Lineare Algebra

Zusammenfassung für die Vordiplomsklausur WS 01 / 02

§ 2 Abbildungen

1.2 Definition

Seien M, N Mengen,
eine *Abbildung* f von M nach N ist eine Vorschrift, die jedem $x \in M$ genau ein Element $f(x) \in N$ zuordnet.

M heißt ***Definitionsbereich*** von f
N heißt ***Wertebereich*** (Bildbereich) von f

1.5 Definition

$f: M \to N$ Abbildung

Für $X \subseteq M$ sei
$f(X) := \{ f(x) \mid x \in X \} = \{y \in N \mid \exists\, x \in X \text{ mit } y = f(x) \} \subseteq N$ heißt das ***Bild von X***
Für $Y \subseteq N$ sei
$f^{-1}(Y) := \{x \in M \mid f(x) \in Y\} \subseteq M$ heißt das ***Urbild von Y***

Die Mengen $f^{-1}(\{y\}) \subseteq M$, $y \in N$ heißen die ***Fasern von f***

f heißt ***surjektiv***, falls $f(M) = N$
[falls zu jedem $y \in N$ ein $x \in M$ existiert mit $f(x) = y$]

f heißt ***injektiv***, falls gilt: sind $x, x' \in M$ mit $f(x) = f(x')$ dann ist $x = x'$
[falls gilt: sind $x, x' \in M$ mit $x \neq x'$, dann ist $f(x) \neq f(x')$]

f heißt ***bijektiv***, falls f injektiv und surjektiv ist

1.7 Definition

Seien $f: M \to N$ und $g: L \to M$ Abbildungen
Dann heißt die Abbildung $f \circ g : L \to M$, $x \to f \circ g(x) := f(g(x))$ heißt die ***Komposition von f mit g.***

f bijektiv $\Leftrightarrow$ f besitzt eine ***Umkehrabbildung***, d. h. es existiert
$g: N \to M$ mit $g \circ f = id_M$ und $f \circ g = id_N$

Ist f bijektiv und g Umkehrabbildung von f, dann ist g durch f eindeutig bestimmt und wird mit f^{-1} bezeichnet.

tobias.rick@diamond-productions.de www.diamond-productions.de

1.14 Definition

Eine Menge K heißt ***Körper*** (field) wenn zwei Abbildungen definiert sind:
$+ : K \times K \to K,\ (a,b) \to a + b$
$\bullet : K \times K \to K,\ (a,b) \to a \bullet b$
so dass gilt:

(1) $(a+b)+c = a+(b+c)\ \forall\, a,b,c \in K$
(2) $\exists\, 0 \in K$ mit $a + 0 = 0 + a$, $\forall\, a \in K$
(3) $\forall\, a \in K$ existiert $-a \in K$ mit $a + (-a) = 0 = -a + a$
(4) $a + b = b + a\ \forall\, a,b \in K$
(5) $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)\ \ \forall\, a,b,c \in K$
(6) $\exists\, 1 \in K,\ 1 \neq 0$ mit $1 \bullet a = a \bullet 1 = a,\qquad \forall\, a \in K$
(7) $\forall\, a \in K,\ a \neq 0\ \exists\, a^{-1} \in K$ mit $a \bullet a^{-1} = 1 = a^{-1} \bullet a$
(8) $a \bullet b = b \bullet a,\ \ \forall\, a,b \in K$
(9) $a \bullet (b+c) = ab + ac$ und $(a+b)c = ac + bc\ \forall\, a,b,c \in K$

1.29 Bemerkung

(a) Ein homogenes LGS hat immer eine Lösung (mind. eine), nämlich $\begin{pmatrix} 0 \\ : \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$, diese heißt auch die triviale Lösung.

(b) Hat ein homogenes LGS weniger Gleichungen als Unbekannte ($m < n$), dann hat es eine nichttriviale Lösung.

§ 5 Äquivalenzrelationen

M Menge

1.33 Definition

(a) Eine ***Relation*** R auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$
Schreibweise: $x\, R\, y :\Leftrightarrow (x,y) \in R$
(b) Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt
(R) ***reflexiv***, falls $(x,x) \in R\ \forall\, x \in M$
(S) ***symmetrisch***, falls gilt: $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$
(A) ***antisymmetrisch***, falls gilt: $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R \Rightarrow x = y$
(T) ***transitiv***, falls gilt: $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$
(c) Eine Relation, die (R), (S), (T) erfüllt heißt ***Äquivalenzrelation***
(d) Eine Relation, die (R), (A), (T) erfüllt heißt ***(Halb-) Ordnung***.

1.35 Definition

Sei R eine Äquivalenzrelation auf M.
Für $x \in M$ hießt $C_x := \{\, y \in M \mid x\, R\, y \,\}$ eine ***Äquivalenzklasse von R***.

M / R := Menge der Äquivalenzklassen von R
($M / R \subseteq Pot(M)$, $M / R \mathrel{\hat{=}}$ „M mod R“)

1.37 Definition

Eine ***Partition*** von M ist eine Menge P von nichtleeren Teilmengen von M, die ***Teile*** von P mit ($P \subseteq Pot(M)$):

(a) $M = \bigcup_{C \in P} C$ (= { $x \in M$ | es existiert $C \in P$ mit $x \in C$ })

(b) Sind $C_1, C_2 \in P$ mit $C_1 \neq C_2$, dann ist $C_1 \cap C_2 = \mathfrak{I}$

1.38 Bemerkung

(a) Sei R eine Äquivalenzrelation auf M, dann gilt:
M / R ist eine Partition von M.

(b) (Umkehrung von (a)) Sei P eine Partition von M, dann existiert eine Äquivalenzrelation R auf M mit M / R = P.

1.40 Definition und Bemerkung

Sei R eine Äquivalenzrelation auf M
$\pi : M \rightarrow M / R, x \rightarrow C_x$
heißt die zu R gehörige ***kanonische*** (natürliche) Abbildung.
π ist surjektiv und ihre Fasern sind gerade die Äquivalenzklassen von R.

1.41 Bemerkung

Sei N eine Menge und $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung.
Sei R_f Äquivalenzrelation, R_f: $x R_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$, $C_x = f^{-1}(\{f(x)\})$
und π: $M \rightarrow M / R_f$ die zugehörige kanonische Abbildung.
Dann existiert injektive Abbildung ¯,f: $M / R_f \rightarrow N$ mit f = ¯,f $\circ \pi$

Kapitel II – Vektorräume und lineare Abbildungen

Eine ***Verknüpfung*** auf einer Menge M ist eine Abbildung $M \times M \rightarrow M$ (z. B. +)
Eine ***algebraische Struktur***, ist eine Menge M, auf der eine (oder mehrere) Verknüpfung(en) definiert ist (sind).

2.1 Definition

Eine Menge G heißt ***Gruppe***, wenn eine Verknüpfung $*: G \times G \rightarrow G, (x,y) \rightarrow x*y$, definiert ist, so dass gilt:
(1) $(x * y) * z = x * (y * z)$ 8 $x,y,z \in G$
(2) Es existiert $e \in G$ mit $e * x = x * e = x$ 8 $x \in G$
(3) Für alle $x \in G$ existiert $x' \in G$ mit $x * x' = e = x' * x$
Gilt zusätzlich
(4) $x * y = y * x$ 8 $x,y \in G$, dann heißt G ***abelsch*** (kommutativ)

2.2 Bemerkung

Sei (G,*) eine Gruppe.

(a) Das Element e aus 2.1 (2) heißt das ***neutrale Element von G*** (es ist eindeutig bestimmt.)

(b) Sei $x \in G$. Das Element x' aus 2.1 (3) ist durch x eindeutig bestimmt. Es heißt das zu x ***inverse Element***.

