Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1 Wir betrachten Gleichungssysteme der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & +\ldots+ & a_{1n} & x_n & = & 0 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & +\ldots+ & a_{2n} & x_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & +\ldots+ & a_{mn} & x_n & = & 0 \end{array}$$

mit m Gleichungen und n Unbekannten für $m, n \in \mathbb{N}$ und mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{Q}$ sowie Lösungen mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$. Für jedes solche System gilt:

10	Wenn $m = n - 1$ ist, hat das System genau eine Lösung.	o Ja o Nein
11	Wenn $m > n$ ist, hat das System keine Lösung.	o Ja o Nein
12	Wenn $m = n$ ist, hat das System genau eine Lösung.	o Ja o Nein
20	Wenn es eine von der Nulllösung $\underline{0}$ verschiedene Lösung gibt, gibt es auch eine von $\underline{0}$ verschiedene ganzzahlige Lösung.	o Ja o Nein
21	Wenn es eine von der Nulllösung $\underline{0}$ verschiedene Lösung gibt, gibt es auch eine von $\underline{0}$ verschiedene Lösung, die nicht ganzzahlig ist.	o Ja o Nein
30	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ und $(c_1, \ldots, c_n)$ Lösungen sind, ist auch $(b_1+c_1, \ldots, b_n+c_n)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
31	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ und $(c_1, \ldots, c_n)$ Lösungen sind, ist auch $(b_1-c_1, \ldots, b_n-c_n)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
32	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist und $c \in \mathbb{Q}$, dann ist auch $(c\,b_1, \ldots, c\,b_n)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
40	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 + 1, \ldots, b_n + 1)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
41	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 - 1, \ldots, b_n - 1)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
42	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 + 1, \ldots, b_n + n)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
43	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 - 1, \ldots, b_n - n)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
50	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 + 1, \ldots, b_n + 1)$ keine Lösung.	o Ja o Nein
51	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 - 1, \ldots, b_n - 1)$ keine Lösung.	o Ja o Nein
52	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 + 1, \ldots, b_n + n)$ keine Lösung.	o Ja o Nein
53	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 - 1, \ldots, b_n - n)$ keine Lösung.	o Ja o Nein

2 Wir betrachten Gleichungssysteme der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & +\ldots+ & a_{1n} & x_n & = & 1 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & +\ldots+ & a_{2n} & x_n & = & 1 \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & +\ldots+ & a_{mn} & x_n & = & 1 \end{array}$$

mit m Gleichungen und n Unbekannten für $m, n \in \mathbb{N}$ und mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{Q}$ sowie Lösungen mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$. Für jedes solche System gilt:

10	Wenn $m = n - 1$ ist, hat das System genau eine Lösung.	o Ja o Nein
11	Wenn $m > n$ ist, hat das System keine Lösung.	o Ja o Nein
12	Wenn $m = n$ ist, hat das System genau eine Lösung.	o Ja o Nein
13	Wenn $m = n$ ist, hat das System genau eine Lösung.	o Ja o Nein
14	Wenn $m = n$ ist, hat das System genau eine Lösung.	o Ja o Nein
20	Wenn das System lösbar ist und alle Koeffizienten a_{ij} aus $\mathbb{Z}$ sind, gibt es eine ganzzahlige Lösung.	o Ja o Nein
21	Wenn die Koeffizienten a_{ij} nicht alle aus $\mathbb{Z}$ sind, gibt es keine ganzzahlige Lösung.	o Ja o Nein
30	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ und $(c_1, \ldots, c_n)$ Lösungen sind, ist auch $(b_1+c_1, \ldots, b_n+c_n)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
31	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ und $(c_1, \ldots, c_n)$ Lösungen sind, ist auch $(b_1-c_1, \ldots, b_n-c_n)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
32	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist und $c \in \mathbb{Q}$, dann ist auch $(c\,b_1, \ldots, c\,b_n)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
40	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 + 1, \ldots, b_n + 1)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
41	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 - 1, \ldots, b_n - 1)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
42	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 + 1, \ldots, b_n + n)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
43	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1 - 1, \ldots, b_n - n)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
50	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 + 1, \ldots, b_n + 1)$ keine Lösung.	o Ja o Nein
51	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 - 1, \ldots, b_n - 1)$ keine Lösung.	o Ja o Nein
52	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 + 1, \ldots, b_n + n)$ keine Lösung.	o Ja o Nein
53	Wenn $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Lösung ist, ist $(b_1 - 1, \ldots, b_n - n)$ keine Lösung.	o Ja o Nein

3 Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -3x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \end{array}$$

mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten und seine Lösungen mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

10	$(-2,-4,-6,-7)$ ist eine Lösung.	o Ja o Nein
11	$(3,6,9,13)$ ist eine Lösung.	o Ja o Nein
12	$(-4,-3,3,5)$ ist eine Lösung.	o Ja o Nein
13	$(6,7,3,5)$ ist eine Lösung.	o Ja o Nein
14	$(3,5,6,9)$ ist eine Lösung.	o Ja o Nein
20	Das System hat nicht mehr als 12 Lösungen.	o Ja o Nein
21	Das System hat mehr als 12 Lösungen.	o Ja o Nein
22	Das System hat nicht mehr als 4 Lösungen.	o Ja o Nein
23	Das System hat mehr als 4 Lösungen.	o Ja o Nein
30	Wenn $(b_1,\dots,b_4)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1+1,\dots,b_4+1)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
31	Wenn $(b_1,\dots,b_4)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1-1,\dots,b_4-1)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
32	Wenn $(b_1,\dots,b_4)$ eine Lösung ist, ist $(b_1+1,\dots,b_4+1)$ keine Lösung.	o Ja o Nein
33	Wenn $(b_1,\dots,b_4)$ eine Lösung ist, ist $(b_1-1,\dots,b_4-1)$ keine Lösung.	o Ja o Nein
40	Wenn $(b_1,\dots,b_4)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1+1,\dots,b_4+4)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
41	Wenn $(b_1,\dots,b_4)$ eine Lösung ist, ist auch $(b_1-1,\dots,b_4-4)$ eine Lösung.	o Ja o Nein
42	Wenn $(b_1,\dots,b_4)$ eine Lösung ist, ist $(b_1+1,\dots,b_4+4)$ keine Lösung.	o Ja o Nein
43	Wenn $(b_1,\dots,b_4)$ eine Lösung ist, ist $(b_1-1,\dots,b_4-4)$ keine Lösung.	o Ja o Nein
50	Zu jedem Wert $a \in \mathbb{Q}$ gibt es eine Lösung $(s_1,\dots,s_4)$ mit $s_1 = a$.	o Ja o Nein
51	Zu jedem Wert $a \in \mathbb{Q}$ gibt es eine Lösung $(s_1,\dots,s_4)$ mit $s_2 = a$.	o Ja o Nein
52	Zu jedem Wert $a \in \mathbb{Q}$ gibt es eine Lösung $(s_1,\dots,s_4)$ mit $s_3 = a$.	o Ja o Nein
53	Zu jedem Wert $a \in \mathbb{Q}$ gibt es eine Lösung $(s_1,\dots,s_4)$ mit $s_4 = a$.	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

4	Es sei Z einer der Zahlbereiche $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und V ein Z-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $M = (m_1, m_2, m_3)$ eine Basis von V (siehe Vorlesung vom 24.10.2002) und $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ein Erzeugendensystem von V. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
10	(m_1, m_2) ist eine Basis von V.	o Ja o Nein
11	(m_3, m_2, m_1) ist eine Basis von V.	o Ja o Nein
12	$\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{Z}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
13	$\mathbb{Q}$ ist kein $\mathbb{Z}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
14	$\mathbb{R}$ ist kein $\mathbb{Z}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
15	$\mathbb{C}$ ist kein $\mathbb{Z}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
20	M ist ein Erzeugendensystem von V.	o Ja o Nein
21	A ist eine Basis von V.	o Ja o Nein
22	$\mathbb{Z}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
23	$\mathbb{Z}$ ist kein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
24	$\mathbb{Z}$ ist kein $\mathbb{R}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
25	$\mathbb{Z}$ ist kein $\mathbb{C}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
30	$(m_1, m_2, m_3, \underline{0})$ ist eine Basis von V ($\underline{0}$ ist die Null von V).	o Ja o Nein
31	$(a_1, a_2, a_3, a_4, \underline{0})$ ist ein Erzeugendensystem von V ($\underline{0}$ ist die Null von V).	o Ja o Nein
32	$\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
33	$\mathbb{Q}$ ist kein $\mathbb{R}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
34	$\mathbb{Q}$ ist kein $\mathbb{C}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
35	$\mathbb{R}$ ist kein $\mathbb{C}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
40	$(m_1, m_2, m_1 + m_2 - m_3)$ ist eine Basis von V.	o Ja o Nein
41	$(a_1, a_2, a_3, a_1 - a_2 + a_3 - a_4)$ ist ein Erzeugendensystem von V.	o Ja o Nein
42	$\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
43	$\mathbb{R}$ ist kein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
44	$\mathbb{C}$ ist kein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
45	$\mathbb{C}$ ist kein $\mathbb{R}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
50	m_1 lässt sich als Linearkombination von (m_2, m_3) schreiben.	o Ja o Nein
51	m_3 lässt sich nicht als Linearkombination von (m_1, m_2) schreiben.	o Ja o Nein
52	$\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
53	$\mathbb{Q}$ ist kein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.	o Ja o Nein

54	$\mathbb{R}$ ist kein $\mathbb{R}$-Vektorraum.	o Ja o Nein
55	$\mathbb{C}$ ist kein $\mathbb{C}$-Vektorraum.	o Ja o Nein

5 Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} -x_1 & & +(a-3)x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +2x_2 & +6x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & +(a+2)x_2 & +(8-a)x_3 & = & 4 \end{array}$$

(a) keine, (b) genau eine, (c) genau zwei oder (d) unendlich viele Lösungen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$?

6 Es sei Z einer der Zahlbereiche $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und V ein Z-Vektorraum (siehe Definition in der Vorlesung vom 24.10.2002). Leiten Sie die folgenden Rechenregeln her. Benutzen Sie dabei nur die Axiome aus der Definition (Nummerierung wie in der Vorlesung):

(4) Es gilt $x + \underline{0} = x$ für alle $x \in V$.

(6) Es gilt $(-x) + x = \underline{0}$ für alle $x \in V$.

(11) Es gilt $0 \cdot x = \underline{0}$ für alle $x \in V$ (man beachte $0 \in Z$ und $\underline{0} \in V$).

(12) Es gilt $\lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$ für alle $\lambda \in Z$ und alle $x \in V$.

(13) Es gilt $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$ für alle $\lambda \in Z$ und alle $x \in V$.

(14) Aus $x + y = 0$ mit $x, y \in V$ folgt $y = -x$.

(15) Aus $x + y = x + z$ mit $x, y, z \in V$ folgt $y = z$.

(16) Aus $\lambda \cdot x = \lambda \cdot y$ für $x, y \in V$ und $\lambda \in Z$ mit $\lambda \neq 0$ folgt $x = y$.

(17) Aus $\lambda x = \mu x$ für $\lambda, \mu \in Z$ und $x \in V$ mit $x \neq 0$ folgt $\lambda = \mu$.

Dokumentieren Sie bei jedem Schritt genau, welche der Axiome (bzw. bereits bewiesenen Regeln) Sie verwenden.

1	Es sei $\mathbb{Q}^{1\times 3} = \{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum aller 1×3-Matrizen über $\mathbb{Q}$. Sind die folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}^{1\times 3}$ Teilräume von $\mathbb{Q}^{1\times 3}$?	
10	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $a \cdot b \cdot c = 0\}$.	o Ja o Nein
11	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $a \cdot b = c \cdot b\}$.	o Ja o Nein
12	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $a = b \cdot c\}$.	o Ja o Nein
13	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $a = 2 \cdot c\}$.	o Ja o Nein
14	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $4 \cdot a = 3 \cdot b\}$.	o Ja o Nein
20	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $2a - 3b = 0\}$.	o Ja o Nein
21	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $a + b - c = 0\}$.	o Ja o Nein
22	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $a + c = 3\}$.	o Ja o Nein
23	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $a - b = a - c\}$.	o Ja o Nein
24	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $a + b = a - c\}$.	o Ja o Nein
30	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $(a = b$ oder $a = -b)\}$.	o Ja o Nein
31	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $(a = 1$ oder $b = c)\}$.	o Ja o Nein
32	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $(a = c$ oder $b = c)\}$.	o Ja o Nein
33	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $(a = c$ oder $a + 1 = c)\}$.	o Ja o Nein
34	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $(a = c$ oder $b + 1 = c)\}$.	o Ja o Nein
40	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $(a = b$ und $a = -b)\}$.	o Ja o Nein
41	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $(a = b$ und $c = 2b)\}$.	o Ja o Nein
42	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $(a - b = 4$ und $a + b = 4)\}$.	o Ja o Nein
43	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $(a - b = 2c$ und $a + b = 2c)\}$.	o Ja o Nein
44	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $(a - b = c$ und $a + b = 3)\}$.	o Ja o Nein
50	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $a = \frac{2m}{n}$ für geeignete $m,n \in \mathbb{Z}$, wobei n ungerade ist$\}$.	o Ja o Nein
51	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $a = \frac{m}{n}$ für geeignete $m,n \in \mathbb{Z}$, wobei n gerade ist$\}$.	o Ja o Nein
52	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $a = \frac{m}{n}$ für geeignete $m,n \in \mathbb{Z}$, wobei $-100 \leq n \leq 100$ ist$\}$.	o Ja o Nein
53	$\{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{Q}$ und $a = \frac{m}{n}$ für geeignete $m,n \in \mathbb{Z}$, wobei $m \leq 0$ ist$\}$.	o Ja o Nein

2	Es sei $\mathcal{B} := \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$. Beantworten Sie die folgenden Fragen durch Angabe einer ganzen Zahl.	
10	Für welches $\lambda \in \mathbb{Q}$ ist $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ \lambda \end{bmatrix}$ als Linearkombination von $\mathcal{B}$ darstellbar?	9
11	Für welches $\lambda \in \mathbb{Q}$ ist $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ \lambda \end{bmatrix}$ als Linearkombination von $\mathcal{B}$ darstellbar?	-3
20	Für welches $\lambda \in \mathbb{Q}$ liegt $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ \lambda \end{bmatrix}$ im Erzeugnis von $\mathcal{B}$?	6
21	Für welches $\lambda \in \mathbb{Q}$ liegt $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ \lambda \end{bmatrix}$ im Erzeugnis von $\mathcal{B}$?	-6
30	Für welches $\lambda \in \mathbb{Q}$ ist $\left(\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$ keine Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$?	2
31	Für welches $\lambda \in \mathbb{Q}$ ist $\left(\begin{bmatrix} \lambda \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$ keine Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$?	1
40	Für welches $\lambda \in \mathbb{Q}$ ist $\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ -12 \end{bmatrix}$ als Linearkombination von $\mathcal{B}$ darstellbar?	-6
41	Für welches $\lambda \in \mathbb{Q}$ ist $\begin{bmatrix} 6 \\ \lambda \\ 12 \end{bmatrix}$ als Linearkombination von $\mathcal{B}$ darstellbar?	9
50	Ist $\lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, was ist dann $\lambda - \mu$?	6
51	Ist $\lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, was ist dann $\lambda - \mu$?	7

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

3	Es sei $V := \mathbb{R}^{1\times 3} = \{[a,b,c] \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller 1×3-Matrizen über $\mathbb{R}$, und es seien in V die Vektoren $v_1 = [2,1,3]$, $v_2 = [1,0,2]$, $v_3 = [3,2,4]$ und $v_4 = [1,2,3]$ gegeben. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
10	Das Erzeugnis $\langle v_2, v_4, v_1\rangle$ ist ganz V.	o Ja o Nein
11	Das Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ ist ganz V.	o Ja o Nein
12	Das Erzeugnis $\langle v_3, v_4, v_2\rangle$ ist ganz V.	o Ja o Nein
13	Das Erzeugnis $\langle v_4, v_2, v_4\rangle$ ist ganz V.	o Ja o Nein
20	Der Vektor $[1,1,0]$ aus V liegt im Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$.	o Ja o Nein
21	Der Vektor $[1,0,1]$ aus V liegt im Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$.	o Ja o Nein
22	Der Vektor $[1,1,1]$ aus V liegt im Erzeugnis $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$.	o Ja o Nein
30	Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_2\rangle$ und $\langle v_3, v_4\rangle$ sind gleich.	o Ja o Nein
31	Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_3\rangle$ und $\langle v_2, v_4\rangle$ sind gleich.	o Ja o Nein
32	Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_3\rangle$ und $\langle v_2, v_3\rangle$ sind gleich.	o Ja o Nein
33	Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_2\rangle$ und $\langle v_1, v_3\rangle$ sind gleich.	o Ja o Nein
34	Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_2\rangle$ und $\langle v_1, v_4\rangle$ sind gleich.	o Ja o Nein
35	Die Erzeugnisse $\langle v_1, v_3\rangle$ und $\langle v_1, v_4\rangle$ sind gleich.	o Ja o Nein
40	Für alle $i,j \in \{1,2,3,4\}$ gilt $\langle v_i, v_j\rangle = \{a \cdot v_i + b \cdot v_j \mid a,b \in \mathbb{R}\}$.	o Ja o Nein
41	Für alle $i,j \in \{1,2,3,4\}$ gilt $\langle v_i, v_j\rangle = \{a \cdot v_i + b \cdot v_j \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$.	o Ja o Nein
42	Für alle $i,j \in \{1,2,3,4\}$ gilt $\langle v_i, v_j\rangle = \{a \cdot v_i + b \cdot v_j \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$.	o Ja o Nein
43	Für alle $i,j \in \{1,2,3,4\}$ gilt $\langle v_i, v_j\rangle = \{a \cdot v_i + a \cdot v_j \mid a \in \mathbb{R}\}$.	o Ja o Nein
50	Für alle $i,j \in \{1,2,3,4\}$ gilt: Das Erzeugnis $\langle v_i, v_i, v_j\rangle$ ist ein Teilraum von $\langle v_i, v_j\rangle$.	o Ja o Nein
51	Für alle $i,j,k \in \{1,2,3,4\}$ gilt: Das Erzeugnis $\langle v_i, v_k\rangle$ ist ein Teilraum von $\langle v_i, v_j, v_k\rangle$.	o Ja o Nein
52	Für alle $i,j,k \in \{1,2,3,4\}$ gilt: Das Erzeugnis $\langle v_i, v_j, v_k\rangle$ ist ein Teilraum von $\langle v_j, v_i, v_k\rangle$.	o Ja o Nein
53	Für alle $i,j,k \in \{1,2,3,4\}$ gilt: Das Erzeugnis $\langle v_i, v_j, v_k\rangle$ ist ein Teilraum von $\langle v_i, v_j\rangle$.	o Ja o Nein

4	In den folgenden Aufgaben sei Z einer der Zahlbereiche $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und V ein Z-Vektorraum. Weiter seien $n, m \in \mathbb{N}$, und es sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ ein Erzeugendensystem von V. Sind die folgenden Behauptungen in dieser Situation immer richtig?	
10	Es gibt ein $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq n$, so dass $(v_1, \ldots, v_{i-1}, w_1, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist.	o Ja o Nein
11	Es gibt ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq m$, so dass $(w_1, \ldots, w_{j-1}, v_1, w_{j+1}, \ldots, w_m)$ eine Basis von V ist.	o Ja o Nein
20	Es gibt ein $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq n$, so dass $(v_1, \ldots, v_{i-1}, w_1, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von V ist.	o Ja o Nein
21	Es gibt ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq m$, so dass $(w_1, \ldots, w_{j-1}, v_1, w_{j+1}, \ldots, w_m)$ ein Erzeugendensystem von V ist.	o Ja o Nein
30	Es ist $m \geq n$.	o Ja o Nein
31	Es ist $m = n$.	o Ja o Nein
32	Es ist $m < n$.	o Ja o Nein
40	$(v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$ ist eine Basis von V.	o Ja o Nein
41	Es ist $m \geq n$ und $(v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n, w_{n+1}, \ldots, w_m)$ ist ein Erzeugendensystem von V.	o Ja o Nein
50	Es gibt eine Folge $(i_1, \ldots, i_n)$ mit $i_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ für $1 \leq k \leq n$, so dass $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ gilt und $(w_{i_1}, \ldots, w_{i_n})$ eine Basis von V ist.	o Ja o Nein
51	Es gibt eine Folge $(i_1, \ldots, i_m)$ mit $i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ für $1 \leq k \leq m$, so dass $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m$ gilt und $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$ ein Erzeugendensystem von V ist.	o Ja o Nein

5 Es seien $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$. Ein System von Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + \ldots + & a_{1n} & x_n & = & b_1 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + \ldots + & a_{2n} & x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & + \ldots + & a_{mn} & x_n & = & b_m, \end{array}$$

deren Koeffizienten a_{ij} und b_i alle in einem Zahlbereich Z (etwa $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \ldots$) liegen, heißt ein **lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten über Z**. Wenn alle b_i gleich Null sind, heißt es **homogen**, sonst **inhomogen**. Eine **Lösung** des Gleichungssystems ist eine Folge $s = (s_1, ..., s_n)$ mit $s_j \in Z$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und mit $a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \ldots + a_{in}s_n = b_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$.

