & = & \text{Spiegelung} \\ det1 & & det-1 & & det-1 \end{array}$

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spiegelung} & \circ & \text{Spiegelung} & = & \text{Drehung} \\ det-1 & & det-1 & & det1 \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{matrix}}_{Drehung} = \underbrace{\begin{matrix} cos\alpha & sin\alpha \\ sin\alpha & -cos\alpha \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}}_{Spiegelungen}$$

Jede Drehung ist Produkt zweier Spiegelungen (im $\mathbb{R}^2$).

Wir verallgemeinern jetzt den Fall

n=2:

$$\underset{x}{\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}}, \underset{x}{\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}}, \underset{0}{\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}}, \underset{\substack{\text{mit } \alpha \neq 0, \pi \\ x}}{\begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}}$$

(4.23) Satz

Sei $\varphi \in \text{End}_K(v)$ othogonal. Dann gibt es eine ONB $\mathcal{B}$ von V, so dass

$$M_\varphi^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

wobei $A_i = \begin{pmatrix} cos\alpha_i & -sin\alpha_i \\ sin\alpha_i & cos\alpha_i \end{pmatrix} \in SO(2)$

mit $\alpha_i \in (0,2\pi), \alpha \neq \pi$.

$$\text{oder: } M_\varphi^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & A_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_i \in (0,2\pi)$

($\alpha_i = \pi$ erlaubt)

hier ist $det\ \alpha = \pm 1$.

Beweis:

1. Einnerungen

   U φ-invariante UR v. V,

   $\mathcal{B} = (\underbrace{v_1,\ldots,v_m}_{=\mathcal{B}' \text{ Basis von U}}, \underbrace{v_{m+1},\ldots,v_n}_{B''})$ Basis von V

   $$\Rightarrow M_\varphi^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} M_{\varphi|U}^{\mathcal{B}} & 0 \\ \hline \underbrace{0}_{m} & * \end{array}\right)$$

   Jetzt: V eukl. VR und $(v_1,\ldots,v_n)$ ONB von V!

   a) $\mathcal{B}'' = (v_m+1,\ldots.,v_n)$ Basis von $U^\perp$.

      zu zeigen: $U^\perp = < v_{m+1},\ldots,v_n >$

      „$\supseteq$“ klar, weil $(v_1,\ldots,v_n)$ ONB

      „$\subset$“: Sei $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in U^\perp$

      $$\Rightarrow 0 \underbrace{=}_{f.a.j \leq m} < v, v_j > = \sum_{i01}^n \lambda_i \underbrace{< v_i, v_j >}_{= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i \neq j \\ 1 & \text{für} \quad i = j \end{cases}} = \lambda_j$$

      $\Rightarrow v \in < v_{m+1},\ldots,v_n >$

b) $U \varphi$-invariant $\Rightarrow U^{\perp} \varphi$-invariant

$\varphi(U^{\perp}) = \{\varphi(v) | \underbrace{< u,v >}_{\overset{\varphi orthog.}{=}} = 0 f.a.u \in U\}$

$= \{\varphi(v) | < \varphi(u), \varphi(v) >= 0 f.a.u \in U\}$

$= \{v' | < u', v' >= 0 f.au' \in \varphi(u)\}$

$= \varphi(U)^{\perp} \overset{U\varphi\text{-invariant,d.h. } \varphi(U)=U}{=} U^{\perp}$

a) + b) $\Rightarrow M_{\varphi}^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} M_{\varphi|U}^{\mathcal{B}} & 0 \\ \hline 0 & M_{\varphi|U^{\perp}}^{\mathcal{B}''} \end{array}\right)$

Idee: Induktion nach dim V. Finde φ-invar. UR U mit dim U = 1 oder 2 und verwende Induktionsvorraussetzung für $U^{\perp}$.

$dim\, U = 1 \Rightarrow M_{\varphi|U}^{\mathcal{B}'} = (\pm 1)$ weil $(det = \pm 1)\varphi$ orth.