(c) Ist G abelsch, dann schreiben wir oft + für *, 0 für e und –x für x'

(d) Oft schreiben wir G multiplikativ, d.h. • für * (oder nichts), 1 für e und x^{-1} für x'

2.4 Definition

Seien G, H Gruppen.
Eine Abbildung $\ni: G \to H$ heißt ***(Gruppen-)Homomorphismus***, wenn gilt:
$\ni(xy) = \ni(x)\ \ni(y)$ für alle $x,y \in G$

Verknüpfung in G   Verknüpfung in H

Eine Homomorphismus $\ni : G \to H$ heißt
Monomorphismus, wenn er *injektiv* ist,
Epimorphismus, wenn er *surjektiv* ist und
Isomorphismus, wenn er *bijektiv* ist

G und H heißen ***isomorph***, falls ein Isomorphismus $\ni : G \to H$ existiert.
Schreibweise: $G \cong H$

2.6 Definition

Sei (G,•) eine Gruppe, $U \subseteq G$
U heißt ***Untergruppe*** von G, geschrieben U • G, falls U bezüglich der Verknüpfung • von G selbst eine Gruppe ist.
(präziser: falls gilt: $uv \in U$, 8 $u,v \in U$
Damit erhalten wir Verknüpfung auf (U,•): $U \times U \to U$, $(u,v) \to u \bullet v$
Verknüpfung auf G
U soll bzgl. dieser Verknüpfung eine Gruppe sein.)

2.8 Konvention

Sei (A,+) eine abelsche Gruppe, $a \in A$, $U,V \subseteq A$
Dann schreiben wir:
$a + U := \{ a + u \mid u \in U\} \subseteq A$
$U + V := \{u + v \mid u \in U, v \in V\} \subseteq A$

2.9 Definition

Für $x,y \in \mathbb{Z}$ schreiben wir:
$x \equiv y \ (\text{mod } n) :\Leftrightarrow$
$x \text{ mod } n = y \text{ mod } n$
Klar: $\equiv (\text{mod } n)$ ist Äquivalenzrelation

Für $x,y \in \mathbb{Z}$ gilt:
$(x + n\mathbb{Z}) + (y + n\mathbb{Z}) = (x+y) + n\mathbb{Z}$

Bemerkung

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit der Verknüpfung + aus 2.8 ist abelsche Gruppe mit genau n Elementen.
Die Abbildung $\bar{\ }$: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $x \to \bar{x}$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.
($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,+) heißt die ***Restklassengruppe modulo n***

2.11 Definition

Eine Menge R heißt ***Ring***, wenn auf R zwei Verknüpfungen
$+ : R \times R \to R$ und $\bullet : R \times R \to R$
definiert sind, so dass gilt:

(1) (R,+) ist abelsche Gruppe
(2) $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$ 8 $x,y,z \in R$
(3) Es existiert $1 \in R$ mit $1 \bullet x = x \bullet 1 = x$ 8 $x \in R$
(4) Distributivgesetzte:
$x(y+z) = xy + xz$ und $(x+y)z = xz + yz$, 8 $x,y,z \in R$

Gilt zusätzlich:
(5) $x \bullet y = y \bullet x$ 8 $x,y \in R$ dann heißt R ***kommutativ***

2.12 Beispiele

(a) ($\mathbb{Z}$, +, •) ist ein kommutativer Ring
(b) Körper sind kommutative Ringe

2.13 Definition

Sei R ein Ring

(a) Ein Element $x \in R$ heißt ***invertierbar*** (oder ***Einheit***), wenn ein $x' \in R$ existiert mit $x \bullet x' = 1 = x' \bullet x$
Ist $x \in R$ invertierbar, dann ist x' durch x eindeutig bestimmt und wir schreiben: $x^{-1} := x'$.
$R^* :=$ Menge der Einheiten von R
(b) Sei S ein Ring und ∍ : $R \to S$ Abbildung.
∍ heißt ***Ringhomomorphismus***, wenn gilt:
(1) ∍ ist Gruppenhomomorphismus $(R,+) \to (S,+)$
(2) ∍ (xy) = ∍(x) ∍(y) 8 $x,y \in R$
∍ (1) = 1

Einheiten in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:
für $x \in \mathbb{Z}$ gilt:
$\bar{x} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(x,n) = 1$ (x und n sind teilerfremd)

2.16 Korollar

Sei n ÷ 2
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist Körper $\Leftrightarrow$ n ist Primzahl

Sei p eine Primzahl
$\Phi_p := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bezeichnet den endlichen Körper mit p Elementen

2.18 Definition (Matrix – Arithmetik)

Sei R kommutativer Ring.

(a) Für $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$ sei $A^t := (a_{ji}) \in R^{n \times m}$ $\quad 1 \bullet j \bullet n,\ 1 \bullet i \bullet m$
A^t heißt die ***Transponierte*** von A

(b) Für $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$ und $r \in R$ sei $r \cdot A := (r \cdot a_{ij}) \in R^{m \times n}$, $1 \bullet j \bullet n,\ 1 \bullet i \bullet m$
(skalare Multiplikation von A mit r)

(c) Für $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$ und $B = (b_{ij}) \in R^{m \times n}$ sei $A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \in R^{m \times n}$
die ***Summe von A und B***

(d) Für $A = (a_{ij}) \in R^{l \times m}$ und $B = (b_{ij}) \in R^{m \times n}$ sei $C = (c_{ij}) \in R^{l \times n}$ definiert durch:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \quad , 1 \bullet i \bullet l,\ \ 1 \bullet j \bullet n$$

$C =: A \cdot B =: A\,B$ heißt das ***Produkt von A und B***

AB ist nur definiert, falls die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist.

2.20 Definition

Sei R kommutativer Ring.

(a)

$0 \in R^{m \times n}$ bezeichnet die ***Nullmatrix***

d.h. $0 = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$ mit $a_{ij} = 0$ $\quad 8\ 1 \bullet i \bullet m,\ \ 1 \bullet j \bullet n$

(b)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $E_n = (\delta_{ij}) \in R^{n \times n}$, $\quad 1 \bullet i,j \bullet n$

mit $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & falls\, i = j \\ 0 & sonst \end{cases}$

E_n heißt die n-reihige ***Einheitsmatrix***

2.21 Satz

Sei R kommutativer Ring.

(a) Für alle $A, B, C \in R^{m \times n}$ gilt:

(1) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(2) $0 + A = A = A + 0$, $\quad 0 \in R^{m \times n}$

(3) $A + (-1)A = 0 = (-1)A + A$ $\quad 0 \in R^{m \times n}$

(4) $A + B = B + A$

(b)

(1) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, für alle $A \in R^{l \times m}$, $B \in R^{m \times n}$, $C \in R^{n \times p}$

(2) $E_m A = A = A E_n$ $\quad$ für alle $A \in R^{m \times n}$

(3) $(A+B)C = AC + BC$, $\quad$ für alle $A,B \in R^{l \times m}$, $C \in R^{m \times n}$
$A(B+C) = AB + AC$ $\quad$ für alle $A \in R^{l \times m}$, $B,C \in R^{m \times n}$

(4) $r(s \cdot A) = (r \cdot s)A$ $\quad$ für alle $r,s \in R$, $A \in R^{m \times n}$
$r(AB) = (rA)B = A(rB)$ für alle $r \in R$, $A \in R^{l \times m}$, $B \in R^{m \times n}$

(c)

(1) $(A^t)^t = A$, für alle $A \in R^{m \times n}$

(2) $(A+B)^t = A^t + B^t$, für alle $A,B \in R^{m \times n}$

(3) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$, für alle $A \in R^{l \times m}$, $B \in R^{m \times n}$