(a) Zeigen Sie: Die Menge aller Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems mit m Gleichungen und n Unbekannten über $\mathbb{R}$ bildet einen Teilraum des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ aller Folgen $(s_1, ..., s_n)$ mit $s_j \in \mathbb{R}$. Diesen Teilraum nennen wir den **Lösungsraum** des Systems.

(b) Geben Sie ein konkretes Beispiel eines lösbaren linearen Gleichungssystems mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten über $\mathbb{R}$ an, dessen Lösungen keinen Teilraum von $\mathbb{R}^4$ bilden.

(c) Wir betrachten nun ein beliebiges (homogenes oder inhomogenes) lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten über $\mathbb{R}$. Es sei M die Menge aller Lösungen dieses Systems, und es sei L der Lösungsraum des „zugehörigen“ homogenen Systems (das wir erhalten, wenn wir alle b_i auf der rechten Seite der Gleichungen durch Null ersetzen). Zeigen Sie: Wenn M nicht leer ist und $t \in M$, dann ist $M = \{t + s \mid s \in L\}$.

6 Es sei $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ das Intervall der reellen Zahlen a mit $-1 \leq a \leq 1$ und V der Vektorraum der reellwertigen Abbildungen auf $[-1, 1]$, also $V = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R}\}$ mit Addition $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ für $f, g \in V$ und $x \in [-1, 1]$, und Multiplikation mit Skalaren $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in V$ und $x \in [-1, 1]$.
Es sei M der folgende Teilraum von V:

$$M := \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Weiter seien die drei folgenden Abbildungen gegeben:

$$f_0 = (x \mapsto 1) \colon [-1, 1] \to \mathbb{R},$$
$$f_1 = (x \mapsto x) \colon [-1, 1] \to \mathbb{R},$$
$$f_2 = (x \mapsto x^2) \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}.$$

(a) Zeigen Sie, dass (f_0, f_1, f_2) eine Basis von M ist.

(b) Lässt sich die Abbildung $f_3 = (x \mapsto x^3) \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ in V aus f_0, f_1 und f_2 linear kombinieren?

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Wir betrachten Paare von Mengen M und Z von rellen Zahlen. Können wir als Operationen $+$, n, $-$, $\lambda\cdot$ (für $\lambda \in Z$) auf M die für reelle Zahlen üblichen Rechenoperationen nehmen, so dass M ein Z-Vektorraum wird?	
10	$M = \mathbb{Z}$ und $Z = \mathbb{Q}$.	o Ja o Nein
11	$M = \mathbb{Z}$ und $Z = \mathbb{R}$.	o Ja o Nein
20	$M = \mathbb{Q}$ und $Z = \mathbb{Q}$.	o Ja o Nein
21	$M = \mathbb{R}$ und $Z = \mathbb{R}$.	o Ja o Nein
30	$M = \mathbb{R}$ und $Z = \mathbb{Q}$.	o Ja o Nein
31	$M = \mathbb{Q}$ und $Z = \mathbb{R}$.	o Ja o Nein
40	$M = \{a \in \mathbb{R} \mid \text{es gibt ein } b \in \mathbb{R} \text{ mit } a = b^2\}$ und $Z = \mathbb{Q}$.	o Ja o Nein
41	$M = \{a \in \mathbb{R} \mid \text{es gibt ein } b \in \mathbb{R} \text{ mit } a = b^2\}$ und $Z = \mathbb{R}$.	o Ja o Nein
50	$M = \{a \in \mathbb{R} \mid \text{es gibt ein } b \in \mathbb{Q} \text{ mit } a = b^3\}$ und $Z = \mathbb{Q}$.	o Ja o Nein
51	$M = \{a \in \mathbb{R} \mid \text{es gibt ein } b \in \mathbb{R} \text{ mit } a = b^3\}$ und $Z = \mathbb{Q}$.	o Ja o Nein
52	$M = \{a \in \mathbb{R} \mid \text{es gibt ein } b \in \mathbb{R} \text{ mit } a = b^3\}$ und $Z = \mathbb{R}$.	o Ja o Nein

2	Welche der folgenden Mengen U sind Teilraum des jeweils angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorraums V? Dabei verwenden wir die folgende Notation: Für eine Matrix A bezeichnen wir mit a_{ij} den Eintrag in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von A.	
10	$U := \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ ist beschränkt}\} \subseteq V := \mathbb{R}^\mathbb{R}$	o Ja o Nein
11	$U := \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f(x) \leq 17 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subseteq V := \mathbb{R}^\mathbb{R}$	o Ja o Nein
20	$U := \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ ist monoton}\} \subseteq V := \mathbb{R}^\mathbb{R}$	o Ja o Nein
21	$U := \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ ist monoton steigend}\} \subseteq V := \mathbb{R}^\mathbb{R}$	o Ja o Nein
22	$U := \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ ist monoton fallend}\} \subseteq V := \mathbb{R}^\mathbb{R}$	o Ja o Nein
23	$U := \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ ist streng monoton steigend}\} \subseteq V := \mathbb{R}^\mathbb{R}$	o Ja o Nein
24	$U := \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ ist streng monoton fallend}\} \subseteq V := \mathbb{R}^\mathbb{R}$	o Ja o Nein
30	$U := \{A \in \mathbb{R}^{3\times 4} \mid a_{11} + a_{12} = 0\} \subseteq V := \mathbb{R}^{3\times 4}$	o Ja o Nein
31	$U := \{A \in \mathbb{R}^{3\times 4} \mid a_{11} + a_{12} = 1\} \subseteq V := \mathbb{R}^{3\times 4}$	o Ja o Nein
40	$U := \{A \in \mathbb{R}^{4\times 3} \mid a_{11} \cdot a_{22} = 0\} \subseteq V := \mathbb{R}^{4\times 3}$	o Ja o Nein
41	$U := \{A \in \mathbb{R}^{4\times 3} \mid a_{11}^2 + a_{22}^2 = 0\} \subseteq V := \mathbb{R}^{4\times 3}$	o Ja o Nein
50	$U := \emptyset \subseteq V := \mathbb{R}^{5\times 5}$	o Ja o Nein
51	$U := \langle () \rangle \subseteq V := \mathbb{R}^{5\times 5}$	o Ja o Nein
52	$U := \{\underline{0}\} \subseteq V := \mathbb{R}^{5\times 5}$	o Ja o Nein
53	$U := V \subseteq V := \mathbb{R}^{5\times 5}$	o Ja o Nein

3	V sei ein endlich erzeugbarer Vektorraum. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ seien linear unabhängige Folgen in V, und $\mathcal{C}$ sei ein Erzeugendensystem von V. Welche der folgenden Aussagen sind dann immer richtig?	
10	Die Folge $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ ist linear unabhängig.	o Ja o Nein
11	Die Folge $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ ist linear abhängig.	o Ja o Nein
12	Die Folge $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von V.	o Ja o Nein
13	Die Folge $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{C}$ ist linear unabhängig.	o Ja o Nein
14	Die Folge $\mathcal{B} \sqcup \mathcal{C}$ ist linear unabhängig.	o Ja o Nein
15	Ist $\mathcal{A} \neq ()$, dann ist die Folge $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{C}$ linear abhängig.	o Ja o Nein
16	Ist $\mathcal{B} \neq ()$, dann ist die Folge $\mathcal{B} \sqcup \mathcal{C}$ linear abhängig.	o Ja o Nein
17	Die Folge $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{C}$ ist eine Basis von V.	o Ja o Nein
18	Die Folge $\mathcal{B} \sqcup \mathcal{C}$ ist eine Basis von V.	o Ja o Nein
19	Die Folge $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{C}$ ist ein Erzeugendensystem von V.	o Ja o Nein
20	Die Folge $\mathcal{C}$ besitzt eine linear unabhängige Teilfolge.	o Ja o Nein
21	Die Folge $\mathcal{C}$ besitzt eine linear abhängige Teilfolge.	o Ja o Nein
22	Die Folge $\mathcal{C}$ besitzt eine Teilfolge, die eine Basis von V ist.	o Ja o Nein
30	Es gibt eine Basis von V, die die Folge $\mathcal{A}$ als Teilfolge enthält.	o Ja o Nein
31	Es gibt eine Basis von V, die die Folge $\mathcal{B}$ als Teilfolge enthält.	o Ja o Nein
32	Es gibt eine Basis von V, die die Folge $\mathcal{C}$ als Teilfolge enthält.	o Ja o Nein
33	Die Folge $\mathcal{C}$ lässt sich in V zu einer linear unabhängigen Folge ergänzen.	o Ja o Nein
40	Jede Teilfolge der Folge $\mathcal{A}$ ist linear unabhängig.	o Ja o Nein
41	Jede Teilfolge der Folge $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig.	o Ja o Nein
42	Jede Teilfolge der Folge $\mathcal{A}$ ist linear abhängig.	o Ja o Nein
43	Jede Teilfolge der Folge $\mathcal{B}$ ist linear abhängig.	o Ja o Nein
44	Jede Teilfolge der Folge $\mathcal{A}$ ist eine Basis von V.	o Ja o Nein
45	Jede Teilfolge der Folge $\mathcal{B}$ ist eine Basis von V.	o Ja o Nein
46	Jede Teilfolge der Folge $\mathcal{C}$ ist ein Erzeugendensystem von V.	o Ja o Nein
50	Jede Folge in V, die die Folge $\mathcal{A}$ als Teilfolge enthält, ist linear unabhängig.	o Ja o Nein
51	Jede Folge in V, die die Folge $\mathcal{B}$ als Teilfolge enthält, ist linear unabhängig.	o Ja o Nein
52	Jede Folge in V, die die Folge $\mathcal{A}$ als Teilfolge enthält, ist linear abhängig.	o Ja o Nein

53	Jede Folge in V, die die Folge $\mathcal{B}$ als Teilfolge enthält, ist linear abhängig.	o Ja o Nein
54	Jede Folge in V, die die Folge $\mathcal{C}$ als Teilfolge enthält, ist linear abhängig.	o Ja o Nein
55	Jede Folge in V, die die Folge $\mathcal{C}$ als Teilfolge enthält, ist ein Erzeugendensystem von V.	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

4	Es sei für $k \in \mathbb{N}$ jeweils $\mathbb{Q}^{k\times k}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum aller $k \times k$-Matrizen über $\mathbb{Q}$.	
10	Welche Dimension hat $\mathbb{Q}^{3\times 3}$?	9
11	Welche Dimension hat $\mathbb{Q}^{4\times 4}$?	16
20	Welche Dimension hat der Teilraum $\mathcal{D}$ der Diagonalmatrizen: $$\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^{3\times 3}?$$	3
21	Welche Dimension hat der Teilraum $\mathcal{D}$ der Diagonalmatrizen: $$\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^{4\times 4}?$$	4
30	Welche Dimension hat der Teilraum $\mathcal{S}$ aller symmetrischen Matrizen: $$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c, x, y, z \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^{3\times 3}?$$	6
31	Welche Dimension hat der Teilraum $\mathcal{S}$ aller symmetrischen Matrizen: $$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} a & x \\ x & b \end{bmatrix} \middle| a, b, x \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^{2\times 2}?$$	3
40	Welche Dimension hat der Teilraum $\mathcal{A}$ aller antisymmetrischen Matrizen: $$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & x & y \\ -x & b & z \\ -y & -z & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c, x, y, z \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^{3\times 3}?$$	6
41	Welche Dimension hat der Teilraum $\mathcal{A}$ aller antisymmetrischen Matrizen: $$\mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & x \\ -x & b \end{bmatrix} \middle| a, b, x \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^{2\times 2}?$$	3
50	Welche Dimension hat der Teilraum $\mathcal{O}$ aller oberen Dreiecksmatrizen: $$\mathcal{O} = \left\{ \begin{bmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c, x, y, z \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^{3\times 3}?$$	6
51	Welche Dimension hat der Teilraum $\mathcal{O}$ aller oberen Dreiecksmatrizen: $$\mathcal{O} = \left\{ \begin{bmatrix} a & x \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| a, b, x \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^{2\times 2}?$$	3

5 Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie den folgenden Satz: Der endlich erzeugte Vektorraum V habe die Dimension n. Für eine Folge $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_k)$ in V sind äquivalent:

(1) Die Folge $\mathcal{F}$ ist eine Basis von V.

(2) Die Folge $\mathcal{F}$ ist linear unabhängig, und es ist $k = n$.

(3) Die Folge $\mathcal{F}$ erzeugt V, und es ist $k = n$.

6 Im Vektorraum $\mathbb{R}^{1\times 4}$ seien die Folgen von Vektoren

$$\mathcal{E} = ([1,2,-1,-2], [2,3,1,1], [1,0,5,8], [2,1,-2,1], [0,5,3,-5], [-4,-3,7,3], [2,2,1,0], [1,1,0,1])$$

und

$$\mathcal{U} = ([2,-1,3,1], [4,-2,1,3])$$

gegeben. $\mathcal{E}$ ist eine erzeugende Folge von $\mathbb{R}^{1\times 4}$. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen.)

(a) Wenden Sie auf die Folge $\mathcal{E}$ den in der Vorlesung im Beweis des Verkürzungssatzes angegebenen Algorithmus an und verkürzen Sie damit $\mathcal{E}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^{1\times 4}$.

(b) Zeigen Sie: Die Folge $\mathcal{U}$ ist linear unabhängig.

(c) Wenden Sie auf die Folge $\mathcal{U}$ den in der Vorlesung im Beweis des Ergänzungssatzes angegebenen Algorithmus an und ergänzen Sie damit $\mathcal{U}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^{1\times 4}$. Benutzen Sie dabei als erzeugende Folge von $\mathbb{R}^{1\times 4}$ die Folge $\mathcal{E}$.

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt, oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!	
10	Die Abbildung $f = (x \mapsto x^2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist injektiv.	o Ja o Nein
11	Die Abbildung $f = (x \mapsto x^2) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv.	o Ja o Nein
20	Die Abbildung $f = (x \mapsto 2 \cdot x) : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
21	Die Abbildung $f = (x \mapsto 2 \cdot x) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
30	Die Abbildung $f = ((x, y) \mapsto x + y) : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
31	Die Abbildung $f = ((x, y) \mapsto x - y) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
40	Die Abbildung $f = (x \mapsto (x, -x)) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
41	Die Abbildung $f = (x \mapsto (x, -x)) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist injektiv.	o Ja o Nein
50	Die Abbildung $f = ((x, y) \mapsto (x + y, x - y)) : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
51	Die Abbildung $f = ((x, y) \mapsto (x+y, x-y)) : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ist injektiv.	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

2	Es seien A, B und C Mengen, $i_1 : A \to B$ und $i_2 : B \to C$ injektive Abbildungen, $s_1 : A \to B$ und $s_2 : B \to C$ surjektive, und $b_1 : A \to B$ und $b_2 : B \to C$ bijektive Abbildungen. Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage für alle solchen Abbildungen stimmt, oder "Nein", wenn nicht!	
10	Die Abbildung $i_2 \circ i_1$ ist injektiv.	o Ja o Nein
11	Die Abbildung $i_2 \circ i_1$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
12	Die Abbildung $i_2 \circ i_1$ ist bijektiv.	o Ja o Nein
20	Die Abbildung $s_2 \circ s_1$ ist injektiv.	o Ja o Nein
21	Die Abbildung $s_2 \circ s_1$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
22	Die Abbildung $s_2 \circ s_1$ ist bijektiv.	o Ja o Nein
30	Die Abbildung $b_2 \circ i_1$ ist injektiv.	o Ja o Nein
31	Die Abbildung $b_2 \circ i_1$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
32	Die Abbildung $i_2 \circ b_1$ ist injektiv.	o Ja o Nein
33	Die Abbildung $i_2 \circ b_1$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
40	Die Abbildung $b_2 \circ s_1$ ist injektiv.	o Ja o Nein
41	Die Abbildung $b_2 \circ s_1$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
42	Die Abbildung $s_2 \circ b_1$ ist injektiv.	o Ja o Nein
43	Die Abbildung $s_2 \circ b_1$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
50	Die Abbildung $s_2 \circ i_1$ ist injektiv.	o Ja o Nein
51	Die Abbildung $s_2 \circ i_1$ ist surjektiv.	o Ja o Nein
52	Die Abbildung $i_2 \circ s_1$ ist injektiv.	o Ja o Nein
53	Die Abbildung $i_2 \circ s_1$ ist surjektiv.	o Ja o Nein

3	Schreiben Sie jeweils den angegebenen Vektor als Linearkombination in der Basis $$\mathcal{B} := \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$ des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $V := \langle \mathcal{B} \rangle \subseteq \mathbb{Q}^{4\times 1}$ und beantworten Sie die folgenden Fragen über die Komponentenspalte.	
10	Wie lautet die 1. Komponente, wenn man $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ in der obigen Basis $\mathcal{B}$ linear kombiniert?	1
11	Wie lautet die 2. Komponente, wenn man $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ in der obigen Basis $\mathcal{B}$ linear kombiniert?	2
12	Wie lautet die 3. Komponente, wenn man $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ in der obigen Basis $\mathcal{B}$ linear kombiniert?	-3
20	Wie lautet die 1. Komponente, wenn man $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}$ in der obigen Basis $\mathcal{B}$ linear kombiniert?	2
21	Wie lautet die 2. Komponente, wenn man $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}$ in der obigen Basis $\mathcal{B}$ linear kombiniert?	-3
22	Wie lautet die 3. Komponente, wenn man $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix}$ in der obigen Basis $\mathcal{B}$ linear kombiniert?	-4
30	Wie lautet die 1. Komponente, wenn man $\begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$ in der obigen Basis $\mathcal{B}$ linear kombiniert?	-1

31	Wie lautet die 2. Komponente, wenn man $\begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$ in der obigen Basis $\mathcal{B}$ linear kombiniert?	-2
32	Wie lautet die 3. Komponente, wenn man $\begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix}$ in der obigen Basis $\mathcal{B}$ linear kombiniert?	1
40	Wie lautet die 1. Komponente, wenn man $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ in der obigen Basis $\mathcal{B}$ linear kombiniert?	0
41	Wie lautet die 2. Komponente, wenn man $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ in der obigen Basis $\mathcal{B}$ linear kombiniert?	-2
42	Wie lautet die 3. Komponente, wenn man $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ in der obigen Basis $\mathcal{B}$ linear kombiniert?	2
50	Wie lautet die 1. Komponente, wenn man $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in der obigen Basis $\mathcal{B}$ linear kombiniert?	1
51	Wie lautet die 2. Komponente, wenn man $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in der obigen Basis $\mathcal{B}$ linear kombiniert?	0
52	Wie lautet die 3. Komponente, wenn man $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ in der obigen Basis $\mathcal{B}$ linear kombiniert?	-1