$dim\, U = 2 \Rightarrow M_{\varphi|U}^{\mathcal{B}'} = \begin{matrix} cos\, \alpha & -sin\, \alpha \\ sin\, \alpha & cos\, \alpha \end{matrix}$

2. a) $f \in \mathbb{R}[x], degf = m.$

$f(\varphi)(v) = 0, v \neq O$

$\Rightarrow < v, \varphi(v), \varphi^2(v), \ldots, \varphi^{m-1}(v) >$ ist φ-invariant.

$f = a_o + a_1 x + \ldots. + a_m x^m, a_m \neq 0$

$\Rightarrow \varphi^m(v) = \frac{-1}{a_m} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} a_i \varphi^i(v) \in < v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{m-1}(v) >$

$0 = f(\varphi)(v) = a_i v + a_1 \varphi(v) + \ldots. + \underbrace{a_m}_{=0} \cdot \varphi^m(v)$

b) Sei $\chi_{\varphi}(x) = f_1(x) \ldots f_e(X), f_i \in \mathbb{R}[x]$

$m = max\{degf_i(x) | 1 \leq i \leq l\}$

$\Rightarrow$ es gibt φ-invarianten UR U mit $dimU \leq m$

für $l = 2, d.h. \chi_{\varphi}(x) = f(x)g(x).$

Sei $v \in V \setminus \{0\}$ beliebig

Cayley-Hamilton: $\chi_{\varphi}(\varphi) = 0.$

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \chi_{\varphi}(\varphi)(v) = (f \cdot g)(\varphi)(v) \\ \Rightarrow & = & f(\varphi) \circ g(\varphi)(v) \\ & = & f(\varphi)(g(\varphi)(v) \end{array}$$

1. Fall: $g(\varphi)(v)00, v \neq 0, deg\ g \leq m$

2. Fall: $\underbrace{g(\varphi)(v)}_{=v'} \neq 0.$

$\Rightarrow f(\varphi)(v') = 0, v' \neq 0, degf \leq m.$

$\Rightarrow$ es gibt φ-invarianten UR U mit $dimU \leq m.$

c) Fundamentalsatz der Algebra $\chi_{\varphi}(x) = \underbrace{(x - a_i) \cdots (x - a_r)}_{\text{r realle Nullstellen}} \underbrace{(x - z_1)(x - z_1) \cdots (x - z_s)(x - z_s)}_{\text{s Paare von komplexen Nullstellen}}$

$f \in \mathbb{R}[x],\ f = a_0 + a_1 x + \ldots. + a_n x^n$

$z \in \mathbb{C}, f(z) = 0$

$\Rightarrow f(\overline{z}) = a_o + a_1 z + \cdots + a_n \overline{z}^n$

$= a_0 + a_1 z + \ldots. + a_n z^n$
$= \overline{f(z)} = 0$
(Konjugiert komplex $\overline{a+bi} = a - bi$)
$(x - z_i)(x - z_i) = x^2 - \underbrace{z_1 + z_1}_{\in\mathbb{R}} x + \underbrace{z_1\overline{z_1}}_{\in\mathbb{R}}$
$z_1 = a + bi$
$\Rightarrow z_a + z_1$

$\chi_A(x)$ zerfällt in vollständige Linearfaktoren $\Rightarrow$ A ähnlich zu:

$$\begin{pmatrix}
\lambda_1 & 1 & & 0 & & & & & & & & & \\
& \ddots & \ddots & & & & & & & & & & \\
& & \ddots & 1 & & & & & & & & & \\
0 & & & \lambda_1 & & & & & & & & & \\
& & & & \lambda_2 & 1 & & 0 & & & & & \\
& & & & & \ddots & \ddots & & & & & & \\
& & & & & & \ddots & 1 & & & & & \\
& & & & 0 & & & \lambda_2 & & & & & \\
& & & & & & & & \ddots & & & & \\
& & & & & & & & & \lambda_r & 1 & & 0 \\
& & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \\
& & & & & & & & & & & \ddots & 1 \\
& & & & & & & & & 0 & & & \lambda_r
\end{pmatrix} \quad \text{Jordan'sche Normalform}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sind die EW von A. $A, A^2, A^3, \ldots$

(4.24) Beispiel

$n = 3$. $A \in O(3)$. Nach Satz (4.23) ist A ähnlich zu

a) eigentlich orthogonaler Fall:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ 0 & sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in [0, 2\Pi)$$

„Drehung um α um die e_1-Achse“

b) uneigentlich orthogonaler Fall:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ 0 & sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ 0 & sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & -sin\,\alpha \\ 0 & sin\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}$$

„Spiegelung an der $\langle e_2, e_3 \rangle$-Ebene“.