2.22 Korollar

Sei $n \in \mathbb{N}$, R kommutativer Ring.
$\Rightarrow R^{n \times n}$ ist ein Ring (bzgl. Matrix Addition und Multiplikation).
Die neutralen Elemente sind 0 (bzgl. +) und E_n (bzgl. •)

2.23 Definition

Sei R kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}$
$GL_n(R) := \{ A \in R^{n \times n} \mid A \text{ invertierbar} \} = (R^{n \times n})^*$
$GL_n(R)$ ist Gruppe, die ***volle lineare Gruppe über R***.
Es gilt:
$A \in GL_n(R) \Rightarrow A^t \in GL_n(R)$ und $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

§ 2 Vektorräume

Sei K ein Körper

2.25 Definition

Ein (K-) ***Vektorraum*** (Vektorraum über K) ist eine abelsche Gruppe (V,+) zusammen mit einer ***skalaren Multiplikation*** $K \times V \to V$, $(a,v) \to av$, so dass gilt:
(V1) $(a+b)\,v = av + bv \quad \forall\, a,b \in K,\ v \in V$
(V2) $a\,(v+v') = av + av' \quad \forall\, a \in K,\ v,v' \in V$
(V3) $a\,(bv) = (ab)\,v \quad \forall\, a,b \in K,\ v \in V$
(V4) $1\,v = v \quad \forall\, v \in V$
Die Elemente eines K –VR's heißen ***Vektoren***.

2.26 Bemerkungen

Sei V ein K-VR, dann gilt:
(a) $0 \cdot v = 0 \quad \forall\, v \in V$ (***Nullvektor***)
(b) $a \cdot 0 = 0 \quad \forall\, a \in K$
(c) $-v = (-1)\,v$
(d) $(-a)\,v = -(av) \quad \forall\, a \in K,\ v \in V$
(e) Für ein $a \in K$ und $v \in V$ gilt: $av = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $v = 0$

2.28 Definition

Sei V ein K-VR und $W \subseteq V$.
W heißt K-***Untervektorraum*** (UVR) von V, geschrieben $W \bullet V$, falls gilt:
(1) W ist Untergruppe von (V,+)
(2) $aw \in W \quad \forall\, a \in K,\ w \in W$

2.29 Bemerkung - Untervektorraumkriterium

Sei V ein K-VR, $W \subseteq V$. Dann gilt:
$W \bullet V \Leftrightarrow$
(UV1) $W \neq \Im$
(UV2) $w + w' \in W \quad \forall\, w,w' \in W$ (W ist abgeschlossen bzgl. +)
(UV3) $aw \in W \quad \forall\, a \in K,\ w \in W$
(W ist abgeschlossen bzgl. der skalaren Multiplikation)

2.31 Definition

Sei V ein K-VR.
(a)
Sei $(v_1,...,v_n)$ ein n-Tupel von Vektoren aus V (d.h. $v_i \in V$, $1\bullet i \bullet n$).
Eine ***Linearkombination*** (L.K.) von $(v_1,...,v_n)$ ist ein Element $v \in V$ der Form

$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ mit $a_i \in K$

(b)
Sei $\Im \neq M \subseteq V$. Wir setzen
<M> := { $v \in V$ | es existieren $v_1,...,v_n \in M$, so dass v eine L.K. von $(v_1,...,v_n)$ ist }
Menge aller Linearkombinationen von n-Tupeln aus M (n beliebig).

Ist $M = \Im$, dann setzen wir <M> := {0}

<M> heißt das ***Erzeugnis von M in V***

2.32 Satz

Sei V ein K-VR, $M \subseteq V$. Dann gilt:
(a) <M> • V
(b) Ist W • V mit $M \subseteq W$, dann ist <M> • W
(<M> ist ***der kleinste*** UVR von V, der M enthält)

2.33 Beispiele

(b)
Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ mit
Zeilen $z_1,...,z_m \in K^{1 \times n}$ und
Spalten $s_1,...,s_n \in K^m$

Sind $x_1,...,x_n \in K$, dann ist

$A \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix}$ eine L.K. von $(s_1,...,s_n)$, nämlich $A \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i s_i$

Sind $y_1,...,y_m \in K$, dann ist $(y_1,...,y_m)\bullet A$ eine L.K. von $(z_1,...,z_m)$,

nämlich $(y_1,...,y_m)\bullet A = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i$.

$< \{z_1,...,z_m\} > \bullet K^{1 \times n}$ heißt der ***Zeilenraum von A***
$< \{s_1,...,s_n\} > \bullet K^m$ heißt der ***Spaltenraum von A***

2.34 Definition

Seien V, W K-VR, ∍ : V→W
(1) ∍ heißt ***lineare Abbildung*** (K-Homomorphismus), falls gilt:
(a) ∍ (v + v') = ∍ (v) + ∍ (v') 8 v,v' ∈ V
(b) ∍ (av) = a ∍ (v) 8 a ∈ K, v ∈ V
Hom_K(V,W) := {ψ :V→W | ψ linear }

(2) Für W = V und ∍ linear, heißt ∍ ein Endomorphismus.
End_K(V) := Hom_K(V,V)

(3) Sei ∍ linear. Dann heißt ∍ ein
Monomorphismus, falls ∍ injektiv,
Epimorphismus, falls ∍ surjektiv,
Isomorphismus, falls ∍ bijektiv

V und W heißen isomorph, geschrieben V ≅ W, falls ein Isomorphismus ψ : V→W existiert.

2.36 Definition

Seien V, W K-VR, ∍ ∈ Hom_K(V,W)
(a) ***Kern*** ∍ := { v ∈ V | ∍ (x) = 0}, der ***Kern von ∍***
(b) ***Bild*** ∍ := {∍ (v) | v ∈ V}, das ***Bild von ∍***

2.37 Bemerkung

Vorraussetzungen wie in 2.36, dann gilt:
(a) Kern ∍ • V
(b) Bild ∍ • W
(c) ∍ injektiv ⇔ Kern ∍ = {0}
(d) ∍ surjektiv ⇔ Bild ∍ = W
(e) Sei v ∈ V und w = ∍ (v) ⇒ $∍^{-1}$({w}) = v + Kern ∍
(Faser von ∍ zu w)

2.38 Beispiele

(b) Sei A ∈ $K^{m\times n}$, b ∈ K^m. Dann gilt:
(1) Kern $∍_A$ = {c ∈ K^n | A• c = 0} ist die Lösungsmenge des homogenen LGS Ax=0
(2) Sei c ∈ K^n eine Lösung des LGS Ax=b.
Dann ist die Lösungsmenge dieses LGS gleich c+ Kern $∍_A$
(3) Lösbarkeitskriterium:
Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
(i) Ax = b ist lösbar
(ii) b ∈ Bild $∍_A$
(iii) b ∈ Spaltenraum von A
(iv) Spaltenraum von A = Spaltenraum von (A,b)

§ 3 Basis und Dimension

Sei K ein Körper, V ein K-VR

2.39 Definition !!!

(a)

Ein n-Tupel $(v_1,...,v_n)$ mit $v_i \in V$ heißt ***linear abhängig*** (l.a.), wenn $a_1,...,a_n \in K$ existieren mit $(a_1,...,a_n) \neq 0 \in K^{1 \times n}$ und $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$

Andernfalls heißt $(v_1,...,v_n)$ ***linear unabhängig*** (l.u.)

(b)

$M \subseteq V$ heißt ***linear abhängig***, wenn ein l.a. n-Tupel $(v_1,...,v_n)$ existiert mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ und $v_i \in M \qquad 1 \bullet i \bullet n$.

Andernfalls heißt M ***linear unabhängig***.

Insbesondere ist $\Im \subseteq V$ l. u.