4	Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir wieder mit $\mathbb{R}^n$ den Vektorraum aller Folgen $(a_1, ..., a_n)$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq n$.	
10	Ist die Folge $((1,0,1,0,1),(0,1,0,1,0),(0,0,1,0,1))$ eine kanonische Basis des von ihr erzeugten Teilraums von $\mathbb{R}^5$?	o Ja o Nein
11	Ist die Folge $((1,0,0,1,0),(0,1,0,0,1),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0))$ eine kanonische Basis des von ihr erzeugten Teilraums von $\mathbb{R}^5$?	o Ja o Nein
12	Ist die Folge $((1,2,3,4,5))$ eine kanonische Basis des von ihr erzeugten Teilraums von $\mathbb{R}^5$?	o Ja o Nein
13	Ist die Folge $((1,0,0,0,3),(0,1,0,4,0),(0,0,1,0,1))$ eine kanonische Basis des von ihr erzeugten Teilraums von $\mathbb{R}^5$?	o Ja o Nein
14	Ist die Folge $((1,0,-2,2,0),(0,1,2,1,0),(0,0,0,0,1))$ eine kanonische Basis des von ihr erzeugten Teilraums von $\mathbb{R}^5$?	o Ja o Nein
20	Gegeben seien Teilräume U_1 und U_2 von $\mathbb{R}^5$ durch ihre kanonischen Basen $\mathcal{B}_1 = ((1,0,0,1,0),(0,1,0,-3,0),(0,0,1,3,0),(0,0,0,0,1))$ bzw. $\mathcal{B}_2 = ((1,0,0,1,1),(0,1,1,0,3))$. Ist U_2 ein Teilraum von U_1?	o Ja o Nein
21	Gegeben seien Teilräume U_1 und U_2 von $\mathbb{R}^5$ durch ihre kanonischen Basen $\mathcal{B}_1 = ((1,0,0,1,0),(0,1,0,-3,0),(0,0,1,3,0),(0,0,0,0,1))$ bzw. $\mathcal{B}_2 = ((1,0,0,1,2),(0,1,1,0,2))$. Ist U_2 ein Teilraum von U_1?	o Ja o Nein
22	Gegeben seien Teilräume U_1 und U_2 von $\mathbb{R}^5$ durch ihre kanonischen Basen $\mathcal{B}_1 = ((1,0,0,1,0),(0,1,0,-3,0),(0,0,1,3,0),(0,0,0,0,1))$ bzw. $\mathcal{B}_2 = ((1,1,0,-2,-1),(0,0,1,3,2))$. Ist U_2 ein Teilraum von U_1?	o Ja o Nein
23	Gegeben seien Teilräume U_1 und U_2 von $\mathbb{R}^5$ durch ihre kanonischen Basen $\mathcal{B}_1 = ((1,0,0,1,0),(0,1,0,-3,0),(0,0,1,3,0),(0,0,0,0,1))$ bzw. $\mathcal{B}_2 = ((1,1,0,1,1),(0,0,1,3,2))$. Ist U_2 ein Teilraum von U_1?	o Ja o Nein
30	Sind die kanonischen Basen der Teilräume $T_1 = \langle(2,3,0,0,1),(2,1,-4,0,3),(1,-1,-5,2,1)\rangle$ und $T_2 = \langle(3,4,-1,0,2),(1,1,-1,0,1),(2,3,0,1,0)\rangle$ von $\mathbb{R}^5$ gleich?	o Ja o Nein
31	Sind die kanonischen Basen der Teilräume $$T_1 = \langle(2,3,0,0,1),(2,1,-4,0,3),(1,-1,-5,2,1)\rangle$$ und $$T_2 = \langle(3,2,-5,0,4),(2,-1,-8,0,5),(1,2,1,0,0)\rangle$$ von $\mathbb{R}^5$ gleich?	o Ja o Nein
32	Sind die kanonischen Basen der Teilräume $$T_1 = \langle(3,4,-1,0,2),(1,1,-1,0,1),(2,3,0,1,0)\rangle$$ und $$T_2 = \langle(3,2,-5,0,4),(2,-1,-8,0,5),(1,2,1,0,0)\rangle$$ von $\mathbb{R}^5$ gleich?	o Ja o Nein

33	Sind die kanonischen Basen der Teilräume $$T_1 = \langle (3,4,-1,0,2), (1,1,-1,0,1), (2,3,0,1,0) \rangle$$ und $$T_2 = \langle (3,2,-5,0,4), (2,-1,-8,3,2), (1,2,1,0,0) \rangle$$ von $\mathbb{R}^5$ gleich?	o Ja o Nein
40	Berechnen Sie die kanonische Basis $\mathcal{B}$ des Teilraums $$U = \langle (2,3,0,0,1), (2,1,-4,0,3), (1,-1,-5,2,1) \rangle$$ von $\mathbb{R}^5$ und geben Sie als Kontrollzahl die Summe der in den Basisvektoren vorkommenden Zahlen an.	n.a., evt.: o Ja o Nein 2
41	Berechnen Sie die kanonische Basis $\mathcal{B}$ des Teilraums $$U = \langle (2,3,2,0,3), (2,1,-2,0,5), (1,-1,-4,2,2) \rangle$$ von $\mathbb{R}^5$ und geben Sie als Kontrollzahl die Summe der in den Basisvektoren vorkommenden Zahlen an.	n.a., evt.: o Ja o Nein 4
42	Berechnen Sie die kanonische Basis $\mathcal{B}$ des Teilraums $$U = \langle (2,3,5,0,9), (2,1,-1,0,7), (1,-1,-5,2,0) \rangle$$ von $\mathbb{R}^5$ und geben Sie als Kontrollzahl die Summe der in den Basisvektoren vorkommenden Zahlen an.	n.a., evt.: o Ja o Nein 7
43	Berechnen Sie die kanonische Basis $\mathcal{B}$ des Teilraums $$U = \langle (2,3,2,0,9), (2,1,-2,0,7), (1,-1,-4,2,0) \rangle$$ von $\mathbb{R}^5$ und geben Sie als Kontrollzahl die Summe der in den Basisvektoren vorkommenden Zahlen an.	n.a., evt.: o Ja o Nein 6
44	Berechnen Sie die kanonische Basis $\mathcal{B}$ des Teilraums $$U = \langle (2,3,2,0,7), (2,1,-2,0,5), (1,-1,-4,2,-1) \rangle$$ von $\mathbb{R}^5$ und geben Sie als Kontrollzahl die Summe der in den Basisvektoren vorkommenden Zahlen an.	n.a., evt.: o Ja o Nein 6
50	Berechnen Sie die kanonische Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ des Teilraums $T = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ und } a+b = a-c = 0\}$ von $\mathbb{R}^4$ und geben Sie den Basisvektor b_1 an [mit den Klammern und ohne Leerzeichen; Beispiel: $(0,1,-5,0)$].	n.a., evt.: o Ja o Nein (1,-1,1,0)
51	Berechnen Sie die kanonische Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ des Teilraums $T = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ und } a-b = a-c = 0\}$ von $\mathbb{R}^4$ und geben Sie den Basisvektor b_1 an [mit den Klammern und ohne Leerzeichen; Beispiel: $(0,1,-5,0)$].	n.a., evt.: o Ja o Nein (1,1,1,0)

52	Berechnen Sie die kanonische Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ des Teilraums $T = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}$ und $a+b = a+c = 0\}$ von $\mathbb{R}^4$ und geben Sie den Basisvektor b_1 an [mit den Klammern und ohne Leerzeichen; Beispiel: $(0,1,-5,0)$].	n.a., evt.: o Ja o Nein (1,-1,-1-,0)
53	Berechnen Sie die kanonische Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ des Teilraums $T = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}$ und $a-b = a+c = 0\}$ von $\mathbb{R}^4$ und geben Sie den Basisvektor b_1 an [mit den Klammern und ohne Leerzeichen; Beispiel: $(0,1,-5,0)$].	n.a., evt.: o Ja o Nein (1,1,-1,0)

5 Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen den Mengen M und N. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) f ist genau dann bijektiv, wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$ und $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

(b) f ist genau dann injektiv, wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

(c) Wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert mit $f \circ g = \mathrm{id}_N$, dann ist f surjektiv.

Beantworten Sie die folgenden Fragen jeweils für den Fall, dass die angegebene Abbildung g existiert:

(d) Ist die Abbildung g aus (a) immer eindeutig bestimmt?

(e) Ist die Abbildung g aus (b) immer eindeutig bestimmt?

(f) Ist die Abbildung g aus (c) immer eindeutig bestimmt?

6 Es sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein Teilraum des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ der Folgen $(f_1, ..., f_n)$ mit $f_j \in \mathbb{R}$. Weiter seien Erzeugendensysteme $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_s)$ und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_t)$ von V gegeben mit $v_i = (v_{i1}, \ldots, v_{in})$ für $1 \leq i \leq s$ und $w_i = (w_{i1}, \ldots, w_{in})$ für $1 \leq i \leq t$. Schließlich nehmen wir an, dass es Zahlen $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{N}$ und $b_1, \ldots, b_t \in \mathbb{N}$ gibt, so dass:

(1) $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_s \leq n$,

(2) $v_{ij} = 0$ für alle Paare (i, j) mit $1 \leq i \leq s$ und $1 \leq j < a_i$,

(3) $v_{ia_j} = \delta_{ij}$ für alle Paare (i, j) mit $1 \leq i \leq s$ und $1 \leq j \leq s$,

(4) $1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_t \leq n$,

(5) $w_{ij} = 0$ für alle Paare (i, j) mit $1 \leq i \leq t$ und $1 \leq j < b_i$,

(6) $w_{ib_j} = \delta_{ij}$ für alle Paare (i, j) mit $1 \leq i \leq t$ und $1 \leq j \leq t$.

Dabei ist $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$.

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind Basen von V.

(b) Es ist $s = t$.

(c) Es ist $a_i = b_i$ für $1 \leq i \leq s$.

(d) Es ist $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Hinweis: Schreiben Sie sich die beiden Erzeugendensysteme $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zunächst einmal in Matrixform hin. Die Bedingungen (1) bis (6) bedeuten nichts Anderes, als dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ kanonische Basen von V sind, wobei die a_i bzw. b_j die Stufenindizes sind. Hier soll also die Eindeutigkeit der kanonischen Basis von V gezeigt werden.

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Ist A eine Matrix, so bezeichnen wir in dieser Aufgabe ihren Rang mit r. Die Abkürzungen Zr und Spr bedeuten Zeilenraum und Spaltenraum. E bezeichnet jeweils eine Einheitsmatrix (mit geeignetem Rang). Gelten die folgenden Aussagen für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$?	
10	Ist $r = m$, so ist $A^\perp = \{\underline{0}\}$.	o Ja o **Nein**
11	Ist $r = n$, so ist $A^\perp = \{\underline{0}\}$.	o **Ja** o Nein
12	Ist $r = m = n$, so ist $A^\perp = \{\underline{0}\}$.	o **Ja** o Nein
13	Ist $r = m$, so ist ${}^\perp A = \{\underline{0}\}$.	o **Ja** o Nein
14	Ist $r = n$, so ist ${}^\perp A = \{\underline{0}\}$.	o Ja o **Nein**
15	Ist $r = m = n$, so ist ${}^\perp A = \{\underline{0}\}$.	o **Ja** o Nein
20	Zu jedem $b \in \mathbb{Q}^{m \times 1}$ gibt es ein $x \in \mathbb{Q}^{n \times 1}$ mit $Ax = b$.	o Ja o **Nein**
21	Zu jedem $b \in \mathbb{Q}^{m \times 1}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{Q}^{n \times 1}$ mit $Ax = b$.	o Ja o **Nein**
22	Zu jedem $c \in \mathbb{Q}^{1 \times n}$ gibt es ein $y \in \mathbb{Q}^{1 \times m}$ mit $yA = c$.	o Ja o **Nein**
23	Zu jedem $c \in \mathbb{Q}^{1 \times n}$ gibt es genau ein $y \in \mathbb{Q}^{1 \times m}$ mit $yA = c$.	o Ja o **Nein**
30	Ist $r < m$, so existiert kein $Y \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ mit $YA = E \in \mathbb{Q}^{n \times n}$.	o Ja o **Nein**
31	Ist $r < n$, so existiert kein $Y \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ mit $YA = E \in \mathbb{Q}^{n \times n}$.	o **Ja** o Nein
32	Ist $r < m$, so existiert kein $X \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ mit $AX = E \in \mathbb{Q}^{m \times m}$.	o **Ja** o Nein
33	Ist $r < n$, so existiert kein $X \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ mit $AX = E \in \mathbb{Q}^{m \times m}$.	o **Ja** o Nein
40	Ist $r = m < n$, so existiert ein $X \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ mit $AX = E \in \mathbb{Q}^{m \times m}$	o **Ja** o Nein
41	Ist $r = n < m$, so existiert ein $X \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ mit $AX = E \in \mathbb{Q}^{m \times m}$	o Ja o **Nein**
42	Ist $r = m < n$, so existiert ein $Y \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ mit $YA = E \in \mathbb{Q}^{n \times n}$	o Ja o **Nein**
43	Ist $r = n < m$, so existiert ein $Y \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ mit $YA = E \in \mathbb{Q}^{n \times n}$	o **Ja** o Nein
50	$\dim A^\perp + \dim \operatorname{Spr} A = n$.	o **Ja** o Nein
51	$\dim A^\perp + \dim \operatorname{Zr} A = n$.	o **Ja** o Nein
52	$\dim A^\perp + \dim \operatorname{Spr} A = m$.	o Ja o **Nein**
53	$\dim A^\perp + \dim \operatorname{Zr} A = m$.	o Ja o **Nein**
54	$\dim {}^\perp A + \dim \operatorname{Spr} A = n$.	o Ja o **Nein**
55	$\dim {}^\perp A + \dim \operatorname{Zr} A = n$.	o **Ja** o Nein
56	$\dim {}^\perp A + \dim \operatorname{Spr} A = m$.	o **Ja** o Nein
57	$\dim {}^\perp A + \dim \operatorname{Zr} A = m$.	o Ja o **Nein**

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

2	Für diese Aufgabe legen wir folgende Bezeichnungen fest: Ist A eine Matrix, so bezeichnet A^* ihre Hermite-Normalform und r ihren Rang. Die Abkürzungen Zr und Spr heißen Zeilenraum und Spaltenraum. Gelten die folgenden Aussagen für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$?	
10	$\dim \mathrm{Spr}\, A \leq m$.	o Ja o Nein
11	$\dim \mathrm{Zr}\, A \leq n$.	o Ja o Nein
12	$\dim \mathrm{Spr}\, A \leq n$.	o Ja o Nein
13	$\dim \mathrm{Zr}\, A \leq m$.	o Ja o Nein
20	$\dim A^\perp \leq m$.	o Ja o Nein
21	$\dim A^\perp \leq n$.	o Ja o Nein
22	$\dim {}^\perp A \leq m$.	o Ja o Nein
23	$\dim {}^\perp A \leq n$.	o Ja o Nein
30	$\mathrm{Zr}\, A = \mathrm{Zr}\, A^*$.	o Ja o Nein
31	$\mathrm{Spr}\, A = \mathrm{Spr}\, A^*$.	o Ja o Nein
40	Die „blauen“ Spalten von A erzeugen $\mathrm{Spr}\, A$.	o Ja o Nein
41	Die „blauen“ Spalten von A^* erzeugen $\mathrm{Spr}\, A^*$.	o Ja o Nein
42	Die „blauen“ Spalten von A erzeugen $\mathrm{Spr}\, A^*$.	o Ja o Nein
43	Die „blauen“ Spalten von A^* erzeugen $\mathrm{Spr}\, A$.	o Ja o Nein
50	Die ersten r Zeilen von A erzeugen $\mathrm{Zr}\, A$.	o Ja o Nein
51	Die ersten r Zeilen von A^* erzeugen $\mathrm{Zr}\, A^*$.	o Ja o Nein
52	Die ersten r Spalten von A erzeugen $\mathrm{Spr}\, A$.	o Ja o Nein
53	Die ersten r Spalten von A^* erzeugen $\mathrm{Spr}\, A^*$.	o Ja o Nein

<table>
<tr><td>3</td><td colspan="2">In dieser Aufgabe bezeichnen wir für einen Teilraum $T \le \mathbb{Q}^{1\times k}$, $k \in \mathbb{N}$, mit $H(T)$ die Hermite-Normalform M^* der Matrix M, deren Zeilen gerade die Basisvektoren einer Basis von T sind. Wo Sie als Ergebnis eine Zeile einer Matrix angeben sollen, schreiben Sie diese als Zeilenvektor (mit den eckigen Klammern und ohne Leerzeichen; Beispiel: [0,1,−5,0]).</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Ist die Aussage „Wenn für Matrizen A, B, C die Matrixprodukte AB, BC und AC definiert sind, dann ist mindestens eine der Matrizen A, B, C quadratisch [das heißt, sie hat gleich viele Zeilen und Spalten]." richtig?</td><td>o Ja o Nein</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Ist die Aussage „Wenn für Matrizen A, B, C die Matrixprodukte AB, BC und CA definiert sind, dann ist mindestens eine der Matrizen A, B, C quadratisch [das heißt, sie hat gleich viele Zeilen und Spalten]." richtig?</td><td>o Ja o Nein</td></tr>
<tr><td>12</td><td>Ist die Aussage „Wenn für Matrizen A, B, C die Matrixprodukte AB, CB und AC definiert sind, dann ist mindestens eine der Matrizen A, B, C quadratisch [das heißt, sie hat gleich viele Zeilen und Spalten]." richtig?</td><td>o Ja o Nein</td></tr>
<tr><td>13</td><td>Ist die Aussage „Wenn für Matrizen A, B, C die Matrixprodukte AB, CB und CA definiert sind, dann ist mindestens eine der Matrizen A, B, C quadratisch [das heißt, sie hat gleich viele Zeilen und Spalten]." richtig?</td><td>o Ja o Nein</td></tr>
<tr><td>14</td><td>Ist die Aussage „Wenn für Matrizen A, B, C die Matrixprodukte BA, BC und AC definiert sind, dann ist mindestens eine der Matrizen A, B, C quadratisch [das heißt, sie hat gleich viele Zeilen und Spalten]." richtig?</td><td>o Ja o Nein</td></tr>
<tr><td>15</td><td>Ist die Aussage „Wenn für Matrizen A, B, C die Matrixprodukte BA, BC und CA definiert sind, dann ist mindestens eine der Matrizen A, B, C quadratisch [das heißt, sie hat gleich viele Zeilen und Spalten]." richtig?</td><td>o Ja o Nein</td></tr>
<tr><td>16</td><td>Ist die Aussage „Wenn für Matrizen A, B, C die Matrixprodukte BA, CB und AC definiert sind, dann ist mindestens eine der Matrizen A, B, C quadratisch [das heißt, sie hat gleich viele Zeilen und Spalten]." richtig?</td><td>o Ja o Nein</td></tr>
<tr><td>17</td><td>Ist die Aussage „Wenn für Matrizen A, B, C die Matrixprodukte BA, CB und CA definiert sind, dann ist mindestens eine der Matrizen A, B, C quadratisch [das heißt, sie hat gleich viele Zeilen und Spalten]." richtig?</td><td>o Ja o Nein</td></tr>
<tr><td>20</td><td>Invertieren Sie die Matrix $P = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ und geben Sie als Kontrollzahl die Zahl an, die in der rechten unteren Ecke von P^{-1} steht.</td><td>n.a., evt.: o Ja o Nein
0</td></tr>
</table>

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

21	Invertieren Sie die Matrix $P = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ und geben Sie als Kontrollzahl die Zahl an, die in der rechten unteren Ecke von P^{-1} steht.	n.a., evt.: o Ja o Nein -1
22	Invertieren Sie die Matrix $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ und geben Sie als Kontrollzahl die Zahl an, die in der rechten unteren Ecke von P^{-1} steht.	n.a., evt.: o Ja o Nein -3
23	Invertieren Sie die Matrix $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ und geben Sie als Kontrollzahl die Zahl an, die in der rechten unteren Ecke von P^{-1} steht.	n.a., evt.: o Ja o Nein 3
30	Berechnen Sie die Hermite-Normalform N der Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ und geben Sie als Kontrollzahl die Zahl an, die in der rechten oberen Ecke von N steht.	n.a., evt.: o Ja o Nein -2
31	Berechnen Sie die Hermite-Normalform N der Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ und geben Sie als Kontrollzahl die Zahl an, die in der rechten oberen Ecke von N steht.	n.a., evt.: o Ja o Nein 5
32	Berechnen Sie die Hermite-Normalform N der Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ und geben Sie als Kontrollzahl die Zahl an, die in der rechten oberen Ecke von N steht.	n.a., evt.: o Ja o Nein -4
33	Berechnen Sie die Hermite-Normalform N der Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ und geben Sie als Kontrollzahl die Zahl an, die in der rechten oberen Ecke von N steht.	n.a., evt.: o Ja o Nein 0
40	Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix $H({}^{\perp}A)$ und geben Sie ihre erste Zeile an.	n.a., evt.: o Ja o Nein [1,2,-3]

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

41	Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix $H({}^{\perp}A)$ und geben Sie ihre erste Zeile an.	n.a., evt.: o Ja o Nein
42	Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix $H({}^{\perp}A)$ und geben Sie ihre erste Zeile an.	n.a., evt.: o Ja o Nein [1,-3,2]
43	Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix $H({}^{\perp}A)$ und geben Sie ihre erste Zeile an.	n.a., evt.: o Ja o Nein [1,1,-2]
50	Es sei $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix $H((B^{\perp})^{tr})$ und geben Sie ihre erste Zeile an.	n.a., evt.: o Ja o Nein [1,0,1,-2]
51	Es sei $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix $H((B^{\perp})^{tr})$ und geben Sie ihre erste Zeile an.	n.a., evt.: o Ja o Nein
52	Es sei $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix $H((B^{\perp})^{tr})$ und geben Sie ihre erste Zeile an.	n.a., evt.: o Ja o Nein [1,0,-1,1]
53	Es sei $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix $H((B^{\perp})^{tr})$ und geben Sie ihre erste Zeile an.	n.a., evt.: o Ja o Nein

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

4	Berechnen Sie die Dimensionen der folgenden $\mathbb{Q}$-Vektorräume.	
10	$\dim\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}^{\perp}\right)$	1
11	$\dim\left({}^{\perp}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\right)$	1
20	$\dim\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & -8 \end{bmatrix}^{\perp}\right)$	2
21	$\dim\left({}^{\perp}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -4 & -8 \end{bmatrix}\right)$	0
30	$\dim\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}^{\perp}\right)$	1
31	$\dim\left({}^{\perp}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}\right)$	1
40	$\dim\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{\perp}\right)$	1
41	$\dim\left({}^{\perp}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right)$	1
50	$\dim\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\perp}\right)$	3
51	$\dim\left({}^{\perp}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$	

5 (Durchschnitt und Summe von Teilvektorräumen)
Der $\mathbb{Q}$-Vektorraum V habe die Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_5)$. Der Teilvektorraum S von V werde von der Folge $\mathcal{S} = (s_1, s_2, s_3)$ der Vektoren

$$\begin{aligned} s_1 &= b_1\,1 + b_2\,2 - b_3\,2 + b_4\,1 + b_5\,0 \\ s_2 &= b_1\,2 + b_2\,5 - b_3\,2 + b_4\,2 + b_5\,0 \\ s_3 &= b_1\,2 + b_2\,4 - b_3\,3 + b_4\,4 + b_5\,1 \end{aligned}$$

erzeugt, der Teilvektorraum T von der Folge $\mathcal{T} = (t_1, t_2, t_3)$ der Vektoren

$$\begin{aligned} t_1 &= b_1\,1 + b_2\,3 + b_3\,1 + b_4\,0 - b_5\,1 \\ t_2 &= b_1\,1 + b_2\,3 + b_3\,2 + b_4\,2 + b_5\,0 \\ t_3 &= b_1\,1 + b_2\,3 + b_3\,2 - b_4\,1 - b_5\,2. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie eine Basis $\mathcal{D} = (d_1, \ldots, d_k)$ von $S \cap T$. (Wie groß ist k?)