Folge aus Bemerkung (4.22), $n = 2$: $Im\,\mathbb{Q}^3$ ist

- jede Drehung Produkt von 2 Spiegelungen
- jeder uneigentlich orthogonale Endomophismus ist Produkt von 3 Spiegelungen

z.B.

$$A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 9 \\ 6 & -7 & -6 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_A = ?$$

$A^tA = E_3 \Rightarrow \varphi_A$ ist orthogonal

$det\,A = 1 \Rightarrow \varphi_A$ Drehung

$$V(1,A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \text{Drehachse} \quad \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle = \text{Drehachse}$$

Bezüglich der ONB $(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix})$ hat φ_A die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 6\sqrt{2} \\ 0 & -6\sqrt{2} & -7 \end{pmatrix}$,

d.h. $\alpha = arccos(-\frac{7}{11}) \approx 129.5$.

§15 Symmetrische reelle Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- Welche A lassen sich diagonalisieren durch ein $T \in O(n)$? (d.h. $T^{-1}AT$ Diagonalmatrix)
- Gibt es Orthogonalbasen von $\mathbb{R}^n$ aus EV von A?

(4.25) Bemerkung

$T \in O(n)$.

a) A symmetrisch $\Rightarrow T^{-1}AT$ symmetrisch.

b) $T^{-1}AT$ Diagonalmatrix $\Rightarrow$ A symmetrisch.

Beweis:

a) $(T^{-1}AT)^t = \underbrace{T^t}_{T^{-1}}\underbrace{A^t}_{A}\underbrace{(T^{-1})^t}_{T^t} = T^{-1}AT$.

b) $T^{-1}AT =$ D Diagonalmatrix $\Rightarrow A = TDT^{-1} \overset{a)}{\Rightarrow}$ A symmetrisch.

(4.26) Satz

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. $\chi_A(x)$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren $\overset{(3.38)}{\Leftrightarrow}$ A ähnlich zu Dreiecksmatrix $\Leftrightarrow$ A diagonalisierbar durch $T \in O(n)$.

Beweis (vgl. 3.38): Sei $\chi_A(x)$ „vollständig zerfallend“ $= (x-c_1)\dots(x-c_n), c_i \in \mathbb{R}$.

„$\Leftarrow$“: klar.
„$\Rightarrow$“: Sei $v_1 \in \mathbb{R}^n$ normierter EV zu c_1 und $\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$ ONB von $\mathbb{R}^n$. (Gram-Schmidt)
$T_1 := {}^{\varepsilon}T^{\mathcal{B}} \in O(n) \Rightarrow T_1^{-1}AT_1 \overset{T_1 EW}{=} \left(\begin{array}{c|c} c_1 & * \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \overset{Bem 4.25}{=} \left(\begin{array}{c|c} c_1 & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$ denn

$$T_1^{-1}AT \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = T^{-1}Av_1 = T^{-1}c_1v_1 = cT^{-1}v_1 = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overset{wie\, in (3.38)}{\Rightarrow} \chi_D(x) = (x-c_2)\dots(x-c_n) \overset{Ind.Vorr.}{\Rightarrow}$ ex. $S \in O(n-1) : S^{-1}DS$ Diagonalmatrix.

$\Rightarrow T \cdot T_1 \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & S \end{array}\right) \in O(n) \quad \Rightarrow T^{-1}AT$ Diagonalmatrix. □

(4.27) Spektralsatz

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann ist A diagonalisierbar durch $T \in O(n)$.

Beweis: Nach (4.26) ist zu zeigen: $\chi_A(x)$ zerfällt vollständig in Linearfaktoren (über $\mathbb{R}$) oder: alle EV von A sind reell.

Sei $\lambda \in$ EW von A, $v \in V$ zu $\lambda, \lambda \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{C}^n$.