Schreibweise: $<v_1,...,v_n> := <\{v_1,...,v_n\}> = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \mid \text{mit } a_i \in K \}$

2.40 Bemerkung

Sei $v_1,...,v_n \in V$ und seien $M' \subseteq M \subseteq V$

(a)

- (1) $0 \in M \Rightarrow M$ ist l.a.
- (2) $M = \{V\}$ mit $V \neq 0 \Rightarrow M$ ist l.u.
- (3) M' l.a. $\Rightarrow M$ ist l.a.
- (4) M l.u. $\Rightarrow M'$ ist l.u.

(b)!!! $(v_1,...,v_n)$ ist l.u. genau dann wenn gilt:

Sind $a_1,...,a_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$, dann ist $a_1=a_2=...=a_n=0$.

(Der Nullvektor lässt sich nur auf die triviale Weise aus $v_1,...,v_n$ linear kombinieren)

(c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) $(v_1,...,v_n)$ l.a
- (2) Ex existiert i_0 , $1 \bullet i_0 \bullet n$ mit $v_{i0} \in <v_1,...,v_{i0-1},v_{i0+1},...,v_n>$
- (3) Es existiert i_0, $1 \bullet i_0 \bullet n$ mit $<v_1,...,v_n> = <v_1,...,v_{i0-1},v_{i0+1},...,v_n>$

2.41 Definition

$A \in K^{m \times n}$ hat ***Spaltenstufenform***, wenn A^t Zeilenstufenform hat.

tobias.rick@diamond-productions.de

2.42 Beispiele

(b) !!!
Sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix in Zeilenstufenform, und seien $z_1,...,z_r$ die von 0 verschiedenen Zeilen von A.
Dann ist $(z_1,...,z_r)$ l.u.

analog:
Die von 0 verschiedenen Spalten einer Matrix in Spaltenstufenform sind l.u.

Insbesondere sind die Zeilen und Spalten von E_n l.u.

2.43 Definition

Sei $M \subseteq V$, $v_1,...,v_n \in V$

(a) M heißt ***Erzeugendensystem*** von V, wenn V = <M> ist
(b) V heißt ***endlich erzeugt*** (e.e.), wenn V ein endliches Erzeugendensystem besitzt.
(c) M heißt ***Basis*** von V, wenn M ein l.u. Erzeugendensystem von V ist.

$(v_1,...,v_n)$ heißt ***geordnete Basis*** von V, wenn $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ und wenn $\{v_1,...,v_n\}$ eine Basis ist.

2.45 Satz (Charakterisierung von Basen)

Für $M \subseteq V$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) M ist Basis von V
(2) M ist eine maximale l. u. Teilmenge von V
(d.h. M ist l.u. und ist $M \subsetneqq M' \subseteq V$, dann ist M' l. a.)
(3) M ist ein minimales Erzeugendensystem von V
(d.h. $\langle M \rangle = V$ und $\langle M' \rangle \neq V$ für alle $M' \subsetneqq M$)

2.46 Bemerkung

Sei $(v_1,...,v_n)$ eine geordnete Basis von V. Dann gilt:

Zu jedem $v \in V$ existieren eindeutig bestimmte $a_1,...,a_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

2.47 Satz

Sei $(v_1,...,v_m)$ eine geordnete Basis von V und seien $w_1,...,w_n \in V$. Dann gilt:
$n > m \Rightarrow (w_1,...,w_n)$ ist l.a.

2.48 Satz !

Sei V endlich erzeugt. Dann gilt:

(a) V besitzt eine endliche Basis

(b) Sind M_1, M_2 Basen von V,
dann sind M_1 und M_2 endlich und es gilt: $|M_1| = |M_2|$

(c) (*Basisergänzungssatz*): Sei $M' \subseteq V$ l.u.
Dann existiert Basis M von V mit $M' \subseteq M$

2.49 Definition !

Sei V endlich erzeugt, M eine Basis von V.
dim V := $\dim_K V := |M|$ heißt die ***Dimension von V***.
(Anzahl der Elemente einer Basis von V)

2.50 Beispiele

(a) $\dim K^n = n$

(b) $\dim K^{m \times n} = m \cdot n$

2.51 Korollar (zu 2.48)

Sei $\dim_K V = n$, $v_1,\ldots,v_n,v_{n+1} \in V$. Dann gilt:

(a) $(v_1,\ldots,v_n)$ l.u. $\Rightarrow (v_1,\ldots,v_n)$ ist geordnete Basis

(b) $V = \langle v_1,\ldots,v_n \rangle \Rightarrow (v_1,\ldots,v_n)$ ist geornete Basis

(c) $(v_1,\ldots,v_{n+1})$ l.a.

2.52 Korollar (zu 2.48)

Seien V und W e.e. K-VR. Dann gilt:
$V \cong W \Leftrightarrow \dim_K V = \dim_K W$

Ab jetzt: Basis ist immer als geordnete Basis zu verstehen.

2.53 Satz

Sei V e.d. (endlich-dimensionaler) K-VR, $U \subsetneqq V$. Dann gilt:
$\dim_K U < \dim_K V$

2.54 Beispiele (Version der komplexen Zahlen)

Sei V = $\mathbb{R}^{2x2}$, E:= E_2 = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in$ V und I := $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in$ V

$\mathbb{C}$:= < E, I > $\leq$ V

(E,I) l.u. : aE + bI = 0 $\Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ a = b = 0

$\Rightarrow$ E, I $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$
Insbesondere hat jedes C $\in$ L eine eindeutige Darstellung als C = xE+yI, mit x,y $\in \mathbb{R}$.

Es ist $I^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ = -E

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ ist kommutativer Ring mit neutralem Element E bzgl. • (ein Teilring von $\mathbb{R}^{2x2}$).

Ist C = xE+yI $\neq$ 0 (d.h. $x^2 + y^2 \neq 0$), dann ist $C \cdot \frac{1}{x^2+y^2}(xE - yI)) = E$, d. h. C ist invertierbar.

$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ ist Körper, der Körper der komplexen Zahlen.
{ xE | x $\in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ist in zu $\mathbb{R}$ isomorpher Teilkörper von $\mathbb{C}$ }

Ende des Stoffs für die Scheinklausur Nr. 1

2.55 Definition (elementare Matrizen)

Für m $\in \mathbb{N}$ defninieren wir Matrizen aus $K^{m \times m}$:

(1) Für $1 \leq i \neq j \leq m$ sei $T_{i,j}$ die Matrix, die aus E_m durch Vertauschen der Zeilen i und j ensteht.

(2) Für $1 \leq i \neq j \leq m$ und c $\in$ K sei $A_{i,j}(c) := E_m + c \cdot E_{i,j}$

(3) Für $0 \neq c \in K$ und $1 \leq i \leq m$ sei $M_i(c) := E_m + (c-1)E_{i,i}$

2.56 Bemerkung

Sei A $\in K^{m \times n}$

(a) T_{ij}, $A_{ij}(c)$, $M_i(c) \in K^{m \times m}$ sind invertierbar

(b) Ensteht A' aus A durch eine elementare Zeilentransformation vom Typ
(1) t_{ij} oder
(2) a_{ij} (c)voder
(3) m_i(c), dann gilt in den jeweiligen Fällen:
(1) A' = T_{ij} A
(2) A' = A_{ij} (c) A
(3) A' = M_i (c) A

(c) Analog werden elementare Spaltentransformationen von A durch Multiplikation von rechts mit elementaren Matrizen aus $K^{n \times n}$ bewirkt

(d) Ensteht B aus A durch eine Folge elementarer Zeilen- und Spaltenoperationen, dann exisitert S $\in GL_m(K)$ und T $\in GL_n(K)$ mit B = S A T

2.57 Bemerkung

Sei $A \in K^{m \times n}$, $S \in GL_m(K)$, $T \in GL_n(K)$

(a) $\varphi_S : K^m \to K^m$, $v \to Sv$, und
$\psi_T : K^{1 \times n} \to K^{1 \times n}$, $v \to vT$
sind K-VR-Isomorphismen

(b) Zeilenraum von A = Zeilenraum $S \cdot A$ und
Spaltenraum von A = Spaltenraum von $A \cdot T$

(c) Zeilenraum von A $\cong$ Zeilenraum von $A \cdot T$
Spaltenraum von A $\cong$ Spaltenraum von $S \cdot A$

2.58 Definition und Bemerkunge

Sei $A \in K^{m \times n}$

(a) A kann durch elementare Zeilen- und Spaltentransformationen in eine Matrix der Form
$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in K^{m \times n}$ mit $0 \le r \le \min\{m, n\}$ überführt werden.