(b) Ergänzen Sie $\mathcal{D}$ durch eine Teilfolge $\mathcal{S}'$ von $\mathcal{S}$ zu einer Basis $\mathcal{D} \sqcup \mathcal{S}'$ von S. Ergänzen Sie analog $\mathcal{D}$ durch eine Teilfolge $\mathcal{T}'$ von $\mathcal{T}$ zu einer Basis $\mathcal{D} \sqcup \mathcal{T}'$ von T. Ist $\mathcal{D} \sqcup \mathcal{S}' \sqcup \mathcal{T}'$ eine Basis von $S + T$?

(c) Ergänzen Sie $\mathcal{D} \sqcup \mathcal{S}'$ durch eine Teilfolge $\mathcal{T}''$ von $\mathcal{T}$ zu einer Basis von $S + T$. Ist $\mathcal{D} \sqcup \mathcal{T}''$ eine Basis von T? Geht das für jede solche Wahl von $\mathcal{T}''$?

6 Es sei $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und r der Rang von A. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen für alle solchen A richtig sind. Mit E ist jeweils die Einheitsmatrix gemeint.

(a) Ist $r < n$, so existiert kein $Y \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ mit $YA = E \in \mathbb{Q}^{n \times n}$.

(b) Ist $r < m$, so existiert kein $Y \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ mit $YA = E \in \mathbb{Q}^{n \times n}$.

(c) Ist $r = m$, so existiert ein $X \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ mit $AX = E \in \mathbb{Q}^{m \times m}$.

(d) Ist $r = n$, so existiert ein $X \in \mathbb{Q}^{n \times m}$ mit $AX = E \in \mathbb{Q}^{m \times m}$.

Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel oder einen Beweis an!

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Es sei $\underline{m}$ für $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$ jeweils der in der Vorlesung definierte Ring mit den Elementen $$\underline{m} = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}.$$ Berechnen Sie jeweils das (multiplikative) Inverse des angegebenen Elements oder beantworten Sie die Frage.		
10	Was ist das Inverse von 13 in $\underline{101}$?	70	n.a., evt.: o Ja o Nein
11	Was ist das Inverse von 71 in $\underline{101}$?	37	n.a., evt.: o Ja o Nein
12	Was ist das Inverse von 49 in $\underline{101}$?	33	n.a., evt.: o Ja o Nein
13	Was ist das Inverse von 97 in $\underline{101}$?	25	n.a., evt.: o Ja o Nein
20	Was ist das Inverse von 13 in $\underline{210}$?	97	n.a., evt.: o Ja o Nein
21	Was ist das Inverse von 71 in $\underline{210}$?	71	n.a., evt.: o Ja o Nein
22	Was ist das Inverse von 97 in $\underline{210}$?	13	n.a., evt.: o Ja o Nein
30	Was ist das Inverse von 100 in $\underline{552911}$?	49762	n.a., evt.: o Ja o Nein
31	Was ist das Inverse von 101 in $\underline{552911}$?	164231	n.a., evt.: o Ja o Nein
32	Was ist das Inverse von 102 in $\underline{552911}$?	428235	n.a., evt.: o Ja o Nein
33	Was ist das Inverse von 103 in $\underline{552911}$?	236195	n.a., evt.: o Ja o Nein
40	Welches der folgenden Elemente ist in $\underline{230299}$ invertierbar?		o 143 o 187 o 221
41	Welches der folgenden Elemente ist in $\underline{176111}$ invertierbar?		o 143 o 187 o 221
42	Welches der folgenden Elemente ist in $\underline{149017}$ invertierbar?		o 143 o 187 o 221
50	Was ist 241^{41} in $\underline{257}$?	241	n.a., evt.: o Ja o Nein
51	Was ist 241^{42} in $\underline{257}$?	256	n.a., evt.: o Ja o Nein
52	Was ist 241^{43} in $\underline{257}$?	16	n.a., evt.: o Ja o Nein

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

2	Prüfen Sie jeweils, ob es Matizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mit $\operatorname{Rang} A \neq 0$ und $\operatorname{Rang} B \neq 0$ gibt, die die folgenden Eigenschaften haben.	
10	$\operatorname{Rang}(A+B) < \operatorname{Rang} A$ und $\operatorname{Rang}(A+B) < \operatorname{Rang} B$.	o Ja o Nein
11	$\operatorname{Rang}(A+B) < \operatorname{Rang} A$ und $\operatorname{Rang}(A+B) = \operatorname{Rang} B$.	o Ja o Nein
12	$\operatorname{Rang}(A+B) < \operatorname{Rang} A$ und $\operatorname{Rang}(A+B) > \operatorname{Rang} B$.	o Ja o Nein
13	$\operatorname{Rang}(A+B) = \operatorname{Rang} A$ und $\operatorname{Rang}(A+B) < \operatorname{Rang} B$.	o Ja o Nein
14	$\operatorname{Rang}(A+B) = \operatorname{Rang} A$ und $\operatorname{Rang}(A+B) = \operatorname{Rang} B$.	o Ja o Nein
15	$\operatorname{Rang}(A+B) = \operatorname{Rang} A$ und $\operatorname{Rang}(A+B) > \operatorname{Rang} B$.	o Ja o Nein
16	$\operatorname{Rang}(A+B) > \operatorname{Rang} A$ und $\operatorname{Rang}(A+B) < \operatorname{Rang} B$.	o Ja o Nein
17	$\operatorname{Rang}(A+B) > \operatorname{Rang} A$ und $\operatorname{Rang}(A+B) = \operatorname{Rang} B$.	o Ja o Nein
18	$\operatorname{Rang}(A+B) > \operatorname{Rang} A$ und $\operatorname{Rang}(A+B) > \operatorname{Rang} B$.	o Ja o Nein
20	$\operatorname{Rang}(A+B) = \operatorname{Rang}(A-B)$.	o Ja o Nein
21	$\operatorname{Rang}(A+B) = 2 \cdot \operatorname{Rang}(A-B)$.	o Ja o Nein
22	$\operatorname{Rang}(A+B) = 3 \cdot \operatorname{Rang}(A-B)$.	o Ja o Nein
23	$\operatorname{Rang}(A-B) = 2 \cdot \operatorname{Rang}(A+B)$.	o Ja o Nein
24	$\operatorname{Rang}(A-B) = 3 \cdot \operatorname{Rang}(A+B)$.	o Ja o Nein
30	$\operatorname{Rang}(A+B) < \operatorname{Rang} A + \operatorname{Rang} B$.	o Ja o Nein
31	$\operatorname{Rang}(A+B) > \operatorname{Rang} A + \operatorname{Rang} B$.	o Ja o Nein
32	$\operatorname{Rang}(A-B) < \operatorname{Rang} A + \operatorname{Rang} B$.	o Ja o Nein
33	$\operatorname{Rang}(A-B) > \operatorname{Rang} A + \operatorname{Rang} B$.	o Ja o Nein
40	$\operatorname{Rang}(A+B) = 0$.	o Ja o Nein
41	$\operatorname{Rang}(A-B) = 0$.	o Ja o Nein
42	$\operatorname{Rang} A \neq \operatorname{Rang} B$ und $\operatorname{Rang}(A+B) = 0$.	o Ja o Nein
43	$\operatorname{Rang} A \neq \operatorname{Rang} B$ und $\operatorname{Rang}(A-B) = 0$.	o Ja o Nein
50	$\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} B = 1$ und $\operatorname{Rang}(A \cdot B^{tr}) = 0$.	o Ja o Nein
51	$\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} B = 1$ und $\operatorname{Rang}(A^{tr} \cdot B) = 0$.	o Ja o Nein
52	$\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} B = 2$ und $\operatorname{Rang}(A \cdot B^{tr}) = 0$.	o Ja o Nein
53	$\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} B = 2$ und $\operatorname{Rang}(A^{tr} \cdot B) = 0$.	o Ja o Nein

3	Für verschiedene Primzahlen p betrachten wir jeweils den Körper $K = \underline{p}$ mit p Elementen sowie die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ und die Einheitsmatrix E aus $K^{4\times 4}$. Außerdem benutzen wir folgende Schreibweise: Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist a eine Zahl aus K oder eine Matrix über K, so schreiben wir für $\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n}$ einfach $n \cdot a$ oder na.		
10	Berechnen Sie $\mathrm{Rang}(A+E)$ über dem Körper $K = \underline{2}$.	2	n.a., evt.: o Ja o Nein
11	Berechnen Sie $\mathrm{Rang}(A+E)$ über dem Körper $K = \underline{3}$.	3	n.a., evt.: o Ja o Nein
12	Berechnen Sie $\mathrm{Rang}(A+E)$ über dem Körper $K = \underline{5}$.	7	n.a., evt.: o Ja o Nein
13	Berechnen Sie $\mathrm{Rang}(2A-E)$ über dem Körper $K = \underline{3}$.	3	n.a., evt.: o Ja o Nein
14	Berechnen Sie $\mathrm{Rang}(2A-E)$ über dem Körper $K = \underline{5}$.	3	n.a., evt.: o Ja o Nein
15	Berechnen Sie $\mathrm{Rang}(2A-E)$ über dem Körper $K = \underline{5}$.	(doppelt: s. 15)	~~n.a., evt.: o Ja o Nein~~
20	Berechnen Sie $\dim({}^{\perp}(3A))$ über dem Körper $K = \underline{2}$.	1	n.a., evt.: o Ja o Nein
21	Berechnen Sie $\dim({}^{\perp}(2A))$ über dem Körper $K = \underline{3}$.	1	n.a., evt.: o Ja o Nein
22	Berechnen Sie $\dim({}^{\perp}(2A+E))$ über dem Körper $K = \underline{3}$.	1	n.a., evt.: o Ja o Nein
23	Ist die Matrix $3A + 2E$ über dem Körper $K = \underline{5}$ invertierbar?	(dop.: s. 43)	~~n.a., evt.: o Ja o Nein~~
30	Berechnen Sie $\dim((A+2E)^{\perp})$ über dem Körper $K = \underline{11}$.	1	n.a., evt.: o Ja o Nein
31	Berechnen Sie $\dim((2A+3E)^{\perp})$ über dem Körper $K = \underline{11}$.	0	n.a., evt.: o Ja o Nein
32	Berechnen Sie $\dim((2A+E)^{\perp})$ über dem Körper $K = \underline{11}$.	0	n.a., evt.: o Ja o Nein
33	Berechnen Sie $\dim((A+2E)^{\perp})$ über dem Körper $K = \underline{7}$.		n.a., evt.: o Ja o Nein
34	Berechnen Sie $\dim((2A+3E)^{\perp})$ über dem Körper $K = \underline{7}$.		n.a., evt.: o Ja o Nein
40	Ist die Matrix $2A + 3E$ über dem Körper $K = \underline{5}$ invertierbar?		o Ja o Nein
41	Ist die Matrix $3A - E$ über dem Körper $K = \underline{5}$ invertierbar?		o Ja o Nein
42	Ist die Matrix $3A + E$ über dem Körper $K = \underline{5}$ invertierbar?		o Ja o Nein
43	Ist die Matrix $3A + 2E$ über dem Körper $K = \underline{5}$ invertierbar?		o Ja o Nein
50	Es sei $p = 7$ und $\underline{7} = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ der in der Vorlesung definierte Körper mit 7 Elementen. Welches ist der größte Rang, den eine Matrix $M \in \underline{7}^{8\times 8}$ haben kann?		n.a., evt.: o Ja o Nein 8
51	Es sei $p = 7$ und $\underline{7} = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ der in der Vorlesung definierte Körper mit 7 Elementen. Welches ist der größte Rang, den eine Matrix $M \in \underline{7}^{8\times 9}$ haben kann?		n.a., evt.: o Ja o Nein 8

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

52	Es sei $p = 7$ und $\underline{7} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ der in der Vorlesung definierte Körper mit 7 Elementen. Welches ist der größte Rang, den eine Matrix $M \in \underline{7}^{9\times 8}$ haben kann?	n.a., evt.: o Ja o Nein 8
53	Es sei $p = 7$ und $\underline{7} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ der in der Vorlesung definierte Körper mit 7 Elementen. Welches ist der größte Rang, den eine Matrix $M \in \underline{7}^{9\times 9}$ haben kann?	n.a., evt.: o Ja o Nein 9

4	Es sei $\underline{p}$ für Primzahlen $p \in \mathbb{N}$ jeweils der in der Vorlesung definierte Körper mit den Elementen $$\underline{p} = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}.$$ Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen.	
10	Wie viele Elemente hat der Spaltenraum $\underline{2}^{4\times 1}$?	16
11	Wie viele Elemente hat der Spaltenraum $\underline{3}^{3\times 1}$?	27
12	Wie viele Elemente hat der Spaltenraum $\underline{5}^{2\times 1}$?	25
13	Wie viele Elemente hat der Spaltenraum $\underline{7}^{2\times 1}$?	49
20	Wie viele Elemente hat die Menge $\underline{2}^{3\times 4}$ von Matrizen?	4096
21	Wie viele Elemente hat die Menge $\underline{3}^{3\times 2}$ von Matrizen?	729
22	Wie viele Elemente hat die Menge $\underline{5}^{2\times 2}$ von Matrizen?	625
30	Wie viele Elemente hat der Rechts-Orthogonalraum $M^\perp$ einer Matrix $M \in \underline{2}^{3\times 4}$ vom Rang 2?	4
31	Wie viele Elemente hat der Rechts-Orthogonalraum $M^\perp$ einer Matrix $M \in \underline{3}^{3\times 4}$ vom Rang 2?	9
32	Wie viele Elemente hat der Rechts-Orthogonalraum $M^\perp$ einer Matrix $M \in \underline{5}^{3\times 4}$ vom Rang 2?	25
33	Wie viele Elemente hat der Rechts-Orthogonalraum $M^\perp$ einer Matrix $M \in \underline{7}^{3\times 4}$ vom Rang 2?	49
40	Wieviele Lösungen hat ein homogenes lineares Gleichungssystem $Mx = 0$, wenn $M \in \underline{2}^{7\times 9}$ liegt und die Matrix M den Rang 6 hat?	8
41	Wieviele Lösungen hat ein homogenes lineares Gleichungssystem $Mx = 0$, wenn $M \in \underline{3}^{7\times 9}$ liegt und die Matrix M den Rang 6 hat?	27
42	Wieviele Lösungen hat ein homogenes lineares Gleichungssystem $Mx = 0$, wenn $M \in \underline{5}^{7\times 9}$ liegt und die Matrix M den Rang 6 hat?	125
50	Wieviele Elemente hat ein 3-dimensionaler Teilraum des Spaltenraums $\underline{2}^{1234\times 1}$?	8
51	Wieviele Elemente hat ein 3-dimensionaler Teilraum des Spaltenraums $\underline{3}^{1234\times 1}$?	27
52	Wieviele Elemente hat ein 3-dimensionaler Teilraum des Spaltenraums $\underline{5}^{1234\times 1}$?	125

5 Es sei $\underline{5} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ der Körper mit 5 Elementen aus der Vorlesung und M die folgende Matrix:

$$M := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \underline{5}^{4\times 5} .$$

(a) Berechnen Sie die Hermitesche Normalform von M.

(b) Schreiben Sie die Zeilen von M als Folgen und berechnen Sie die kanonische Basis des von diesen Folgen erzeugten Teilraums von $\underline{5}^5$.

(c) Welchen Rang hat M?

(d) Geben Sie eine Basis von $M^\perp$ an.

(e) Geben Sie eine Basis von ${}^\perp M$ an.

(f) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$Mx = 0 \in \underline{5}^{4\times 1}$$

als Teilraum von $\underline{5}^{5\times 1}$.

(g) Wie viele Lösungen hat dieses Gleichungssystem?

Beweisen Sie alle Ihre Behauptung und dokumentieren Sie alle Rechnungen genau.

6 In dieser Aufgabe soll ein Körper mit Operationen $\oplus$, ⓝ, $\ominus$, $\odot$ und ⓔ konstruiert werden, der den Körper $\underline{2} = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen als Teilkörper enthält und in dem es ein Element α gibt mit $(\alpha \odot \alpha) \oplus \alpha \oplus 1 = 0$.

(a) **Analyse:** Nehmen Sie an, Sie hätten einen solchen Körper L. Betrachten Sie darin die Menge

$$K := \{(s \odot 1) \oplus (t \odot \alpha) \in L \mid s, t \in \underline{2}\}.$$

Ist das Produkt zweier Elemente aus K wieder in K? Wie müsste dann die Multiplikationsvorschrift für Elemente in K lauten?

(b) **Konstruktion:** Um die Elemente $(s\odot 1)\oplus(t\odot\alpha)$ kürzer zu bezeichnen, liegt es nahe, sie durch Spalten $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ zu beschreiben. Definieren Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus (a) Operationen $\oplus$, ⓝ, $\ominus$, $\odot$ und ⓔ auf dem 2-dimensionalen $\underline{2}$-Spaltenraum

$$\underline{2}^{2\times 1} = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \middle| \, s, t \in \underline{2} \right\}$$

und zeigen Sie, dass Ihre Konstruktion einen Körper K ergibt, in dem ein Element α existiert mit $(\alpha \odot \alpha) \oplus \alpha \oplus 1 = 0$. Was ist α? Inwiefern ist $\underline{2}$ ein Teilkörper von K?

(c) Wie viele Elemente hat dieser neue Körper?

Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	In dieser Aufgabe betrachten wir $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als kommutative Monoide bezüglich der üblichen Multiplikation und Eins.	
10	Ist „der" ggT in $\mathbb{N}$ eines Paares natürlicher Zahlen eindeutig bestimmt?	o **Ja** o Nein
11	Ist „der" ggT in $\mathbb{Z}$ eines Paares ganzer Zahlen eindeutig bestimmt?	o Ja o **Nein**
12	Ist „der" ggT in $\mathbb{Q}$ eines Paares rationaler Zahlen eindeutig bestimmt?	o Ja o **Nein**
20	Ist „die" Darstellung des ggT in $\mathbb{Z}$ eines Paares ganzer Zahlen als $\mathbb{Z}$-Linearkombination dieser Zahlen eindeutig bestimmt?	o Ja o **Nein**
21	Für alle $a, b \in \underline{2}$ gilt $(a-b)^3 = a^3 - b^3$.	o **Ja** o Nein
22	Für alle $a, b \in \underline{3}$ gilt $(a-b)^2 = a^2 - b^2$.	o Ja o **Nein**
23	Für alle $a, b \in \underline{3}$ gilt $(a-b)^3 = a^3 - b^3$.	o **Ja** o Nein
30	Wenn a, b, c ganze Zahlen sind und d ein ggT in $\mathbb{Z}$ des Paares $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ ist, ist dann ein ggT des Tripels $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ dasselbe wie ein ggT des Paares $(d, c) \in \mathbb{Z}^2$?	o **Ja** o Nein
31	Für alle $a, b \in \underline{3}$ gilt $(a+b)^9 = a^9 + b^9$.	o Ja o **Nein**
40	Hat die lineare Gleichung $12x + 20y = 0$ eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$?	o **Ja** o Nein
41	Hat die lineare Gleichung $12x + 20y = 4$ eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$?	o **Ja** o Nein
42	Hat die lineare Gleichung $12x + 20y = 5$ eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$?	o Ja o **Nein**
43	Hat die lineare Gleichung $12x + 20y = 0$ unendlich viele Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$?	o Ja o Nein
44	Hat die lineare Gleichung $12x + 20y = 4$ unendlich viele Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$?	o Ja o Nein
45	Hat die lineare Gleichung $12x + 20y = 5$ unendlich viele Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$?	o Ja o **Nein**
50	Ist 5 ein ggT in $\mathbb{Z}$ von $(5, 0)$?	o **Ja** o Nein
51	Ist 0 ein ggT in $\mathbb{Z}$ von $(5, 0)$?	o Ja o **Nein**
52	Ist 0 ein ggT in $\mathbb{Z}$ von $(0, 0)$?	o **Ja** o Nein
53	Ist 5 ein ggT in $\mathbb{Z}$ von $(-10, -15)$?	o **Ja** o Nein
54	Ist 5 ein ggT im Monoid $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ von $(10, 15)$?	o **Ja** o Nein
55	Ist 5 ein ggT im Monoid $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ von $(5, 7)$?	o Ja o **Nein**
56	Ist 7 ein ggT im Monoid $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ von $(5, 7)$?	o Ja o **Nein**
57	Ist 7 ein ggT im Monoid $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ von $(5, 7)$?	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

2	Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch?	
10	Für alle $a, b \in \underline{5}$ gilt $(a+b)^5 = a^5 + b^5$.	o Ja o Nein
11	Für alle $a, b \in \underline{7}$ gilt $(a+b)^7 = a^7 + b^7$.	o Ja o Nein
20	Für alle $a, b \in \underline{2}$ gilt $(a-b)^2 = a^2 - b^2$.	o Ja o Nein
21	Für alle $a, b \in \underline{2}$ gilt $(a-b)^3 = a^3 - b^3$.	o Ja o Nein
22	Für alle $a, b \in \underline{3}$ gilt $(a-b)^2 = a^2 - b^2$.	o Ja o Nein
23	Für alle $a, b \in \underline{3}$ gilt $(a-b)^3 = a^3 - b^3$.	o Ja o Nein
30	Für alle $a, b \in \underline{2}$ gilt $(a+b)^4 = a^4 + b^4$.	o Ja o Nein
31	Für alle $a, b \in \underline{3}$ gilt $(a+b)^9 = a^9 + b^9$.	o Ja o Nein
40	Die Abbildungen $p_0 = (x \mapsto x^0)\colon \underline{5} \to \underline{5}$ und $p_4 = (x \mapsto x^4)\colon \underline{5} \to \underline{5}$ sind gleich. (wegen 0^0 nicht eindeutig zu beantworten)	~~o Ja o Nein~~
41	Die Abbildungen $p_1 = (x \mapsto x)\colon \underline{5} \to \underline{5}$ und $p_5 = (x \mapsto x^5)\colon \underline{5} \to \underline{5}$ sind gleich.	o Ja o Nein
42	Die Abbildungen $p_2 = (x \mapsto x^2)\colon \underline{5} \to \underline{5}$ und $p_6 = (x \mapsto x^6)\colon \underline{5} \to \underline{5}$ sind gleich.	o Ja o Nein
43	Die Abbildungen $p_3 = (x \mapsto x^3)\colon \underline{5} \to \underline{5}$ und $p_7 = (x \mapsto x^7)\colon \underline{5} \to \underline{5}$ sind gleich.	o Ja o Nein
44	Die Abbildungen $p_4 = (x \mapsto x^4)\colon \underline{5} \to \underline{5}$ und $p_8 = (x \mapsto x^8)\colon \underline{5} \to \underline{5}$ sind gleich.	o Ja o Nein
50	Welches ist die kleinste ganze Zahl $n > 100$, für die die Abbildungen $p_1 = (x \mapsto x)\colon \underline{7} \to \underline{7}$ und $p_n = (x \mapsto x^n)\colon \underline{7} \to \underline{7}$ gleich sind?	n.a., evt.: o Ja o Nein 103
51	Welches ist die kleinste ganze Zahl $n > 125$, für die die Abbildungen $p_1 = (x \mapsto x)\colon \underline{7} \to \underline{7}$ und $p_n = (x \mapsto x^n)\colon \underline{7} \to \underline{7}$ gleich sind?	n.a., evt.: o Ja o Nein 127
52	Welches ist die kleinste ganze Zahl $n > 150$, für die die Abbildungen $p_1 = (x \mapsto x)\colon \underline{7} \to \underline{7}$ und $p_n = (x \mapsto x^n)\colon \underline{7} \to \underline{7}$ gleich sind?	n.a., evt.: o Ja o Nein
53	Welches ist die kleinste ganze Zahl $n > 175$, für die die Abbildungen $p_1 = (x \mapsto x)\colon \underline{7} \to \underline{7}$ und $p_n = (x \mapsto x^n)\colon \underline{7} \to \underline{7}$ gleich sind?	n.a., evt.: o Ja o Nein
54	Welches ist die kleinste ganze Zahl $n > 200$, für die die Abbildungen $p_1 = (x \mapsto x)\colon \underline{7} \to \underline{7}$ und $p_n = (x \mapsto x^n)\colon \underline{7} \to \underline{7}$ gleich sind?	n.a., evt.: o Ja o Nein

3	Es sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen, und es sei $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$.	
10	Ist $\{a + b\,i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
11	Ist $\{a - b\,i \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
12	Ist $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
13	Ist $\{a - b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
14	Ist $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
15	Ist $\{a - b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
16	Ist $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
17	Ist $\{a - b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
20	Ist $\{a + b\,i \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
21	Ist $\{a + b\,i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
22	Ist $\{a - b\,i \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
23	Ist $\{a - b\,i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
24	Ist $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
25	Ist $\{a - b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
26	Ist $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
27	Ist $\{a - b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
28	Ist $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
29	Ist $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
30	Ist $\{a + b(i + 1) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
31	Ist $\{a + b(i + 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
32	Ist $\{a + b(i - 1) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
33	Ist $\{a + b(i - 1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
40	Ist $\underline{1}$ ein Körper?	o Ja o Nein
41	Ist $\underline{4}$ ein Körper?	o Ja o Nein
42	Ist $\underline{7}$ ein Körper?	o Ja o Nein
43	Ist $\underline{8}$ ein Körper?	o Ja o Nein
44	Ist $\underline{9}$ ein Körper?	o Ja o Nein
45	Ist $\{a + b\sqrt[3]{4} + c(\sqrt[3]{4})^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein

46	Ist $\{a + b\sqrt[3]{5} + c(\sqrt[3]{5})^2 \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
47	Ist $\{a + b\sqrt[3]{5} + c(\sqrt[3]{5})^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
50	Ist $\underline{13}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
51	Ist $\underline{17}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
52	Ist $\underline{23}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
53	Ist $\underline{29}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein
54	Ist $\underline{37}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$?	o Ja o Nein

4	Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum der Dimension 2 und U ein eindimensionaler Teilraum von V.	
10	Es sei V ein Vektorraum. Ist $(\{\underline{0}\}, \{\underline{0}\})$ eine unabhängige Folge von Teilräumen von V?	o Ja o Nein
11	Es sei V ein Vektorraum. Ist $(\{\underline{0}\}, \{\underline{0}\}, \{\underline{0}\})$ eine unabhängige Folge von Teilräumen von V?	o Ja o Nein
12	Es sei V ein Vektorraum. Ist $(\{\underline{0}\}, V)$ eine unabhängige Folge von Teilräumen von V?	o Ja o Nein
13	Es sei V ein Vektorraum. Ist $(\{V, \underline{0}\})$ eine unabhängige Folge von Teilräumen von V?	o Ja o Nein
14	Es sei V ein Vektorraum und U ein Teilraum von V. Ist $(\{\underline{0}\}, U)$ eine unabhängige Folge von Teilräumen von V?	o Ja o Nein
15	Es sei V ein Vektorraum und U ein Teilraum von V. Ist $(U, \{\underline{0}\})$ eine unabhängige Folge von Teilräumen von V?	o Ja o Nein
16	Ist $(U, V, \{\underline{0}\})$ eine unabhängige Folge von Teilräumen von V?	o Ja o Nein
20	Lässt sich ein 7-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer 2-gliedrigen Folge von Teilräumen schreiben?	o Ja o Nein
21	Lässt sich ein 7-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer 3-gliedrigen Folge von Teilräumen schreiben?	o Ja o Nein
22	Lässt sich ein 7-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer 4-gliedrigen Folge von Teilräumen schreiben?	o Ja o Nein
23	Lässt sich ein 7-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer 5-gliedrigen Folge von Teilräumen schreiben?	o Ja o Nein
24	Lässt sich ein 7-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer 6-gliedrigen Folge von Teilräumen schreiben?	o Ja o Nein
25	Lässt sich ein 7-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer 7-gliedrigen Folge von Teilräumen schreiben?	o Ja o Nein
30	Lässt sich ein 3-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer 4-gliedrigen Folge von Teilräumen schreiben?	o Ja o Nein
31	Lässt sich ein 3-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer 5-gliedrigen Folge von Teilräumen schreiben?	o Ja o Nein
32	Lässt sich ein 3-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer 6-gliedrigen Folge von Teilräumen schreiben?	o Ja o Nein
33	Lässt sich ein 3-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer 7-gliedrigen Folge von Teilräumen schreiben?	o Ja o Nein
34	Lässt sich ein 3-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer 8-gliedrigen Folge von Teilräumen schreiben?	o Ja o Nein
35	Lässt sich ein 126-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe von Teilräumen der Dimension 8 darstellen?	o Ja o Nein

36	Lässt sich ein 126-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe von Teilräumen der Dimension 9 darstellen?	o Ja o Nein
37	Lässt sich ein 126-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe von Teilräumen der Dimension 12 darstellen?	o Ja o Nein
38	Lässt sich ein 126-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe von Teilräumen der Dimension 13 darstellen?	o Ja o Nein
40	Lässt sich ein 126-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer Folge von Teilräumen der Dimension 3 darstellen?	o Ja o Nein
41	Lässt sich ein 126-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer Folge von Teilräumen der Dimension 4 darstellen?	o Ja o Nein
42	Lässt sich ein 126-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer Folge von Teilräumen der Dimension 5 darstellen?	o Ja o Nein
43	Lässt sich ein 126-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer Folge von Teilräumen der Dimension 6 darstellen?	o Ja o Nein
44	Lässt sich ein 126-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer Folge von Teilräumen der Dimension 7 darstellen?	o Ja o Nein
45	Lässt sich ein 126-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer Folge von Teilräumen der Dimension 8 darstellen?	o Ja o Nein
46	Lässt sich ein 126-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer Folge von Teilräumen der Dimension 9 darstellen?	o Ja o Nein
47	Lässt sich ein 126-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer Folge von Teilräumen der Dimension 12 darstellen?	o Ja o Nein
48	Lässt sich ein 126-dimensionaler Vektorraum als innere direkte Summe einer Folge von Teilräumen der Dimension 13 darstellen?	o Ja o Nein
50	Wie viele Elemente hat der Durchschnitt zweier (verschiedener) 3-dimensionaler Teilräume eines 4-dimensionalen $\underline{5}$-Vektorraums?	n.a., evt.: o Ja o Nein
51	Wie viele Elemente hat der Durchschnitt zweier (verschiedener) 4-dimensionaler Teilräume eines 5-dimensionalen $\underline{3}$-Vektorraums?	n.a., evt.: o Ja o Nein
52	Wie viele Elemente hat der Durchschnitt dreier (paarweise verschiedener) 3-dimensionaler Teilräume eines 4-dimensionalen $\underline{3}$-Vektorraums höchstens?	n.a., evt.: o Ja o Nein
53	Wie viele Elemente hat die Summe dreier (paarweise verschiedener) eindimensionaler Teilräume eines 5-dimensionalen $\underline{7}$-Vektorraums mindestens?	n.a., evt.: o Ja o Nein
54	Wie viele Elemente hat die Summe zweier (verschiedener) 2-dimensionaler Teilräume eines 7-dimensionalen $\underline{3}$-Vektorraums mindestens?	n.a., evt.: o Ja o Nein
55	Wie viele Elemente hat die Summe dreier (paarweise verschiedener) 2-dimensionaler Teilräume eines 7-dimensionalen $\underline{5}$-Vektorraums mindestens?	n.a., evt.: o Ja o Nein

5	Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. T_1, T_2 und T_3 seien Teilräume von V. (a) Zeigen Sie: $T_1 \cup T_2$ ist genau dann ein Teilraum von V, wenn $T_1 \subseteq T_2$ oder $T_2 \subseteq T_1$ ist. (b) Wenn $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ ein Teilraum von V ist, folgt dann, dass $T_1 \subseteq T_2 \cup T_3$ oder $T_2 \subseteq T_1 \cup T_3$ oder $T_3 \subseteq T_1 \cup T_2$ gilt? Beweis oder Gegenbeispiel. Hinweis: Probieren Sie Beispiele aus (zunächst mit kleiner Dimension).
6	Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Beantworten Sie die folgenden Fragen und geben Sie jeweils die Antwort und einen Beweis dafür an: (i) Wie viele linear unabhängige Folgen der Länge 2 gibt es in einem n-dimensionalen Vektorraum über dem Körper $\underline{p}$ mit p Elementen, wenn $n \geq 2$ ist? (ii) Wie viele linear unabhängige Folgen der Länge 3 gibt es in einem n-dimensionalen Vektorraum über dem Körper $\underline{p}$ mit p Elementen, wenn $n \geq 3$ ist? (iii) Wie viele Basen hat ein 2-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\underline{p}$ mit p Elementen? (iv) Wie viele Basen hat ein 3-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\underline{p}$ mit p Elementen? (v) Wie viele invertierbare 3×3-Matrizen gibt es mit Einträgen aus dem Körper $\underline{p}$ mit p Elementen?

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Es sei $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, V, *)$ der jeweils angegebene affine Raum (AAG) über dem K-Vektorraum V. Wie viele Geraden hat $\mathcal{A}$?	
10	$\mathcal{P} = \underline{2}^{1\times 2}$, $V = \underline{2}^{2\times 1}$ für $K = \underline{2}$, $*v = (p \mapsto p + v^{tr})$ für alle $v \in V$.	6
11	$\mathcal{P} = \underline{3}^{1\times 2}$, $V = \underline{3}^{2\times 1}$ für $K = \underline{3}$, $*v = (p \mapsto p + v^{tr})$ für alle $v \in V$.	12
20	$\mathcal{P} = \underline{3}^{1\times 3}$, $V = \underline{3}^{3\times 1}$ für $K = \underline{3}$, $*v = (p \mapsto p + v^{tr})$ für alle $v \in V$.	
21	$\mathcal{P} = \underline{2}^{1\times 3}$, $V = \underline{2}^{3\times 1}$ für $K = \underline{2}$, $*v = (p \mapsto p + v^{tr})$ für alle $v \in V$.	28
30	$\mathcal{P} = \underline{5}^{1\times 3}$, $V = \underline{5}^{3\times 1}$ für $K = \underline{5}$, $*v = (p \mapsto p + v^{tr})$ für alle $v \in V$.	
31	$\mathcal{P} = \underline{7}^{1\times 3}$, $V = \underline{7}^{3\times 1}$ für $K = \underline{7}$, $*v = (p \mapsto p + v^{tr})$ für alle $v \in V$.	2793
40	$\mathcal{P} = \underline{2}^{2\times 2}$, $V = \underline{2}^{2\times 2}$ für $K = \underline{2}$, $*v = (p \mapsto p + v)$ für alle $v \in V$.	120
41	$\mathcal{P} = \underline{3}^{2\times 2}$, $V = \underline{3}^{2\times 2}$ für $K = \underline{3}$, $*v = (p \mapsto p + v)$ für alle $v \in V$.	
50	$\mathcal{P} = \underline{2}$, $V = \underline{2}$ für $K = \underline{2}$, $*v = (p \mapsto p + v)$ für alle $v \in V$.	1
51	$\mathcal{P} = \underline{3}$, $V = \underline{3}$ für $K = \underline{3}$, $*v = (p \mapsto p + v)$ für alle $v \in V$.	1
52	$\mathcal{P} = \underline{5}$, $V = \underline{5}$ für $K = \underline{5}$, $*v = (p \mapsto p + v)$ für alle $v \in V$.	1
53	$\mathcal{P} = \underline{7}$, $V = \underline{7}$ für $K = \underline{7}$, $*v = (p \mapsto p + v)$ für alle $v \in V$.	1

2	Es sei $\mathcal{A} = (\underline{3}^{1\times 5}, \underline{3}^{5\times 1}, *)$ der affine Raum (AAG) über dem $\underline{3}$-Vektorraum $\underline{3}^{5\times 1}$ mit $*v = (p \mapsto p + v^{tr})$ für alle $v \in V$.	
10	Sind die Gerade $g = [1,2,0,1,2] * \langle [1,2,0,1,-2]^{tr} \rangle$ und die Verbindungsgerade h von $[2,1,0,2,1]$ und $[0,0,0,0,0]$ parallel?	o Ja o Nein
11	Sind die Geraden $g = [1,0,0,2,0] * \langle [1,0,0,0,1]^{tr} \rangle$ und $h = [0,1,0,1,0] * \langle [0,1,1,0,1]^{tr} \rangle$ parallel?	o Ja o Nein
20	Liegen die Dreiecke $([1,0,1,2,0], [0,0,1,2,0], [0,1,1,1,1])$ und ([1,1,0,2,1], [0, [illegible], 1], [illegible]1,2,1,2,1]) in einer gemeinsamen Ebene?	o Ja o Nein
21	Liegen die Dreiecke $([1,0,1,2,0], [0,0,1,2,0], [0,1,1,1,1])$ und ([2,1,1,1,1], [1, [illegible], 1], [1,2,1,0,2]) in einer gemeinsamen Ebene?	o Ja o Nein
30	Ist die Gerade $[0,1,2,0,1] * \langle [1,1,0,2,1]^{tr} \rangle$ parallel zur Ebene, in der das Dreieck $([1,0,1,2,0], [0,0,1,2,0], [0,1,1,1,1])$ liegt?	o Ja o Nein
31	Ist die Gerade $[0,1,2,0,1] * \langle [1,1,0,2,0]^{tr} \rangle$ parallel zur Ebene, in der das Dreieck $([1,0,1,2,0], [0,0,1,2,0], [0,1,1,1,1])$ liegt?	o Ja o Nein
40	Sind die Ebene, in der das Dreieck $([1,0,0,0,0], [0,0,1,0,0], [0,0,0,0,1])$ liegt, und die Ebene, in der das Dreieck $$([2,2,1,1,0], [0,2,1,1,2], [0,2,0,1,0])$$ liegt, parallel?	o Ja o Nein
41	Sind die Ebene, in der das Dreieck $([1,0,0,0,0], [0,0,1,0,0], [0,0,0,0,1])$ liegt, und die Ebene, in der das Dreieck $$([2,2,1,1,0], [0,2,1,0,2], [0,2,0,1,0])$$ liegt, parallel?	o Ja o Nein
50	Liegt der Punkt $[0,0,0,0,0]$ in der Ebene, in der das Dreieck $$([1,2,1,2,1], [1,0,0,2,2], [2,1,2,1,2])$$ liegt?	o Ja o Nein
51	Liegt der Punkt $[0,0,0,0,0]$ in der Ebene, in der das Dreieck $$([1,2,1,2,1], [1,1,2,2,0], [2,1,2,1,2])$$ liegt?	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