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{C}, \quad \overline{v} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}, \quad x_j = a_j + b_j, a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

1. $\overline{\lambda}$ EW von A, $\overline{v}$ EV zu $\overline{\lambda}$: $A\overline{v} = \overline{A}\overline{v} = \overline{(Av)} = \overline{(\lambda v)} = \overline{\lambda}\overline{v}$.
2. $v^t\overline{v} = (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \underbrace{x_j\overline{x_j}}_{=a_j^2+b_j^2 \in \mathbb{R} \text{ und } \geq 0} \in \mathbb{R}$ und $> 0.(v \neq 0)$
3. $\lambda(v^t\overline{v}) = (\lambda v^t) = (\lambda v)^t\overline{v} = (Av)^t\overline{v} = v^tA^t\overline{v} = v^tA\overline{v}$.
4. $\overline{\lambda}\underbrace{(v^t\overline{v})}_{\in \mathbb{R}_{>0}} = v^t(\lambda\overline{v}) = v^tA\overline{v} = 3.$

$\overset{3.),4.)}{\Rightarrow} \lambda = \overline{\lambda}$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Anwendung: $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 = 1, a, b, d \in \mathbb{R}$ mit Unbekannten x_1, x_2.

Als Matrixgleichung: $(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1$

bzw. $x^tAx = 1$ (*) mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch, $x \in \mathbb{R}^2$.

Spektralsatz: es gibt $T \in O(2)$ mit $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
Setzt man $x = Ix'$ (Basiswechsel), dann
$(*) \Leftrightarrow x^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x' = 1 \Leftrightarrow \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x2'^2 = 1.$
Dies ist *Ellipsengleichung*:

GRAFIK VON ELLIPSENGLEICHUNG

Satz von der Hauptachsentransformation $\Rightarrow$ Spektralsatz.

Page Rank „Google-Algorithmus“

n Webseiten: $S_1, \ldots, S_n$
S_j enthalten Links auf n_j verschiedene andere Seiten. Definiere die „Link-Matrix“ $L = (l_{ij})$ durch $l_ij :=$
$$\begin{cases} \frac{1}{n_j} & \text{falls} \quad s_j \text{ verlinkt auf } S_i \\ 0 & \quad\quad\;\; \text{sonst (inkl.} i \neq j) \end{cases}$$

- L ist dünn besetzt
- die Spaltensummen sind 1 : $\sum_{i=1}^n l_{ij} = 1 \;\forall\; j$.

Das *Gewicht* (Wichtigkeit) von S_i ist $x_i = \sum_{j=1}^n l_{ij}$.

Problem: „unwichtige“ Seiten, die sich gegenseitig verlinken, werden „wichtig“.
Lösung: Jede Seite hat nur so viele Stimmen wie ihrem Gewicht entspricht.

Also:
$x_i = \sum_{j=1}^n l_{ij} x_j \,\forall i$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : x = Lx$, d.h. x ist EV zum EW 1.

Eine reelle Matrix mit Einträgen ≥ 0 und Spaltensummen = 1 heißt *Markov-Matrix* oder auch *Stochastische Matrix*.

Satz: Eine Markov-Matrix hat immer den EW 1 und immer einen EV mit den Einträgen ≥ 0.

Trick zur Berechnung eines EV zum EW 1: Das Bilden der Folge $x, Lx, L^2x, L^3x, \ldots \in \mathbb{R}^n$ durch Iteration heißt *Markov-Prozess*.

$$(x \in \mathbb{R}^n \text{ ist Anfangsvektor, z.B. } x = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix})$$

Konvergiert er, z.B. $L^ix \overset{i\to\infty}{\to} y$, dann ist y EV zum EW 1! ($Ly = y$)
Der Grenzwert ist leicht auszurechnen, weil L dünn besetzt ist.

Erläuterung: „Zufallssurfer“

$$\text{z.B. } L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L^i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{3}{11} & \frac{3}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{4}{11} & \frac{4}{11} & \frac{4}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{11} \\ \frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} \end{pmatrix} \text{ ist EV zum EW 1.}$$

GRAFIK MIT SURFGRAPH

Index