(b) Es existieren $S \in GL_m(K)$ und $T \in GL_n(K)$ mit
$S\,A\,T = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ mit $0 \le r \le \min\{m, n\}$

(c) $\dim_k$ (Zeilenraum von A) = $\dim_k$ (Spaltenraum von A) = r mit r wie in (a) oder (b)

(d) rang A := $\dim_k$ (Zeilenraum von A) heißt der ***Rang von A***

2.59 Bemerkung (Charakterisierung von Rang)

Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann gilt:
rang A = Maximalzahl l.u. Zeilen von A = Maximalzahl l.u. Spalten von A

2.60 Bemerkung

Bringe A durch elementare Spaltentransformationen auf Spaltenstufenform A':

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & & & 0 \\ \hline \times & 0\ldots & 0 & \\ * & \times & & 0 \\ & * & & \\ \vdots & & \ldots & \\ & \vdots & & \\ **\ldots & & * & \end{array}\right)$$

r Spalten

Seien $s_1', \ldots, s_r'$ die von 0 verschiedenen Spalten von A'. Dann gilt:

(a) rang A = r

(b) $(s_1', \ldots, s_r')$ ist Basis vom Spaltenraum von A

2.62 Bemerkung (Verallgemeingerung)

Sei V m-dim. K-VR mit Basis $(v_1,\dots,v_m)$.
sei $\chi : V \to K^m$ der Isomorphismus aus dem Beweis von 2.52

$$\chi(v) := \begin{pmatrix} a_1 \\ : \\ a_m \end{pmatrix} \in K^m, \text{ falls } v = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i$$

seien $w_1,\dots,w_n \in B$
gesucht: Basis von $\langle w_1,\dots,w_n\rangle =: W \leq V$.
Methode: Berechne Basis $(u_1,\dots,u_r)$ von $\chi(W) \leq K^m$
$\Rightarrow (\chi^{-1}(u_1),\dots,\chi^{-1}(u_r))$ ist Basis von W.

2.64 Satz

Sei $A \in K^{m \times n}$ und $L_0 \leq K^n$ die Lösungsmenge des homogenen LGS Ax = 0.
Dann gilt:
$\dim_k L_0 = n - \text{rang } A$

2.65 Satz

Sei $A \in K^{n \times n}$ mit Spalten $s_1,\dots,s_n \in K^n$ und Zeilen $z_1,\dots,z_n \in K^{1 \times n}$
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(a) A invertierbar
(b) Es existiert $B \in K^{n \times n}$ mit $A B = E_n$
(c) Es existiert $C \in K^{n \times n}$ mit $C A = E_n$
(d) Das homogene LGS Ax = 0 hat nur die triviale Lösung
(e) Für jedes $b \in K^n$ hat das LGS Ax = b genau eine Lösung
(f) rang A = n
(g) $(z_1,\dots,z_n)$ ist l.u.
(h) $(s_1,\dots,s_n)$ ist l.u.

2.66 Korollar

Sei $A \in GL_n(K)$, $b \in K^n$. Dann gilt:
Die Lösung von Ax = b (eindeutig nach 2.65) ist gegeben durch $A^{-1}b$

2.67 Satz

Sei $A \in K^{m \times n}$, $L_0 \leq K^n$ die Lösungsmenge von Ax = 0. Dann gilt:

(1) L_0 ist UVR von K^n mit $\dim_K(L_0) = n - \text{rang } A$
(2) Die Anzahl der abhängigen Variablen ist gleich rang A
(3) Sei $b \in K^n$. Dann gilt:
 Ax = b lösbar $\Leftrightarrow$ rang A = rang (A,b)
(4) Sei $b \in K^m$ und $c \in K^n$ mit Ac = b, d.h. $c \in L$:= Lösungsmenge des LGS Ax =b
 Dann gilt: $L = c + L_0$
(5) Sei m = n. Dann sind äquivalent:
 (a) Es existiert $b \in K^n$, so dass Ax = b eindeutig lösbar ist.
 (b) Für jedes $b \in K^n$ ist Ax = b eindeutig lösbar
 (c) A ist invertierbar

2.68 Bemerkung (Algorithmus zum Invertieren)

Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt:
A invertierbar $\Leftrightarrow$ $(A \mid E_n) \in K^{n \times 2n}$ kann durch elementare Zeilentransformationen in $(E_n \mid B)$ überführt werden.
In diesem Fall ist $B = A^{-1}$.

§ 4 Matrizen und lineare Abbildungen

2.70 Erinnerung und Definition

Sei V K-VR mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$.

Definiere $\chi_{\mathcal{B}}(v) := \begin{pmatrix} a_1 \\ : \\ a_n \end{pmatrix} \in K^m$, falls $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

$\chi_{\mathcal{B}}(v)$ heißt der ***Koordinatenvektor von V bzgl.*** $\mathcal{B}$.
$\chi_{\mathcal{B}}$ ist ein Isomorphismus $V \to K^n$.

2.71 Beispiele

(a) $V = K^{1 \times n}$, $\mathcal{B} = (e_1^t, \ldots, e_2^t)$ die Standardbasis von V

$\Rightarrow \chi_{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ : \\ a_n \end{pmatrix}$

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b \end{pmatrix}$$

2.72 Definition (Abbildungsmatrix)

V, W K-VR, $\mathcal{B}$ Basis von V, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_2)$ Basis von W.
$\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$

Definiere $a_{ij} \in K$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ durch

$$\varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \, w_i$$

Dann heißt $M_C^B(\varphi) := (a_{ij}) \in K^{m \times n}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$
die ***(Abbildungs-)Matrix von*** φ ***bzgl.*** $\mathcal{B}$ ***und*** $\mathcal{C}$

2.74 Satz

V, W seien K-VR, $\dim_K V = n$, $\dim_K W = m$
$\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ seien Basen von V bzw. W.
Dann gilt für $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$:

(a) $\chi_{\mathcal{C}}(\varphi(v)) = M_C^B(\varphi)\, \chi_{\mathcal{B}}(v)$, für alle $v \in V$

(b) Sei $A = M_C^B(\varphi)$ und $\varphi_A: K^n \to K^m$, $v \to Av$, dann gilt:
Kern $\varphi = \chi_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Kern } \varphi_A)$
Bild $\varphi = \chi_{\mathcal{C}}^{-1}(\text{Bild } \varphi_A)$

(c) $\dim_K V = \dim_K(\text{Kern } \varphi) + \dim_K(\text{Bild } \varphi)$

2.76 Satz

Seien U, V, W K-VR mit Basen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, bzw. $\mathcal{C}$ und sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Dann gilt:
$M_C^A(\psi \circ \varphi) = M_C^B(\psi)\, M_B^A(\varphi)$

2.77 Korollar

Seien $A \in K^{l \times m}$, $B \in K^{m \times n}$, $C \in K^{n \times p}$. Dann gilt:
$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

2.78 Bemerkung

Seien V, W n-dimensionale K-VR mit Basen $\mathcal{B}$ bzw, $\mathcal{C}$ und sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$.
Dann gilt:
φ Isomorphismus $\Leftrightarrow$ $M_C^B(\varphi)$ invertierbar
In diesem Fall $M_C^B(\varphi)^{-1} = M_C^B(\varphi^{-1})$

2.79 Bezeichnungen

Seien V, W e. d. K-VR mit Basen $\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$ und $\mathcal{B}' = (v_1',\dots,v_n')$ von V bzw.
$\mathcal{C} = (w_1,\dots,w_m)$ und $\mathcal{C}' = (w_1',\dots,w_m')$ von W.
Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$.
Frage: Wie hängen $M_C^B(\varphi)$ und $M_{C'}^{B'}(\varphi)$ zusammen?