3	Es sei $\mathcal{A} = (\mathbb{R}^{1\times 4}, \mathbb{R}^{1\times 4}, *)$ der affine Raum über dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{1\times 4}$ mit $*v = (p \mapsto p + v)$ für alle $v \in V$.	
10	Liegt der Punkt $[-7, -4, -1, 2]$ auf der Geraden $g = [1, 2, 3, 4] * \langle [4, 3, 2, 1] \rangle$?	o Ja o Nein
11	Liegt der Punkt $[-7, -4, -1, 3]$ auf der Geraden $g = [1, 2, 3, 4] * \langle [4, 3, 2, 1] \rangle$?	o Ja o Nein
20	Liegt der Punkt $[7, -2, 5, -5]$ auf der Verbindungsgeraden von $[3, 2, 1, 3]$ und $[4, 1, 2, 1]$?	o Ja o Nein
21	Liegt der Punkt $[7, -3, 5, -5]$ auf der Verbindungsgeraden von $[3, 2, 1, 3]$ und $[4, 1, 2, 1]$?	o Ja o Nein
30	Es sei g die Gerade, die durch $[1, 0, 0, 0]$ geht und parallel zur Geraden $[-1, 1, -1, 1] * \langle [0, 1, 1, 0] \rangle$ ist. Liegt der Punkt $[1, 2, 3, 0]$ auf g?	o Ja o Nein
31	Es sei g die Gerade, die durch $[1, 0, 0, 0]$ geht und parallel zur Geraden $[-1, 1, -1, 1] * \langle [0, 1, 1, 0] \rangle$ ist. Liegt der Punkt $[2, -7, -7, 0]$ auf g?	o Ja o Nein
32	Es sei g die Gerade, die durch $[1, 0, 0, 0]$ geht und parallel zur Geraden $[-1, 1, -1, 1] * \langle [0, 1, 1, 0] \rangle$ ist. Liegt der Punkt $[1, -7, -7, 0]$ auf g?	o Ja o Nein
40	Geht die Gerade $g = [1, -1, 1, 1] * \langle [2, 1, -1, 1] \rangle$ durch den Punkt $[-2, -10, 5, -2]$?	o Ja o Nein
41	Geht die Gerade $g = [1, -1, 1, 1] * \langle [2, 6, -4, 2] \rangle$ durch den Punkt $[-2, -10, 7, -2]$?	o Ja o Nein
50	Geht die Verbindungsgerade von $[3, -2, 1, 3]$ und $[4, -4, -2, 7]$ durch den Punkt $[10, -16, -19, 31]$?	o Ja o Nein
51	Geht die Verbindungsgerade von $[3, -2, 1, 3]$ und $[4, -4, -2, 7]$ durch den Punkt $[10, -16, -20, 31]$?	o Ja o Nein

4	Es sei $\mathcal{A} = (\mathbb{R}^{1\times 4}, \mathbb{R}^{1\times 4}, *)$ der affine Raum über dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{1\times 4}$ mit $*v = (p \mapsto p+v)$ für alle $v \in V$.	
10	Haben die Geraden $g = [1,2,3,4] * \langle[4,3,2,1]\rangle$ und $h = [-4,0,4,8] * \langle[1,1,1,1]\rangle$ einen Schnittpunkt?	o Ja o Nein
11	Haben die Geraden $g = [1,2,3,4] * \langle[4,3,2,1]\rangle$ und $h = [-4,0,3,8] * \langle[1,1,1,1]\rangle$ einen Schnittpunkt?	o Ja o Nein
20	Es sei g die Gerade $[1,1,2,2]*\langle[1,2,1,2]\rangle$ und h die Verbindungsgerade von $[3,2,1,3]$ und $[4,1,2,1]$. Haben g und h einen Schnittpunkt?	o Ja o Nein
21	Es sei g die Gerade $[1,1,2,2]*\langle[1,2,1,2]\rangle$ und h die Verbindungsgerade von $[3,2,1,3]$ und $[4,1,2,2]$. Haben g und h einen Schnittpunkt?	o Ja o Nein
30	Es sei g die Verbindungsgerade von $[-1,-1,-1,-1]$ und $[1,1,1,3]$ und h die Gerade, die durch $[1,0,0,0]$ geht und parallel zur Geraden $[-1,1,-1,1]*\langle[0,1,1,0]\rangle$ ist. Haben g und h einen Schnittpunkt?	o Ja o Nein
31	Es sei g die Verbindungsgerade von $[-1,-1,-1,-1]$ und $[1,1,1,3]$ und h die Gerade, die durch $[1,1,1,4]$ geht und parallel zur Geraden $[-1,1,-1,1]*\langle[0,1,1,0]\rangle$ ist. Haben g und h einen Schnittpunkt?	o Ja o Nein
40	Es sei g die Verbindungsgerade von $[-2,-1,0,1]$ und $[0,0,0,1]$ und h die Verbindungsgerade von $[3,2,-1,-1]$ und $[1,1,-1,-1]$. Haben g und h einen gemeinsamen Punkt?	o Ja o Nein
41	Es sei g die Verbindungsgerade von $[-2,-1,-1,-1]$ und $[0,0,-1,-1]$ und h die Verbindungsgerade von $[4,2,-1,-1]$ und $[2,1,-1,-1]$. Haben g und h einen gemeinsamen Punkt?	o Ja o Nein
50	Es sei g die Gerade, die durch $[-1,-1,-2,-2]$ geht und parallel zur Verbindungsgerade von $[1,2,3,4]$ und $[4,3,2,1]$ ist, und h die Verbindungsgerade von $[1,1,0,0]$ und $[0,0,1,1]$. Haben g und h einen Schnittpunkt?	o Ja o Nein
51	Es sei g die Gerade, die durch $[-1,-1,2,2]$ geht und parallel zur Verbindungsgerade von $[1,2,3,4]$ und $[4,3,2,1]$ ist, und h die Verbindungsgerade von $[1,1,0,0]$ und $[0,0,1,1]$. Haben g und h einen Schnittpunkt?	o Ja o Nein

5	Es sei $(\mathcal{P}, V, *)$ ein affiner Raum über einem K-Vektorraum V, wobei K ein Körper mit $1+1 \neq 0$ und $\dim V \geq 2$ ist. Gegeben sei ferner ein Zweieck (A, C) (das heißt, dass A und C verschiedene Punkte in $\mathcal{P}$ sind). Gehen die Diagonalen aller Parallelogramme der Form $\begin{bmatrix} A & B \\ D & C \end{bmatrix}$ für $B, D \in \mathcal{P}$ durch einen gemeinsamen Punkt? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
6	Treffen sich die „Seitenhalbierenden“ eines „Tetraeders“ in einem Punkt? Präzisieren Sie dieses umgangssprachliche Problem auf der 4. Diskursebene: definieren Sie die nötigen Begriffe in der Sprache der Analytischen Affinen Geometrie, formulieren und beweisen Sie einen diesbezüglichen allgemeinen Satz für geeignete affine Räume.

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Wir betrachten affine Abbildungen $A\colon Q \to Q'$ im Rahmen der AAG.	
10	Jedes affine Bild (Bild unter einer affinen Abbildung) eines affinen Teilraums ist ein affiner Teilraum.	o Ja o Nein
11	Jedes affine Bild (Bild unter einer affinen Abbildung) eines Zweiecks ist ein Zweieck.	o Ja o Nein
12	Jedes affine Bild (Bild unter einer affinen Abbildung) eines Dreiecks ist ein Dreieck.	o Ja o Nein
13	Jedes affine Bild (Bild unter einer affinen Abbildung) eines Parallelogramms ist ein Parallelogramm.	o Ja o Nein
14	Jede Parallelprojektion zwischen affinen Teilräumen eines affinen Raums ist injektiv.	o Ja o Nein
15	Jede Parallelprojektion zwischen affinen Teilräumen eines affinen Raums ist surjektiv.	o Ja o Nein
20	Bei jeder affinen Abbildung ist das volle Urbild eines Zweiecks ein Zweieck.	o Ja o Nein
21	Bei jeder affinen Abbildung ist das volle Urbild eines Dreiecks ein Dreieck.	o Ja o Nein
22	Bei jeder affinen Abbildung ist das volle Urbild eines Parallelogramms ein Parallelogramm.	o Ja o Nein
23	Bei jeder affinen Abbildung enthält das volle Urbild einer Geraden eine Gerade.	o Ja o Nein
24	Bei jeder affinen Abbildung enthält das volle Urbild einer Ebene eine Ebene.	o Ja o Nein
30	Jede affine Abbildung bildet je drei Punkte einer Geraden auf Punkte ab, die auf einer gemeinsamen Gerade liegen.	o Ja o Nein
31	Jede affine Abbildung bildet je drei Punkte einer Ebene auf Punkte ab, die in einer gemeinsamen Ebene liegen.	o Ja o Nein
32	Jede affine Abbildung bildet je vier Punkte eines 3-dimensionalen affinen Teilraums auf Punkte ab, die in einem gemeinsamen 3-dimensionalen affinen Teilraum liegen.	o Ja o Nein
40	Jede affine Abbildung kann bei geeigneter Wahl der Ursprünge durch eine lineare Abbildung als zugehörige verpflanzte Abbildung beschrieben werden.	o Ja o Nein
41	Zu jeder affinen Abbildung und jedem Vektor $u \in \mathrm{T}(Q')$ gibt es Ursprünge, so dass die beschreibende Vektorabbildung (die zugehörige verpflanzte Abbildung) das Produkt einer linearen Abbildung (erst) und der Verschiebung um u (dann) ist.	o Ja o Nein
42	Jede affine Abbildung kann bei gegebenem Ursprung U' von Q' und geeignetem Ursprung U von Q durch eine lineare Abbildung als zugehörige verpflanzte Abbildung beschrieben werden.	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

43	Jede affine Abbildung kann bei gegebenem Ursprung U von $\mathcal{Q}$ und geeignetem Ursprung U' von $\mathcal{Q}'$ durch eine lineare Abbildung als zugehörige verpflanzte Abbildung beschrieben werden.	o Ja o Nein
50	Die Hintereinanderausführung einer Parallelprojektion (erst) und einer affinen Abbildung (dann) ist eine affine Abbildung.	o Ja o Nein
51	Die Hintereinanderausführung zweier affiner Vektorabbildungen ist eine affine Vektorabbildung.	o Ja o Nein
52	Die Hintereinanderausführung einer Verschiebung (erst) und einer linearen Abbildung (dann) ist eine affine Vektorabbildung.	o Ja o Nein
53	Bei jeder affinen Vektorabbildung geht die Summe zweier Vektoren auf die Summe ihrer Bildvektoren.	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

2	Wir betrachten affine Teilräume eines 3-dimensionalen affinen Raums $\mathcal{P}$ über $\mathbb{R}$, wobei $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis des zugehörigen Vektorraums $\mathrm{T}(\mathcal{P})$ sei. Es sei U ein Punkt von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{K} = (U, \mathcal{B})$ das zugehörige Koordinatensystem. Daneben sei $\mathcal{K}' = (U', \mathcal{B}')$ ein weiteres Koordinatensystem von $\mathcal{P}$, wobei $U' = U * u'$ mit ${}_{\mathcal{B}}u' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ und ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ist. Stimmen die folgenden affinen Teilräume $\mathcal{Q}'$ von $\mathcal{P}$ mit dem affinen Teilraum $\mathcal{Q} = U * \langle b_1 + b_2, b_2 + b_3 \rangle$ überein?	
10	$\mathcal{Q}' = \{X \in \mathcal{P} \mid X = U * x,\ x = \alpha b_1 + (\alpha+\beta) b_2 + \beta b_3$ für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.	o Ja o Nein
11	$\mathcal{Q}' = \{X \in \mathcal{P} \mid X = x_1 b_1 + (x_1 - x_2) b_2 - x_2 b_3$ für geeignete $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$.	o Ja o Nein
20	$\mathcal{Q}' = \{X \in \mathcal{P} \mid {}_{\mathcal{K}}X =: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ erfüllt $x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.	o Ja o Nein
21	$\mathcal{Q}' = \{X \in \mathcal{P} \mid {}_{\mathcal{K}}X =: \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ erfüllt $x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.	o Ja o Nein
30	$\mathcal{Q}' = \{X\} \vee \{Y\} \vee \{Z\}$ für die Punkte X, Y, Z mit $${}_{\mathcal{K}}X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ {}_{\mathcal{K}}Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ {}_{\mathcal{K}}Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$	o Ja o Nein
31	$\mathcal{Q}' = \{X\} \vee \{Y\} \vee \{Z\}$ für die Punkte X, Y, Z mit $${}_{\mathcal{K}}X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ {}_{\mathcal{K}}Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},\ {}_{\mathcal{K}}Z = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$	o Ja o Nein
32	$\mathcal{Q}' = \{X\} \vee \{Y\} \vee \{Z\}$ für die Punkte X, Y, Z mit $${}_{\mathcal{K}}X = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ {}_{\mathcal{K}}Y = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix},\ {}_{\mathcal{K}}Z = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$	o Ja o Nein
33	$\mathcal{Q}' = \{X\} \vee \{Y\} \vee \{Z\}$ für die Punkte X, Y, Z mit $${}_{\mathcal{K}}X = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, {}_{\mathcal{K}}Y = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, {}_{\mathcal{K}}Z = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$	~~o Ja o Nein~~ (doppelt: s. 32)
40	$\mathcal{Q}' = U' * \langle -b_1 + b_3, b_2 + b_3 \rangle$.	o Ja o Nein
41	$\mathcal{Q}' = U' * \langle b_1 + b_2, b_1 - b_3 \rangle$.	o Ja o Nein
42	$\mathcal{Q}' = U' * \langle -b_1, b_3 \rangle$.	o Ja o Nein
43	$\mathcal{Q}' = \{X \in \mathcal{P} \mid X = U' * x',\ x' = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3,$ wobei $\alpha - \beta + \gamma = 0$ ist $\}$.	o Ja o Nein

50	$Q' = \{L\} \vee \{M\} \vee \{N\}$ für die Punkte L, M, N mit $${}_{\mathcal{K}'}L = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\ {}_{\mathcal{K}'}M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ {}_{\mathcal{K}'}N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$	o Ja o Nein
51	$Q' = \{L\} \vee \{M\} \vee \{N\}$ für die Punkte L, M, N mit $${}_{\mathcal{K}'}L = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ {}_{\mathcal{K}'}M = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ {}_{\mathcal{K}'}N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$	o Ja o Nein
52	$Q' = \{L\} \vee \{M\} \vee \{N\}$ für die Punkte L, M, N mit $${}_{\mathcal{K}'}L = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ {}_{\mathcal{K}'}M = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ {}_{\mathcal{K}'}N = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

3	Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebene Abbildung φ zwischen den K-Vektorräumen V und W **linear** ist.	
10	$K := \mathbb{Q}$, $V := \mathbb{Q}$, $W := \mathbb{Q}$, $\varphi = (x \mapsto 2x+1)\colon V \to W$.	o Ja o Nein
11	$K := \mathbb{Q}$, $V := \mathbb{Q}$, $W := \mathbb{Q}$, $\varphi = (x \mapsto 3x)\colon V \to W$.	o Ja o Nein
20	$K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{1\times 2}$, $W := \mathbb{R}$, $\varphi = ([x_1, x_2] \mapsto x_1 + x_2)\colon V \to W$.	o Ja o Nein
21	$K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{1\times 2}$, $W := \mathbb{R}$, $\varphi = ([x_1, x_2] \mapsto x_1 \cdot x_2)\colon V \to W$.	o Ja o Nein
30	$K := \underline{2}$, $V := \underline{2}$, $W := \underline{2}$, $\varphi = (x \mapsto x^2)\colon V \to W$.	o Ja o Nein
31	$K := \underline{2}$, $V := \underline{2}$, $W := \underline{2}$, $\varphi = (x \mapsto x^3)\colon V \to W$.	o Ja o Nein
40	$K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $W := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi = (f \mapsto f + f)\colon V \to W$.	o Ja o Nein
41	$K := \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $W := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\varphi = (f \mapsto f - f)\colon V \to W$.	o Ja o Nein
50	$K := \mathbb{R}$, $V := K^{2\times 3}$, $W := K^{1\times 3}$, $\varphi = (M \mapsto [1,2] \cdot M)\colon V \to W$.	o Ja o Nein
51	$K := \mathbb{R}$, $V := K^{3\times 2}$, $W := K^{1\times 2}$, $\varphi = (M \mapsto [3,2,1] \cdot M)\colon V \to W$.	o Ja o Nein

4	Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebene Abbildung $f : V \to W$ zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen V und W eine **affine Vektorabbildung** ist.	
10	$V = \mathbb{R} = W,\ f(x) = x + 3.$	o Ja o Nein
11	$V = \mathbb{R} = W,\ f(x) = x + 4.$	o Ja o Nein
12	$V = \mathbb{R} = W,\ f(x) = x^2 + 4.$	o Ja o Nein
13	$V = \mathbb{R} = W,\ f(x) = x^2 + 3.$	o Ja o Nein
20	$V = \mathbb{R}^{2\times 1},\ W = \mathbb{R},\ f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = x_1 + x_2 + 1.$	o Ja o Nein
21	$V = \mathbb{R}^{2\times 1},\ W = \mathbb{R},\ f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = x_1 + 2x_2 + 3.$	o Ja o Nein
22	$V = \mathbb{R}^{2\times 1},\ W = \mathbb{R},\ f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = x_1^2 + x_2^2.$	o Ja o Nein
23	$V = \mathbb{R}^{2\times 1},\ W = \mathbb{R},\ f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = x_1^2 + x_2^2 + 3.$	o Ja o Nein
30	$V = \mathbb{R},\ W = \mathbb{R}^{1\times 2},\ f(x) = [x+1, x+2].$	o Ja o Nein
31	$V = \mathbb{R},\ W = \mathbb{R}^{1\times 2},\ f(x) = [x, x] + [1, 2].$	o Ja o Nein
32	$V = \mathbb{R},\ W = \mathbb{R}^{1\times 2},\ f(x) = x \cdot [1, 1] + [1, 2].$	o Ja o Nein
33	$V = \mathbb{R},\ W = \mathbb{R}^{1\times 2},\ f(x) = x^3 \cdot [1, 1] + [1, 2].$	o Ja o Nein
40	$V = \mathbb{R}^{1\times 3},\ W = \mathbb{R}^{1\times 3},\ f([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 + 3x_3, 2, 3x_1 + x_3].$	o Ja o Nein
41	$V = \mathbb{R}^{1\times 3},\ W = \mathbb{R}^{1\times 3},\ f([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 + 3x_3, x_2, 3x_1 + x_3].$	o Ja o Nein
42	$V = \mathbb{R}^{1\times 3},\ W = \mathbb{R}^{1\times 3},\ f([x_1, x_2, x_3]) = [1, 2, 3].$	o Ja o Nein
43	$V = \mathbb{R}^{1\times 3},\ W = \mathbb{R}^{1\times 3},\ f([x_1, x_2, x_3]) = [x_3, x_2, x_1].$	o Ja o Nein
50	$V = \mathbb{R} = W,\ f(x) = x^2 + x + 1.$	o Ja o Nein
51	$V = \mathbb{R} = W,\ f(x) = x^2 + 2x + 1.$	o Ja o Nein
52	$V = \mathbb{R} = W,\ f(x) = x^2 + 3x + 2.$	o Ja o Nein
53	$V = \mathbb{R} = W,\ f(x) = x^2 + 4x + 3.$	o Ja o Nein
54	$V = \mathbb{R} = W,\ f(x) = x^2 + 5x + 4.$	o Ja o Nein

5	Ein Komet bewegt sich in einer reellen affinen Ebene $(\mathcal{P}, V, *)$ mit Koordinatensystem $(U, \mathcal{B} = (b_1, b_2))$ gemäß der Vorschrift $$R(N * ((1h)\tau)) = U * (b_1\tau + b_2\tau^2) \quad \text{für } -2 \leq \tau \leq +2,$$ wobei für den affinen Raum der Zeitpunkte $(\mathcal{T}, W, *)$ ein Koordinatensystem $(N, (1h))$ gewählt ist und der Komet im Zeitintervall $[N * ((1h) \cdot (-2)), N * ((1h) \cdot 2)]$, also für die Zeitpunkte $T = N * t = N * ((1h) \cdot \tau)$ mit $-2 \leq \tau \leq +2, \tau \in \mathbb{R}$ beobachtet wird. Welche Geschwindigkeitsvektoren in $\dot{V}$ hat der Komet zu den Zeitpunkten $N * ((1h) \cdot (-1.5))$, N und $N * ((1h) \cdot 1.5)$?
6	Es seien K ein Körper und V und W Vektorräume über K. Weiter sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: (a) Kern φ ist ein Teilraum von V. (b) Bild φ ist ein Teilraum von W. (c) Zu jedem Teilraum $U \leq V$ gibt es eine lineare Abbildung $\psi : V \to V$ mit Kern $\psi = U$. (d) Folgern Sie aus dem Ergebnis in (c) die beiden folgenden Aussagen über die Menge $$V/U := \{x + U \mid x \in V\}$$ (diese Menge heißt **Menge der Nebenklassen von U**). (i) Zu jedem $y \in V$ gibt es genau eine Nebenklasse $x + U \in V/U$ mit $y \in x + U$. (ii) Zu jeder Nebenklasse $x + U \in V/U$ gibt es eine bijektive Abbildung von U auf $x + U$.

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Wir betrachten lineare Abbildungen $\varphi : V \to W$ zwischen K-Vektorräumen V und W. Dabei sei jeweils $V = L \oplus \operatorname{Kern}\varphi$ und $W = \operatorname{Bild}\varphi \oplus M$, und $\mathcal{A}$ bezeichne eine nichtleere Folge in V. Welche der folgenden Aussagen sind für jede solche lineare Abbildung richtig?	
10	Ist $\mathcal{A}$ linear unabhängig, so ist $\varphi(\mathcal{A})$ eine linear unabhängige Folge in W.	o Ja o Nein
11	Ist $\varphi(\mathcal{A})$ eine linear abhängige Folge in W, so ist $\mathcal{A}$ linear abhängig.	o Ja o Nein
20	Ist $\mathcal{A}$ linear abhängig, so ist $\varphi(\mathcal{A})$ eine linear abhängige Folge in W.	o Ja o Nein
21	Ist $\varphi(\mathcal{A})$ eine linear unabhängige Folge in W, so ist $\mathcal{A}$ linear unabhängig.	o Ja o Nein
30	Ist $\mathcal{A}$ ein Erzeugendensystem von V, so ist $\varphi(\mathcal{A})$ ein Erzeugendensystem von W.	o Ja o Nein
31	Ist $\varphi(\mathcal{A})$ ein Erzeugendensystem von W, so ist $\mathcal{A}$ ein Erzeugendensystem von V.	o Ja o Nein
40	Ist $\mathcal{A}$ ein Erzeugendensystem von L, so ist $\varphi(\mathcal{A})$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Bild}\varphi$.	o Ja o Nein
41	Ist $\mathcal{A}$ in L und $\varphi(\mathcal{A})$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Bild}\varphi$, so ist $\mathcal{A}$ ein Erzeugendensystem von L.	o Ja o Nein
42	Ist $\mathcal{A}$ in L und $\varphi(\mathcal{A})$ linear abhängig, so ist $\mathcal{A}$ linear abhängig.	o Ja o Nein
43	Ist $\mathcal{A}$ in L und linear unabhängig, so ist $\varphi(\mathcal{A})$ linear unabhängig.	o Ja o Nein
50	Ist $\mathcal{A}$ eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$, so ist $\varphi(\mathcal{A})$ eine Basis von M.	o Ja o Nein
51	Ist $\mathcal{A}$ eine Basis von L, so ist $\varphi(\mathcal{A})$ eine Basis von M.	o Ja o Nein

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

2	Es sei $(\mathcal{P}, V, *)$ ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V. Weiter sei $U \in \mathcal{P}$ und $V = X \oplus Y$ für Teilräume $X, Y \leq V$. Sind dann die folgenden Aussagen richtig?	
10	In jeder Nebenklasse $v + Y$ (mit $v \in V$) liegt genau ein Element von X.	o Ja o Nein
11	In jeder Nebenklasse $x + Y$ (mit $x \in X$) liegt genau ein Element von X.	o Ja o Nein
12	In jeder Nebenklasse $v + X$ (mit $v \in V$) liegt genau ein Element von Y.	o Ja o Nein
13	In jeder Nebenklasse $y + X$ (mit $y \in Y$) liegt genau ein Element von Y.	o Ja o Nein
20	Elemente $v, w \in V$ liegen genau dann in derselben Nebenklasse aus V/Y, wenn $v - w \in Y$ ist.	o Ja o Nein
21	Jede Nebenklasse aus V/Y hat eine Darstellung $x + Y$ für ein $x \in X$.	o Ja o Nein
30	Ist $w \in V$, so liegen w und $-w$ in derselben Nebenklasse aus V/Y.	o Ja o Nein
31	Ist $w \in V$, so liegen w und $w + w$ in derselben Nebenklasse aus V/Y.	o Ja o Nein
40	Für jedes $v \in V$ ist die Punktmenge $U*(v+Y) := \{U * (v + y) \mid y \in Y\}$ ein affiner Teilraum von $\mathcal{P}$.	o Ja o Nein
41	Für jedes $v \in V$ ist die Nebenklasse $v + Y$ ein Teilraum von V.	o Ja o Nein
42	Eine Nebenklasse $v + Y$ mit $v \in V$ ist genau dann ein Teilraum von V, wenn v in Y liegt.	o Ja o Nein
43	Genau eine Nebenklasse aus V/Y ist ein Teilraum von V.	o Ja o Nein
50	Sind $v, w \in V$, so haben die Punktmengen $U*(v+Y) := \{U * (v + y) \mid y \in Y\}$ und $U * (X + w) := \{U * (x + w) \mid x \in X\}$ einen gemeinsamen Punkt.	o Ja o Nein
51	Sind $v, w \in V$, so haben die Punktmengen $U*(v+Y) := \{U * (v + y) \mid y \in Y\}$ und $U * (X + w) := \{U * (x + w) \mid x \in X\}$ keinen gemeinsamen Punkt.	o Ja o Nein

3	Es sei $V := \mathbb{Q}^{2\times 3}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der 2×3-Matrizen, $W := \mathbb{Q}^{2\times 2}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen und $\varphi : V \to W$ die folgende $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung: $$\varphi = (M \longmapsto M \cdot A) : V \longrightarrow W, \quad \text{wobei} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 2} \text{ ist.}$$ Weiter seien die Basen $$\mathcal{B} := \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$ von V und $$\mathcal{C} := \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right)$$ von W gewählt. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{C}}\varphi^{\mathcal{B}}$ von φ bezüglich dieser beiden Basen und geben Sie die verlangten Einträge an.	
10	Der Eintrag in der 1. Zeile und der 1. Spalte von ${}_{\mathcal{C}}\varphi^{\mathcal{B}}$ lautet	1
11	Der Eintrag in der 2. Zeile und der 2. Spalte von ${}_{\mathcal{C}}\varphi^{\mathcal{B}}$ lautet	0
20	Der Eintrag in der 1. Zeile und der 3. Spalte von ${}_{\mathcal{C}}\varphi^{\mathcal{B}}$ lautet	3
21	Der Eintrag in der 2. Zeile und der 5. Spalte von ${}_{\mathcal{C}}\varphi^{\mathcal{B}}$ lautet	-2
30	Der Eintrag in der 3. Zeile und der 2. Spalte von ${}_{\mathcal{C}}\varphi^{\mathcal{B}}$ lautet	-2
31	Der Eintrag in der 4. Zeile und der 2. Spalte von ${}_{\mathcal{C}}\varphi^{\mathcal{B}}$ lautet	-2
40	Der Eintrag in der 3. Zeile und der 5. Spalte von ${}_{\mathcal{C}}\varphi^{\mathcal{B}}$ lautet	2
41	Der Eintrag in der 4. Zeile und der 5. Spalte von ${}_{\mathcal{C}}\varphi^{\mathcal{B}}$ lautet	-2
50	Der Eintrag in der 4. Zeile und der 6. Spalte von ${}_{\mathcal{C}}\varphi^{\mathcal{B}}$ lautet	-3
51	Der Eintrag in der 4. Zeile und der 4. Spalte von ${}_{\mathcal{C}}\varphi^{\mathcal{B}}$ lautet	-1

4	Es sei $V := \mathbb{R}^{1\times 3}$ und $W := \mathbb{R}^{1\times 4}$. Weiter sei $\mathcal{B}$ die Basis $([0,1,0],[0,1,1],[1,1,1])$ von V und $\mathcal{C}$ die Basis $([0,1,0,0],[0,0,-1,0],[0,0,0,1],[-1,0,0,0])$ von W und die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ durch $${}_{\mathcal{C}}\varphi^{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ gegeben. Beantworten Sie die folgenden Fragen:		
10	Wenn $[a,b,c,d] = \varphi([1,0,0])$ ist, was ist dann a?	1	n.a., evt.: o Ja o Nein
11	Wenn $[a,b,c,d] = \varphi([1,0,0])$ ist, was ist dann b?	1	n.a., evt.: o Ja o Nein
12	Wenn $[a,b,c,d] = \varphi([1,0,0])$ ist, was ist dann c?	0	n.a., evt.: o Ja o Nein
13	Wenn $[a,b,c,d] = \varphi([1,0,0])$ ist, was ist dann d?	0	n.a., evt.: o Ja o Nein
20	Was ist die Dimension von Bild φ?	2	n.a., evt.: o Ja o Nein
21	Was ist die Dimension von Kern φ?	1	n.a., evt.: o Ja o Nein
30	Liegt der Vektor $[1,2,2,-1]$ im Bild von φ?		o Ja o Nein
31	Liegt der Vektor $[1,1,-3,3]$ im Bild von φ?		o Ja o Nein
32	Liegt der Vektor $[0,1,1,0]$ im Bild von φ?		o Ja o Nein
33	Liegt der Vektor $[0,0,-1,1]$ im Bild von φ?		o Ja o Nein
40	Wenn $[a,b,c,d] = \varphi([0,0,1])$ ist, was ist dann a?	-1	n.a., evt.: o Ja o Nein
41	Wenn $[a,b,c,d] = \varphi([0,0,1])$ ist, was ist dann b?	-1	n.a., evt.: o Ja o Nein
42	Wenn $[a,b,c,d] = \varphi([0,0,1])$ ist, was ist dann c?	1	n.a., evt.: o Ja o Nein
43	Wenn $[a,b,c,d] = \varphi([0,0,1])$ ist, was ist dann d?	-1	n.a., evt.: o Ja o Nein
50	Wenn $[-1,-1,e]$ im Kern von φ liegt, was ist dann e?	-2	n.a., evt.: o Ja o Nein
51	Wenn $[1,1,e]$ im Kern von φ liegt, was ist dann e?	2	n.a., evt.: o Ja o Nein
52	Wenn $[-2,-2,e]$ im Kern von φ liegt, was ist dann e?	-4	n.a., evt.: o Ja o Nein
53	Wenn $[2,2,e]$ im Kern von φ liegt, was ist dann e?	4	n.a., evt.: o Ja o Nein

5 Eine affine Abbildung $A : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ zwischen affinen Teilräumen $(\mathcal{Q}, W, *)$ und $(\mathcal{Q}', W', *)$ eines affinen Raums $(\mathcal{P}, V, *)$ sei bezüglich Ursprüngen U von $\mathcal{Q}$ und $U' = A(U)$ von $\mathcal{Q}'$ durch die lineare Abbildung $\alpha\colon W \to W'$ gegeben, die bezüglich der Basen $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ von W und $\mathcal{B}' = (b'_1, b'_2)$ von W' durch

$${}_{\mathcal{B}'}\alpha^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

festgelegt ist.
In $\mathcal{Q}$ seien Punkte P_i $(i = 1, 2, 3)$ bezüglich $\mathcal{K} = (U, \mathcal{B})$ durch

$${}_{\mathcal{K}}P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; {}_{\mathcal{K}}P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; {}_{\mathcal{K}}P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

gegeben.

(i) Berechnen Sie die Koordinaten der Bildpunkte $A(P_i)$ bezüglich des Koordinatensystems $(U', \mathcal{B}')$ von $\mathcal{Q}'$.

(ii) Machen Sie auf Ihrem Blatt Papier eine Skizze von $\mathcal{Q}'$ durch (willkürliche) Annahme von U', $U' * b'_1$ und $U' * b'_2$ und durch (korrektes) Einzeichnen der Bildpunkte $A(U * b_i)$ für $i = 1, 2, 3$. Konstruieren Sie hieraus die Bildpunkte $A(P_i)$ für $i = 1, 2, 3$ ohne Rechnung.

6 $\alpha\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten K-Vektorräumen V und W.

(a) Zeigen Sie: Es gibt ein Paar $(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$ von Basen $\mathcal{B}'$ von V und $\mathcal{C}'$ von W, so dass die zugehörige Matrix ${}_{\mathcal{C}'}\alpha^{\mathcal{B}'}$ eine sogenannte *Quasi-Einheitsmatrix* ist, bei der links oben eine Einheitsmatrix (etwa aus $K^{r \times r}$) steht und sonst alle Einträge gleich 0 sind. [Wir schreiben $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, weil wir uns vorstellen, dass α bezüglich Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ durch ${}_{\mathcal{C}}\alpha^{\mathcal{B}}$ gegeben ist.] Ist r durch α eindeutig bestimmt oder hängt r von der Wahl des Basispaars $(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$ ab?

(b) Für gewisse Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen V bzw. W sei α durch

$${}_{\mathcal{C}}\alpha^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -8 & -1 & -2 & 12 & 12 \\ 8 & 1 & 2 & -12 & -11 \\ 24 & 3 & 6 & -36 & -16 \\ -48 & -6 & -12 & 72 & 28 \end{bmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie $\operatorname{Kern}\alpha$ durch Angabe der Spalten ${}_{\mathcal{B}}x$ für Basisvektoren $x \in \operatorname{Kern}\alpha$. Berechnen Sie ein *Komplement* $L \leq V$ zu $\operatorname{Kern}\alpha$, d. h., einen Teilraum L mit $V = L \oplus \operatorname{Kern}\alpha$. Geben Sie eine Basis von $\operatorname{Bild}\alpha$ an. Geben Sie ein Basispaar $(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$ an, für das ${}_{\mathcal{C}'}\alpha^{\mathcal{B}'}$ eine Quasi-Einheitsmatrix ist.

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	Es sei $K = \underline{3}$, V ein 4-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_4)$ und $\varphi \in \operatorname{end}(V)$ der Endomorphismus mit $${}_{\mathcal{B}}\varphi^{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$ Wir betrachten den Vektorraum-m-E ${}_{\varphi}V$.		
10	Ist $\langle b_1 \rangle_K$ ein φ-Teilraum von ${}_{\varphi}V$?		o Ja o Nein
11	Ist $\langle b_2 \rangle_K$ ein φ-Teilraum von ${}_{\varphi}V$?		o Ja o Nein
20	Ist $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle_K$ das φ-Erzeugnis von b_3?		o Ja o Nein
21	Ist $\langle b_1, b_2 \rangle_K$ der Durchschnitt von ${}_{\varphi}\langle b_3 \rangle$ und ${}_{\varphi}\langle b_2 \rangle$?		o Ja o Nein
30	Welche K-Dimension hat ${}_{\varphi}\langle b_2 \rangle$?	2	n.a., evt.: o Ja o Nein
31	Welche K-Dimension hat ${}_{\varphi}\langle b_1 \rangle$?	2	n.a., evt.: o Ja o Nein
32	Welche K-Dimension hat ${}_{\varphi}\langle b_1, b_2 \rangle$?	2	n.a., evt.: o Ja o Nein
40	Welchen Grad hat das Minimalpolynom von ${}_{\varphi}V$?	3	n.a., evt.: o Ja o Nein
41	Welchen Grad hat das Minimalpolynom von ${}_{\varphi}\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$?	3	n.a., evt.: o Ja o Nein
50	Welchen Grad hat das Minimalpolynom von ${}_{\varphi}\langle b_1, b_3 \rangle + {}_{\varphi}\langle b_2, b_3 \rangle$?	3	n.a., evt.: o Ja o Nein
51	Welchen Grad hat das Minimalpolynom von ${}_{\varphi}\langle b_1, b_3 \rangle \cap {}_{\varphi}\langle b_2, b_3 \rangle$?	3	n.a., evt.: o Ja o Nein

2	Wir betrachten einen n-dimensionalen K-Vektorraum-m-E ${}_{\varphi}V$ mit Basis $\mathcal{B}$. Bekanntlich ist $\beta = (x \mapsto {}_{\mathcal{B}}x)\colon V \to K^{n\times 1}$ ein K-Vektorraum-Isomorphismus. Es bezeichne φ' die auf $K^{n\times 1}$ verpflanzte lineare Abbildung zu φ. Durch φ' wird $K^{n\times 1}$ ein K-Vektorraum-m-E. Für $\mu \in K$ sei $V_\mu = \{x \in V \mid \varphi(x) = x\cdot\mu\}$, und mit m_φ sei das Minimalpolynom von φ bezeichnet.	
10	Ist β ein K-Vektorraum-m-E-Isomorphismus?	o Ja o Nein
11	Gilt $\beta \circ \varphi = \varphi' \circ \beta$?	o Ja o Nein
12	Gilt $\varphi' = \beta \circ \varphi \circ \beta^{-1}$?	o Ja o Nein
13	Gilt $\varphi = \beta^{-1} \circ \varphi' \circ \beta$?	o Ja o Nein
14	Gilt ${}_{\mathcal{B}}\varphi(x) = \varphi'({}_{\mathcal{B}}x)$ für alle $x \in V$?	o Ja o Nein
20	Haben ${}_{\varphi}V$ und ${}_{\varphi'}K^{n\times 1}$ dasselbe Minimalpolynom?	o Ja o Nein
21	Haben ${}_{\varphi}\langle x\rangle$ und ${}_{\varphi'}\langle {}_{\mathcal{B}}x\rangle$ dasselbe Minimalpolynom für alle $x \in V$?	o Ja o Nein
22	Haben T und $\beta(T)$ dasselbe Minimalpolynom für alle φ-Teilräume T von V?	o Ja o Nein
30	Kann man $\mathcal{B}$ immer so wählen, dass ${}_{\mathcal{B}}\varphi^{\mathcal{B}}$ eine Quasi-Einheitsmatrix ist?	o Ja o Nein
31	Kann man $\mathcal{B}$ immer so wählen, dass ${}_{\mathcal{B}}\varphi^{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist?	o Ja o Nein
40	Ist für Teiler $X - \mu X^0$ (vom Grad 1) von m_φ das Körperelement μ ein Eigenwert von φ?	o Ja o Nein
50	Gibt es zu jedem $\mu \in K$ und jedem $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ ein Beispiel ${}_{\varphi}V$, wo V_μ die Dimension k hat?	o Ja o Nein
51	Gibt es für $n = 2$ zu jedem $\mu \in K$ Beispiele für ${}_{\varphi}V$, wo das Minimalpolynom von ${}_{\varphi}V$ die Form $(X - \mu X^0)^2$ hat und $\dim V_\mu = 1$ ist?	o Ja o Nein
52	Gibt es für $n = 2$ zu jedem $\mu \in K$ Beispiele für ${}_{\varphi}V$, wo das Minimalpolynom von ${}_{\varphi}V$ die Form $(X - \mu X^0)^2$ hat und $\dim V_\mu = 2$ ist?	o Ja o Nein
53	Ist für jeden Teiler $u(X)$ von m_φ mit $1 \le \operatorname{Grad} u$ der Teilraum $\operatorname{Kern} u(\varphi) \neq \{0\}$?	o Ja o Nein

3	Wir betrachten einen n-dimensionalen K-Vektorraum-m-E ${}_{\varphi}V$. Ist $T \leq V$ ein φ-invarianter Teilraum, dann bezeichnen wir mit φ_T die Einschränkung von φ auf T. Mit m_φ sei das Minimalpolynom von φ bezeichnet.	
10	Ist für jeden Eigenwert λ von ${}_{\varphi}V$ das Polynom $X - \lambda X^0$ ein Teiler von m_φ?	o Ja o Nein
11	Ist jedes unzerlegbare Polynom $p(X)$ mit $p(\varphi) = 0$ gleich m_φ?	o Ja o Nein
12	Ist jedes unzerlegbare Polynom $p(X)$, für das für einen φ-invarianten Teilraum $T \neq 0$ gilt, dass $p(\varphi_T) = 0$ ist, ein Teiler von m_φ?	o Ja o Nein
20	Ist jedes Polynom $q(X)$ mit $q(\varphi) = 0$ ein Teiler von m_φ?	o Ja o Nein
21	Ist jedes Polynom $r(X)$ mit $r(\varphi) = 0$ ein Vielfaches von m_φ?	o Ja o Nein
30	m_1, m_2 seien die Minimalpolynome der φ-Teilräume T_1 bzw. T_2. Ist $m_1 \cdot m_2$ das Minimalpolynom von $T_1 + T_2$?	o Ja o Nein
40	m_1, m_2 seien die Minimalpolynome der φ-Teilräume T_1 bzw. T_2, und g sei der größte gemeinsame Teiler mit Leitkoeffizient 1 von m_1 und m_2. Ist g das Minimalpolynom von $T_1 \cap T_2$?	o Ja o Nein
50	Es sei $m_\varphi = m_1 \cdot m_2$ mit teilerfremden Polynomen m_1 und m_2 vom Grad ≥ 1. Gibt es immer φ-Teilräume T_1 und T_2 von ${}_{\varphi}V$ mit Minimalpolynomen m_1 bzw. m_2, so dass $V = T_1 \oplus T_2$ ist?	o Ja o Nein
51	Es sei $p \mid m_\varphi$ und $\mathrm{Grad}\, p \geq 1$ und p unzerlegbar. Gibt es immer einen Teilraum $T \leq {}_{\varphi}V$, dessen Minimalpolynom p ist?	o Ja o Nein