2.80 Definition

Bezeichnungen wie in 2.79. Dann heißt
$M_B^{B'}(\mathrm{id}_V) \in K^{n \times n}$ ***Basiswechselmatrix***.
(Die Spalten von $M_B^{B'}(\mathrm{id}_V)$ sind die Koeffizientenvektoren der v_j', $1 \le j \le n$, bzgl $\mathcal{B}$)

2.81 Bemerkung

Bezeichnungen wie in 2.79. Dann gilt:
(a) $M_B^{B'}(\mathrm{id}_V)$ ist invertierbar und $M_B^{B'}(\mathrm{id}_V)^{-1} = M_{B'}^{B}(\mathrm{id}_V)$
(b) Ist $T \in GL_n(K)$, dann existiert Basis $\mathcal{B}''$ von V mit $M_B^{B''}(\mathrm{id}_V) = T$

2.82 Satz (Basiswechselmatrix)

Bezeichnungen wie in 2.79. Dann gilt:
$M_{C'}^{B'}(\varphi) = M_{C'}^{C}(\mathrm{id}_W)\, M_C^B(\varphi)\, M_B^{B'}(\mathrm{id}_V) = M_C^{C'}(\mathrm{id}_W)^{-1}\, M_C^B(\varphi)\, M_B^{B'}(\mathrm{id}_V)$

tobias.rick@diamond-productions.de www.diamond-productions.de

2.83 Korollar (Basiswechselsatz für Endomorphismen)

Sei V K-VR mit Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ und sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V, V)$.
Setze A := $M_B^B(\varphi)$, A' := $M_{B'}^{B'}(\varphi)$, T:= $M_B^{B'}(id_V)$
Dann gilt: $A' = T^{-1} A T$
(Transformationsformel)

Kapitel III – Determinanten

Die Determinante ist eine Abbildung
det: $K^{n \times n} \to K$
mit „schönen" Eigenschaften, z. B.

- $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertierbar
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

§ 1 Das Signum einer Permutation

Sei $n \in \mathbb{N}$

Erinnerung (vgl 2.3)

$S_n = \{ \pi : \underline{n} \to \underline{n} \mid \pi \text{ ist bijektiv}\}$, $\underline{n} = \{1,\ldots,n\}$
Elemente aus S_n heißen Permutationen. S_n ist Gruppe mit ° als Verknüpfung, die symmetrische Gruppe auf n Ziffern.
$| S_n | = n!$

3.1 Definition

Sei $n \geq 2$.
$\tau \in S_n$ heißt ***Transposition*** (Vertauschung), wenn gilt:
Es existieren $k \neq l \in \underline{n}$ mit $\tau(k) = l$, $\tau(l) = k$ und $\tau(i)=i$, für alle $i \neq l,k$
τ vertauscht die Ziffern k und l.
Wir schreiben (k l) für τ .

3.2 Bemerkung

Ist $\tau \in S_n$ Transposition, dann ist $\tau \neq 1$ ($=id_n$) und $\tau^2 = 1$.

3.3 Satz

(a) Sei $\tau \in S_n$ Transposition
$\Rightarrow \tau$ ist Produkt einger ungeraden Anzahl von Transposition benachbarter Ziffern (d. h. von der Form (i i+1)).
(b) Sei $\pi \in S_n$, $\pi \neq 1$
$\Rightarrow \pi$ ist Produkt von Transposition benachbarter Ziffern

3.4 Definition

Sei $\pi \in S_n$.

(a) Ein Paar (i, j), $1 \leq i < j \leq n$ heißt ***Fehlstandspaar*** (FSP), wenn gilt: $\pi(i) > \pi(j)$
(b) $\mathrm{sgn}(\pi) := (-1)^{|\{\text{FSP von } \pi\}|} \in \mathbb{Z}$ heißt das ***Signum von*** π.

3.5 Beispiele

(a) $\pi = 1$ hat keine FSP's: $\Rightarrow \operatorname{sgn}(1) = 1$

(b) $\tau = (i\ i{+}1)$ (mit $i < n$) hat genau 1 FSP, nämlich $(i, i+1) \Rightarrow \operatorname{sgn}(\tau) = -1$

3.6 Satz (Multiplikationsformel)

Seien $\pi, \sigma \in S_n$. Dann gilt:
$\operatorname{sgn}(\pi \cdot \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$
(Mit anderen Worten: $\operatorname{sgn}: S_n \to \{1, -1\} = \mathbb{Z}^*$ ist ein Gruppenhomomorphismus)

3.7 Korollar

Sei $\tau \in S_n$ Transposition
$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\tau) = -1$

§ 2 Determinanten

R kommutativer Ring (z. B. $\mathbb{Z}$ oder R als Körper)
$n \in \mathbb{N}$
$A \in R^{n \times n}$ fassen wir als n-Tupel der Spalten $s_1, \ldots, s_n$ von A auf, d. h. wir schreiben:
$A = (s_1, \ldots, s_n)$ mit $s_i \in R^n$

3.8 Definition

Eine Abbildung $D: R^{n \times n} \to R$ heißt ***Determinante***, wenn gilt:

(1) D ist ***multilinear***, d. h.
$D(s_1, \ldots, s_{j-1}, as_j + bs_j', s_{j+1}, \ldots, s_n) =$
$a \cdot D(s_1, \ldots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \ldots, s_n) + b \cdot D(s_1, \ldots, s_{j-1}, s_j', s_{j+1}, \ldots, s_n)$
für alle $1 \leq j \leq n$ und für alle $a, b \in R$, $s_1, \ldots, s_n, s_j' \in R^n$

(2) D ist ***alternierend***, d. h.
$D(s_1, \ldots, s_n) = 0$, falls $s_i = s_j$ für zwei $i \neq j$

(3) D ist ***normiert***, d. h.
$D(e_1, \ldots, e_n) = 1$ mit $E_n = (e_1, \ldots, e_n)$

3.9 Beispiele

(a) $n = 1$: $D: R^{1 \times 1} \to R$ $(a) \to a$ ist Determinante

(b) $n = 2$: $D: R^{2 \times 2} \to R$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to ad - bc$ ist Determinante

3.10 Lemma

Sei $D: R^{n \times n} \to R$ eine Determinante und sei $\pi \in S_n$.
Dann gilt für alle $s_1, \ldots, s_n \in R^n$:
$D(s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}, \ldots, s_{\pi(n)}) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot D(s_1, \ldots, s_n)$
Insbesondere ist $D(s_{\pi(1)}, s_{\pi(2)}, \ldots, s_{\pi(n)}) = -D(s_1, \ldots, s_n)$ falls π Transposition

tobias.rick@diamond-productions.de

3.11 Satz

Existenz und Eindeutigkeit der Determinante

(a) Es existiert genau eine Determinante $D: R^{n \times n} \to R$

Ist $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$, also $s_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ : \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in R^n$, dann ist

$$D(s_1,\dots,s_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2)} \cdot \dots \cdot a_{\pi(n),n} \qquad (*)$$

(n! Summanden, jeder davon mit n Faktoren (· Vorzeichen))

(b) Sei $r \in R$ und $D_r: R^{n \times n} \to R$ eine Abbildung die 3.8 (1),(2) erfüllt und $D_r(e_1,\dots,e_n) = r$

$\Rightarrow D_r = r \cdot D$ mit D wie in (*)

3.12 Schreibweisen

Sei $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$.