4	Berechnen Sie mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus für Polynome in $\mathbb{R}[X]$ den größten gemeinsamen Teiler g mit Leitkoeffizient 1 der beiden Polynome $$p = X^5 - 3X^3 - 7X^2 - 10X - 14X^0 \quad \text{und} \quad q = X^4 - 2X^3 - 4X - 4X^0$$ sowie zwei Polynome a und b aus $\mathbb{R}[X]$, so dass $g = a \cdot p + b \cdot q$ ist.		
10	Welchen Grad hat das Polynom g?	2	n.a., evt.: o Ja o Nein
11	Welchen Grad hat das Polynom p/g?	3	n.a., evt.: o Ja o Nein
12	Welchen Grad hat das Polynom q/g?	2	n.a., evt.: o Ja o Nein
13	Wie groß ist die Summe der Koeffizienten des Polynoms g?	3	n.a., evt.: o Ja o Nein
20	Gibt es in $\mathbb{R}[X]$ einen größten gemeinsamen Teiler von p und q, der weder gleich g noch gleich $-g$ ist?		o Ja o Nein
21	Gibt es in $\mathbb{R}[X]$ einen größten gemeinsamen Teiler $d = \sum_{i=0}^{\text{Grad}\, d} d_i X^i$ von p und q mit $d_0 = -\sqrt{29}$?		o Ja o Nein
22	Gibt es in $\mathbb{R}[X]$ einen größten gemeinsamen Teiler $d = \sum_{i=0}^{\text{Grad}\, d} d_i X^i$ von p und q mit $d_1 = \sqrt{41}$?		o Ja o Nein
23	Gibt es in $\mathbb{R}[X]$ einen größten gemeinsamen Teiler $d = \sum_{i=0}^{\text{Grad}\, d} d_i X^i$ von p und q mit $d_2 = -\sqrt{73}$?		o Ja o Nein
30	Welchen Grad hat das Polynom a?	1	n.a., evt.: o Ja o Nein
31	Welchen Grad hat das Polynom b?	2	n.a., evt.: o Ja o Nein
40	Wie groß ist die Summe der Koeffizienten des Polynoms a?	-2	n.a., evt.: o Ja o Nein
41	Wie groß ist die Summe der Koeffizienten des Polynoms b?	7	n.a., evt.: o Ja o Nein
50	Gibt es in $\mathbb{R}[X]$ Polynome $a' \neq a$ und $b' \neq b$, so dass $g = a' \cdot p + b' \cdot q$ ist?		o Ja o Nein
51	Gibt es in $\mathbb{R}[X]$ ein Polynom $a' \neq a$, so dass $g = a' \cdot p + b \cdot q$ ist?		o Ja o Nein
52	Gibt es in $\mathbb{R}[X]$ ein Polynom $b' \neq b$, so dass $g = a \cdot p + b' \cdot q$ ist?		o Ja o Nein

5 In einem Vektorraum V über $\mathbb{Q}$ seien lineare Abbildungen $\varphi : V \to V$ und $\psi : V \to V$ durch ihre Matrizen

$$_{\mathcal{C}}\varphi^{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -8 & 4 & 0 & -8 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad {}_{\mathcal{C}}\psi^{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 18 & 12 \\ -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

bezüglich Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von V gegeben.

(a) Berechnen Sie Basen $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}'$ von V, bezüglich derer die Matrix von φ eine Quasi-Einheitsmatrix ist.

(b) Berechnen Sie Basen $\mathcal{B}''$ und $\mathcal{C}''$ von V, bezüglich derer die Matrix von ψ eine Quasi-Einheitsmatrix ist.

(c) Ermitteln Sie jeweils eine Eigenvektor-Basis von ${}_{\varphi}V$ bzw. von ${}_{\psi}V$, falls eine existiert.

Hinweis: Das Minimalpolynom von φ ist $X(X^2 + 7X + 20)$ und das von ψ ist $X \cdot (X+1)(X-2)$. Dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden.

6 Untersuchen Sie den folgenden $\mathbb{R}$-Vektorraum-m-E ${}_{\varphi}V$. Er habe eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_4)$ und den Endomorphismus φ mit ${}_{\mathcal{B}}\varphi^{\mathcal{B}} = A = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Das Minimalpolynom von ${}_{\varphi}V$ zu berechnen, wäre für diese Übungsaufgabe zu rechenaufwändig. Deshalb helfen wir.

(a) Zeigen Sie, dass $T_1 = \langle b_1,\, b_2 + b_3,\, b_4 \rangle_{\mathbb{R}}$ und $T_1 = \langle b_1,\, b_2 - b_4,\, b_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ φ-Teilräume von ${}_{\varphi}V$ sind. Berechnen Sie $T_1 \cap T_2$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom $d(X)$ von $T_1 \cap T_2 \leq {}_{\varphi}V$. Hat $T_1 \cap T_2$ Eigenräume?

(b) Ist 3 ein Eigenwert des φ-Teilraums T_1 [der Abbildung $\varphi|_{T_1}$]? Was ist das Minimalpolynom von T_1 [der Abbildung $\varphi|_{T_1}$]?

(c) Gibt es in T_2 einen Vektor y mit $\varphi(y) = -2y$? Was ist das Minimalpolynom des φ-Teilraums T_2 [der Abbildung $\varphi|_{T_2}$]?

(d) Ist $V = T_1 + T_2$? Was ist das Minimalpolynom von ${}_{\varphi}V$ [der Abbildung φ]?

(e) Schreiben Sie ${}_{\varphi}V$ als innere direkte Summe von drei φ-Teilräumen, deren Basen Sie angeben.

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

1	In dieser Aufgabe betrachten wir kleinste gemeinsame Vielfache und größte gemeinsame Teiler von (von 0 verschiedenen) Polynomen über einem Körper K. Dabei bezeichnen wir den größten gemeinsamen Teiler mit Leitkoeffizient 1 und das kleinste gemeinsame Vielfache mit Leitkoeffizient 1 abkürzend mit „der ggT" bzw. „das kgV".	
10	Kann man das kgV zweier $\mathbb{Q}$-Polynome durch eine ggT-Berechnung [EA] ermitteln, ohne eine volle Faktorisierung dieser Polynome durchzuführen?	o Ja o Nein
20	Die $\mathbb{R}$-Polynome p und q haben die Grade 70 und 80, ihr ggT den Grad 62. Welchen Grad hat das kgV von p und q?	n.a., evt.: o Ja o Nein 88
21	Die $\mathbb{R}$-Polynome p und q haben die Grade 51 und 37, ihr kgV den Grad 76. Welchen Grad hat das ggT von p und q?	n.a., evt.: o Ja o Nein 12
22	Ein $\mathbb{R}$-Polynom p habe den Grad 10, sein ggT mit dem $\mathbb{R}$-Polynom q den Grad 5, das kgV der beiden den Grad 20. Welchen Grad hat q?	n.a., evt.: o Ja o Nein 15
30	Von den $\mathbb{Q}$-Polynomen p und q kennt man die Grade ihres ggT und ihres kgV, nämlich 12 und 21. Bestimmen Sie die Summe der Grade von p und q.	n.a., evt.: o Ja o Nein 33
31	Zwei Polynome p und q über dem Körper $\mathbb{C}$ haben einen ggT vom Grad 19 und ein kgV vom Grad 46. Wie groß ist die Summe der Grade von p und q?	n.a., evt.: o Ja o Nein 65
40	p und q seien Polynome vom Grad 8 und 9 über über dem Körper $K = \underline{11}$. Ihr ggT habe den Grad 1. Welchen Grad hat das kgV von p und q?	n.a., evt.: o Ja o Nein 16
41	p und q seien Polynome vom Grad 8 und 9 über über dem Körper $K = \underline{13}$. Ihr ggT habe den Grad 2. Welchen Grad hat das kgV von p und q?	n.a., evt.: o Ja o Nein 15
50	Wie viele größte gemeinsame Teiler besitzen zwei Polynome vom Grad 7 über dem Körper $K = \underline{5}$?	n.a., evt.: o Ja o Nein 4
51	Wie viele kleinste gemeinsame Vielfache besitzen zwei Polynome vom Grad 7 über dem Körper $K = \underline{5}$?	n.a., evt.: o Ja o Nein 4
52	Wie viele größte gemeinsame Teiler besitzen zwei Polynome vom Grad 5 über dem Körper $K = \underline{7}$?	n.a., evt.: o Ja o Nein 6
53	Wie viele kleinste gemeinsame Vielfache besitzen zwei Polynome vom Grad 5 über dem Körper $K = \underline{7}$?	n.a., evt.: o Ja o Nein 6

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

2	Ist K ein Körper, $d \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{d\times d}$, dann nennen wir das normierte Polynom m_A kleinsten Grades in $K[X]$, für das $m_A(A) = 0$ ist, das **Minimalpolynom** von A. Dies ist das Minimalpolynom des Endomorphismus $(v \mapsto Av) : K^{d\times 1} \to K^{d\times 1}$. Genauso übertragen wir auch die Begriffe „Eigenraum", „Eigenwert" und „Hauptraum" auf quadratische Matrizen. Beantworten Sie die folgenden Fragen.	
10	Ist das Minimalpolynom von $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ unzerlegbar?	o Ja o Nein
11	Ist das Minimalpolynom von $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ unzerlegbar?	o Ja o Nein
12	Ist das Minimalpolynom von $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ unzerlegbar?	o Ja o Nein
13	Ist das Minimalpolynom von $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ unzerlegbar?	o Ja o Nein
20	Gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, für das das Minimalpolynom von $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ unzerlegbar ist?	o Ja o Nein
21	Gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$, für das das Minimalpolynom von $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ unzerlegbar ist?	o Ja o Nein
30	Welche Dimension hat der Eigenraum zum Eigenwert $17,5$ der Matrix $\begin{bmatrix} 17,5 & 1 \\ 0 & 17,5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$?	n.a., evt.: o Ja o Nein 1
31	Welche Dimension hat der Eigenraum zum Eigenwert $17,5$ der Matrix $\begin{bmatrix} 17,5 & 1 \\ 0 & 17,5 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$?	n.a., evt.: o Ja o Nein 1
32	Welche Dimension hat der Eigenraum zum Eigenwert $5 \in \underline{7}$ der Matrix $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \in \underline{7}^{2\times 2}$?	n.a., evt.: o Ja o Nein 1
40	Was ist die höchste Dimension eines Hauptraums von $\begin{bmatrix} 17,5 & 1 \\ 0 & 17,5 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$?	n.a., evt.: o Ja o Nein 2
41	Was ist die höchste Dimension eines Hauptraums von $\begin{bmatrix} 17,5 & 1 \\ 0 & 17,5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$?	n.a., evt.: o Ja o Nein 2
42	Was ist die höchste Dimension eines Hauptraums von $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \in \underline{7}^{2\times 2}$?	n.a., evt.: o Ja o Nein 2
50	Welche Dimension hat der Hauptraum von $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ zum Faktor $X - 5 \cdot X^0$ des Minimalpolynoms dieser Matrix?	n.a., evt.: o Ja o Nein 2

Autoren: Prof. Dr. U. Schoenwaelder, Dr. V. Felsch, M. Neunhöffer (Lehrstuhl D für Mathematik)

51	Welche Dimension hat der Hauptraum von $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ zum Faktor $X - 5 \cdot X^0$ des Minimalpolynoms dieser Matrix?	n.a., evt.: o Ja o Nein 1
52	Welche Dimension hat der Hauptraum von $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \in \underline{7}^{2\times 2}$ zum Faktor $X + 2 \cdot X^0$ des Minimalpolynoms dieser Matrix?	n.a., evt.: o Ja o Nein 1

3	In dieser Aufgabe sei jeweils ${}_\varphi V$ ein K-Vektorraum mit Endomorphismus φ. Mit x und y bezeichnen wir Vektoren aus V.	
10	Gibt es einen K-Vektorraum ${}_\varphi V$ (über irgend einem Körper K), wo ein Eigenraum V_λ einen Eigenraum V_μ mit $\mu \neq \lambda$ enthält?	o Ja o Nein
11	Gibt es einen $\mathbb{R}$-Vektorraum ${}_\varphi V$, wo ein Eigenraum V_λ einen Eigenraum V_μ mit $\mu < \lambda$ enthält?	o Ja o Nein
12	Gibt es einen $\mathbb{R}$-Vektorraum ${}_\varphi V$, wo ein Eigenraum V_λ einen Eigenraum V_μ mit $\mu > \lambda$ enthält?	o Ja o Nein
13	Gibt es einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum ${}_\varphi V$, wo ein Eigenraum V_λ in einem Eigenraum V_μ mit $\mu < \lambda$ enthalten ist?	o Ja o Nein
14	Gibt es einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum ${}_\varphi V$, wo ein Eigenraum V_λ in einem Eigenraum V_μ mit $\mu > \lambda$ enthalten ist?	o Ja o Nein
20	Gibt es ein Beispiel ${}_\varphi V$, wo die Summe $V_\lambda + V_\mu$ zweier φ-Eigenräume einen φ-Eigenraum V_ν mit $\nu \notin \{\lambda, \mu\}$ enthält?	o Ja o Nein
21	Gibt es ein Beispiel ${}_\varphi V$, wo die Summe $V_\lambda + V_\mu$ zweier φ-Eigenräume in einem φ-Eigenraum V_ν mit $\nu \notin \{\lambda, \mu\}$ enthalten ist?	o Ja o Nein
30	Ist mit $\lambda, \mu \in K$ auch $\lambda + \mu$ ein Eigenwert von ${}_\varphi V$?	o Ja o Nein
31	Ist mit $\lambda, \mu \in K$ auch $\lambda \cdot \mu$ ein Eigenwert von ${}_\varphi V$?	o Ja o Nein
40	Gibt es einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum ${}_\varphi V$, wo alle natürlichen Zahlen von 1 bis 100 Eigenwerte von ${}_\varphi V$ sind?	o Ja o Nein
41	Gibt es einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum ${}_\varphi V$, wo die Eigenwerte von ${}_\varphi V$ gerade die positiven Teiler der Zahl 60 sind?	o Ja o Nein
42	Gibt es einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum ${}_\varphi V$, wo die Eigenwerte von ${}_\varphi V$ gerade die negativen Teiler der Zahl 60 sind?	o Ja o Nein
50	Kann ein Hauptraum, der kein Eigenraum ist, das φ-Erzeugnis eines einzigen Vektors sein?	o Ja o Nein
51	Gibt es ein Beispiel ${}_\varphi V$ mit $x \in {}_\varphi V$, wo ${}_\varphi\langle x\rangle$ einen eindimensionalen φ-invarianten Teilraum $\langle y\rangle_K$ echt enthält [${}_\varphi\langle x\rangle > \langle y\rangle$]?	o Ja o Nein

4	Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $\varphi, \psi \in \mathrm{end}(V)$ und p und q Polynome in $K[X]$. Damit ist ${}_\varphi V$ ein K-Vektorraum-m-E. Weiter sei das Minimalpolynom m_φ von der Form $$m_\varphi = v_1 v_2 \cdots v_r \quad \text{mit } r \geq 3$$ und Polynomen $v_1, \ldots, v_r \in K[X]$, die paarweise teilerfremd und vom Grad mindestens 1 sind. Schließlich sei jeweils T_i der Hauptraum von ${}_\varphi V$ zu v_i für $1 \leq i \leq r$. Sind die folgenden Aussagen unter diesen Voraussetzungen immer richtig?	
10	Wenn $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ gilt, dann ist Kern φ ein ψ-invarianter Teilraum.	o Ja o Nein
11	Wenn $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ gilt, dann ist Kern ψ ein φ-invarianter Teilraum.	o Ja o Nein
12	Wenn $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ gilt, dann ist Bild φ ein ψ-invarianter Teilraum.	o Ja o Nein
13	Wenn $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ gilt, dann ist Bild ψ ein φ-invarianter Teilraum.	o Ja o Nein
20	Wenn $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ gilt, dann ist $p(\varphi) \circ q(\psi) = q(\psi) \circ p(\varphi)$.	o Ja o Nein
21	Wenn $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ gilt, dann ist $p(\varphi) \circ q(\psi) = p(\psi) \circ q(\varphi)$.	o Ja o Nein
30	Wenn $x \in V$ und $m \in K[X]$ ist mit $m(\varphi)(x) = 0$, dann ist $m(\varphi)(\varphi^i(x)) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$.	o Ja o Nein
31	Wenn $x \in V$ und $m \in K[X]$ ist mit $m(\varphi)(x) = 0$, dann ist $m(\varphi)(y) = 0$ für alle $y \in {}_\varphi\langle x \rangle$.	o Ja o Nein
40	$T_1 \oplus T_2 = \text{Kern } v_1(\varphi) \circ v_2(\varphi)$.	o Ja o Nein
41	$T_1 \oplus T_2 = \text{Bild } v_3(\varphi) \circ \cdots \circ v_r(\varphi)$.	o Ja o Nein
50	$T_1 \cap \text{Bild } v_2(\varphi) \neq \{0\}$.	o Ja o Nein
51	$T_1 \oplus T_3 \leq \text{Bild } v_2(\varphi)$.	o Ja o Nein

5 Diagonalmatrizen sind nicht nur schön, sondern auch praktisch! Wir sehen das am folgenden Beispiel einer Differenzengleichung. [Ähnlich verfährt man bei Differentialgleichungen.]

Die Fibonacci-Folge $f = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ wird durch die Rekursionsfolge $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ und die Anfangswerte $f_1 = 0$, $f_2 = 1$ definiert. [Sie kommt in vielen biologischen Anwendungen vor. Es gibt eine mathematische Zeitschrift, *The Fibonacci Quarterly*, die sich mit ihr und ihren Anwendungen beschäftigt.] Wir fragen: Wie kann man f_{1000} ausrechnen? Gibt es Wege, ohne vorher $f_3, f_4, \ldots, f_{999}$ zu berechnen?

Dazu bringen wir das Problem zunächst in die Sprache der Linearen Algebra: f_{k+2} ergibt sich linear aus den beiden vorhergehenden Gliedern:

$$\begin{bmatrix} f_{k+2} \\ f_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{bmatrix}, \quad x_{k+1} = A \cdot x_k \ \text{ für } \ x_k = \begin{bmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{bmatrix},$$

also $x_{k+1} = A^k x_1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.Wie also berechnet man hohe Potenzen einer quadratischen Matrix? Die Idee ist, dass dies für eine Diagonalmatrix einfach ist:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{ergibt} \quad D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Eine Eigenvektorbasis von $V = \mathbb{R}^{2\times 1}$ zum Endomorphismus $\varphi := \varphi_A = (x \to Ax)$ würde uns eine Diagonalmatrix D liefern! Wie hängt also D mit A zusammen, und wie erhält man A^k aus D^k? Welche Formel ergibt sich für f_k? Berechnen Sie f_{10} und f_{40}.

6

(a) Wir nehmen einmal an, dass sich die Bevölkerung Nordrhein-Westfalens (NRW) nicht durch Tod oder Geburt oder durch Wegzug oder Zuzug aus dem Ausland verringere oder vergrößere. Vielmehr soll sich die Einwohnerzahl nur durch Wegzug und Zuzug aus anderen Bundesländern verändern. Die Änderungsraten pro Jahr seien konstant: $\frac{1}{10}$ der Einwohner der anderen Bundesländer ziehe im jeweils folgenden Jahr nach NRW, $\frac{2}{10}$ der Einwohner NRWs ziehe im folgenden Jahr in andere Bundesländer um.

Wenn das immer so weiter ginge, würde sich NRW schließlich entvölkern? Oder würde die Einwohnerzahl explodieren? Oder kann man mit einer Stabilisierung der Einwohnerzahl rechnen?

(b) Bei einer Epidemie werden jeden Monat die Hälfte der gesunden Leute krank, und ein Viertel der Kranken stirbt. Was passiert im Laufe der Zeit?