Wir schreiben det(A) für die nach 3.11 eindeutig bestimmte Determinante von A, und auch $| A | := \det A$, oder auch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ : & & : \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det(A).$$

§ 3 Rechenregeln und Anwendungen für Determinanten

R kommutativer Ring, $n \in \mathbb{N}$

3.14 Bemerkung

Die Abbildung $S_n \to S_n$, $\pi \to \pi^{-1}$ ist bijektiv,

für $\pi \in S_n$ gilt: $\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi^{-1})$

3.15 Satz

Sei $A \in R^{n \times n}$

$\Rightarrow \det(A^t) = \det(A)$

3.16 Schreibweise

Sei $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$, sei $n \geq 2$ und seien $i, j \in \underline{n}$. Dann schreiben wir:

$A_{ij} := (a_{kl})_{1 \leq k \leq n,\, k \neq i,\, 1 \leq l \leq n,\, l \neq j} \in R^{(n-1) \times (n-1)}$

A_{ij} ensteht aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte.

3.17 Lemma

Sei $A = (s_1,\dots,s_n) \in R^{n \times n}$, (also $s_i \in R^n$) und seien $i,j \in \underline{n}$ $(n \geq 2)$

$\underbrace{\det(s_1,\dots,s_{j-1},e_i, s_{j+1},\dots,s_n)}$ $= (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

Ensteht aus A durch Ersetzen der j-ten Spalte s_j durch die i-te Spalte e_i von E_n.

3.18 Satz (Laplace-Entwicklung)

Sei $A = (a_{i\,j}) \in R^{n \times n}$. Dann gilt:

(a) Entwicklung nach der j-ten Spalte ($1 \le j \le n$):

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i\,j} \det(A_{i\,j})$$

(b) Entwicklung nach der i-ten Zeile ($1 \le i \le n$):

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i\,j} \det(A_{i\,j})$$

3.20 Korollar

Sei $A \in R^{n \times n}$ eine ***obere Dreiecksmatrix***, d. h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ldots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$ (unterhalb der Diagonalen nur Nullen)

Dann ist $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

3.21 Satz (Kästchensatz für Determinanten)

Seien $A^i \in R^{n_i \times n_i}$, $1 \le i \le m$. Dann gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ldots & \\ 0 & & & A_m \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{m} \det(A_i)$$

3.22 Satz (Multiplikationssatz für Determinanten)

Sei $A, B \in R^{n \times n}$. Dann ist
$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

3.23 Korollar

Seien $A, T \in R^{n \times n}$, T invertierbar. Dann gilt:

(a) $\det(T)$, $\det(T^{-1}) \in R^*$
und $\det(T^{-1}) = \det(T)^{-1}$

(b) $\det(T^{-1} A T) = \det(A)$

3.24 Definition

Sei $A \in R^{n \times n}$.

$\tilde{A} := ((-1)^{i+j} \cdot \det(A_{j\,i})) \in R^{n \times n}$ mit $1 \le i, j \le n$
heißt die zu A ***komplementäre Matrix*** (oder die Adjunkte von A).
($A_{j\,i}$ ist wie in 3.16 definiert; beachte die vertauschten Indizes)

3.25 Beispiel

A = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\tilde{A}$ = $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

A$\cdot \tilde{A}$ = $\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$ = det(A) · E_2

3.26 Satz

Sei A ∈ $R^{n \times n}$, dann gilt:

A$\cdot \tilde{A}$ = det (A) · E_n = $\tilde{A}$ · A

3.27 Korollar

Sei A ∈ $R^{n \times n}$. Dann gilt :

(a) A invertierbar ⇔ det(A) invertierbar
(b) ist R ein Körper, dann gilt:
A invertierbar ⇔ det(A) ≠ 0

3.28 Satz (Cramersche Regel)

Sei K ein Körper, A = $(a_{i\,j})$ ∈ $K^{n \times n}$ mit det(A) ≠ 0. Nach 3.27 ist A invertierbar.

Sei b = $\begin{pmatrix} b_1 \\ : \\ b_n \end{pmatrix}$ ∈ K^n.

Nach 2.67(5) hat das LGS Ax = b genau eine Lösung: $\begin{pmatrix} c_1 \\ : \\ c_n \end{pmatrix}$

Hierfür gilt:

$$c_j = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ : & : & : & : & : & : & : \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(Ersetze j-te Spalte von A durch b)

Kapitel IV - Eigenwerte und Eigenvektoren

§ 1 Der Polynomring

K Körper

$\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ „formale“ Linearkombination, X: Unbestimmte

4.1 Definition

(a) Ein K-VR V heißt ***K-Algebra***, falls eine Verknüpfung $\cdot : V \times V \to V$ definiert ist, so dass gilt:

(1) $(V,+,\cdot)$ ist Ring

(2) $a(v \cdot v') = (av)v' = v(av')$ für alle $a \in K, \quad v,v' \in V$

(b) Seien V, W K-Algebren.

Ein Homo- (Epi-, Mono-, Iso-)morphismus $\varphi : V \to W$ heißt ***K-Algebren-Homo- (Epi-, Mono-, Iso-)morphismus***, falls gilt:

$\varphi(1) = 1$

$\varphi(v \cdot v') = \varphi(v) \cdot \varphi(v')$ für alle $v,v' \in V$

4.2 Beispiel

$K^{n \times n}$ ist K-Algebra (mit Matrixmultiplikation).

4.3 Definition

Ein Paar (P, X) heißt ***Polynomring in der Unbestimmten X*** über K, falls gilt:

(a) P ist K-Algebra

(b) $\{1 =: X^0, X = X^1, X^2 = X \cdot X, X^3, \dots\}$ ist K-Basis von P und unendlich.

4.4 Bemerkung

Sei (P, X) Polynomring über K.

(a) Jedes $f \in P$ besitzt eine eindeutige Darstellung als L.K.

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \text{ mit } a_i \in K,\ a_n \neq 0 \qquad (*)$$

(b) Seien $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$, $g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i \in P$, dann ist

$$f \cdot g = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \text{ mit } c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$$

4.5 Bemerkung

Bis auf K-Algebra-Isomorphismen existiert genau ein Polynomring über K in der Unbestimmten X. Dieser wird mit ***K[X]*** bezeichnet.

4.6 Definition

Sei $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \in K[X]$, $f \neq 0$, $a_m \neq 0$.

deg (f) := m heißt der ***Grad von f***.

a_m, a_0 heißen ***höchster*** bzw. ***konstanter Koeffizient von f***.

f ***normiert***, falls $a_m = 1$

f ***konstant***, falls $f = a_0 \cdot 1$, d. h. falls deg (f) = 0

f ***linear***, falls deg (f) = 1

(Auch das Null-Polynom heißt konstant, f = 0 hat keinen Grad).

4.7 Bemerkung

Seien $0 \neq f, g \in K[X]$.

(a) $f + g \neq 0 \Rightarrow \deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$
$\deg(f) \neq \deg(g) \Rightarrow \deg(f + g) = \max\{\deg(f), \deg(g)\}$

(b) $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$
Insbesondere ist $f \cdot g \neq 0$

4.8 Bemerkung

$K[X]^* = K^* = \{ a \in K \mid a \neq 0 \}$

4.9 Satz (Division mit Rest in K[X])

Seien $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$
Dann existieren eindeutig bestimmte $q, r \in K[X]$ mit
$f = q \cdot g + r$ und $r = 0$ oder $\deg(r) < \deg(g)$

4.10 Definition

Seien $f,g \in K[X]$

(a) g ***teilt*** f, geschrieben $g \mid f$, falls $h \in K[X]$ existiert mit $f = g \cdot h$

(b) Seien $f, g \neq 0$
f, g ***teilerfremd***, falls gilt:
Ist $h \in K[X]$ mit $h \mid f$ und $h \mid g$, dann ist $h \in K$

(c) f heißt ***irreduzibel***, falls gilt:
$f \neq 0$, $\deg(f) \geq 1$ und ist $f = g \cdot h$ mit $g, h \in K[X]$,
dann ist $\deg(g) = 0$ oder $\deg(h) = 0$

4.11 Satz

Seien $0 \neq f, g \in K[X]$. Dann gilt:
f, g teilerfremd $\Leftrightarrow$ es existieren $h, k \in K[X]$ mit $1 = f \cdot h + g \cdot k$

4.12 Korollar

Sei $p \in K[X]$ irreduzibel, $f, g \in K[X]$ mit $p \mid f \cdot g \Rightarrow p \mid f$ oder $p \mid g$

4.13 Satz !

Sei $0 \neq f \in K[X]$, $\deg(f) \neq 0$ mit höchsten Koeffizienten $a \in K$.
Dann existieren irreduzible, normierte $p_1,\dots,p_t \in K[X]$ mit $f = a \cdot p_1, \dots p_t$
Die $p_1,\dots,p_t$ sind eindeutig (bis auf ihre Reihenfolge) durch f bestimmt.

4.14 Bemerkung und Definition

Sei V K-Algebra, $v \in V$.
Dann existiert genau ein K-Algebren-Homomorphismus
$\tau_v : K[X] \to V$ mit $\tau_v(X) = v$
τ_v heißt ***Einsetzungshomomorphismus***
Für $f \in K[X]$ schreiben wir $f(v) := \tau_v(f)$

4.15 Beispiele

$f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$

(a) $V = K$ ($\cong K^{1 \times 1}$), $a \in K$

$f(a) = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot a^i \in K$ ($a^0 = 1 \in K$)

(b) $V = K^{n \times n}$, $A \in K^{n \times n}$

$f(A) = \sum_{i=0}^{m} a_i A^i \in K^{n \times n}$ ($A^0 = E_n$)

[$f = x^2 + x + 1 \Rightarrow f(A) = A^2 + A + E_n$]

4.16 Definition

Sei $f \in K[X]$, $a \in K$.
a ***Nullstelle*** von f, falls $f(a) = 0$

4.17 Bemerkung

Sei $f \in K[X]$, $a \in K$ Nullstelle von f.
$\Rightarrow$ es existiert $q \in K[X]$ = mit $f = (X - a) \cdot q$

4.18 Definition und Bemerkung

Sei $0 \neq f \in K[X]$, $a \in K$ Nullstelle von f.
$\Rightarrow$ Es existiert eindeutig bestimmtes $m \in \mathbb{N}$, und $g \in K[X]$ mit
$f = (X - a)^m \cdot g$ und $g(a) \neq 0$
m heißt die ***Vielfachheit von a als Nullstelle von f***.

4.19 Definition

K heißt ***algebraisch abgeschlossen***, falls jedes $f \in K[X]$, $f \notin K$, eine Nullstelle in K besitzt.

4.20 Satz

$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

4.21 Bemerkung

Sei K algebraisch abgeschlossen, und $f \in K[X]$ irreduzibel und normiert
$\Rightarrow f = X - a$ für ein $a \in K$

§ 2 Eigenwerte und Eigenvektoren

K Körper, V e. d. K-VR, End_K (V)

4.22 Definition

Sei $\varphi \in End_K(V)$, $A \in K^{n \times n}$

(1) $a \in K$ heißt ***Eigenwert (EW) von φ (bzw. A)***, falls ein $0 \neq v \in V$ (bzw. $0 \neq v \in K^n$) existiert mit

$\boldsymbol{\varphi(v) = a \cdot v}$ (bzw. $A v = av$)

[Erinnerung: $\varphi_A: K^n \to K^n$, $v \to Av$]

(2) $0 \neq v \in V$ (bzw. $0 \neq v \in K^n$) heißt ***Eigenvektor (EV) von φ (bzw. A) zum Eigenwert $a \in K$***, falls

$\varphi(v) = av$ (bzw. $Av = av$) ist.

(3) Für $a \in K$ sei

$$V(a, \varphi) := \{ v \in V \mid \varphi(v) = av\}$$
$$= \{ v \in V \mid (a \cdot id_V - \varphi)(v) = 0\}$$
$$= \text{Kern } (a \cdot id_V - \varphi)$$
$$V(a, A) := \{ v \in K^n \mid Av = av \} = V(a, \varphi_A)$$

Ist $V(a, \varphi) \neq \{0\}$ (bz.w $V(a, A) \neq \{0\}$), dann heißt $V(a, \varphi)$ (bzw. $V(a, A)$) der ***Eigenraum von φ (bzw. von A) zum Eigenwert a***.

4.23 Bemerkung

Bezeichnungen wie in 4.22

(a) $a \in K$ EW von $\varphi \Leftrightarrow V(a, \varphi) \neq \{0\}$

(b) $V(a,\varphi) \neq \{0\} \Rightarrow$ jedes $0 \neq v \in V(a, \varphi)$ ist ein Eigenvektor zum EW a

(c) $V(0, \varphi) = \text{Kern}(\varphi)$

0 ist EW von φ $\Leftrightarrow \text{Kern}(\varphi) \neq \{0\}$
$\Leftrightarrow \varphi$ nicht injektiv
$\Leftrightarrow \varphi$ nicht bijektiv

Schreibweise

Sei $\mathcal{B}$ geordnete Basis von V, $\varphi \in End_K(V)$.

$M_{\mathcal{B}}(\varphi) := M_B^B(\varphi) \in K^{n \times n}$

4.25 Definition

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ heißt Diagonalmatrix, falls $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

4.26 Definition

Sei $\varphi \in End_K(V)$, $A \in K^{n \times n}$.

(a) φ heißt ***diagonalisierbar***, falls Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, so dass $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) A heißt ***diagonalisierbar***, falls $T \in GL_n(K)$ existiert, mit $T^{-1}A\,T$ eine Diagonalmatrix ist.

4.27 Bemerkung

Bezeichnungen wie in 4.26.

(a) φ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ V besitzt Basis aus EV von φ

(b) A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ φ_A diagonalisierbar

4.28 Definition

A, B $\in K^{n \times n}$ heißen ***ähnlich***, falls $T \in GL_n(K)$ existiert mit $B = T^{-1} A\, T$.

Nach 2.83: ähnliche Matrizen beschreiben den gleichen Endomorphismus, nur bzgl. verschiedener Basen.

$A \in K^{n \times n}$ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A ähnlich zu einer Diagonalmatrix

4.29 Satz

Sei $\varphi \in End_K(V)$, $dim_K(V) = n$

(a) Seien $a_1, \ldots, a_m \in K$ EW von φ mit $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$.
Sei $v_j \in V$ EV von φ zum EW a_j, $1 \leq j \leq m \Rightarrow (v_1, \ldots, v_m)$ l. u.

(b) Besitzt φ n paarweise verschiedene EW, dann ist φ diagonalisierbar.

§ 3 Das charakteristische Polynom

K Körper

4.31 Definition und Bemerkung

(a) Sei $A \in K^{n \times n}$

(1) $(X E_n - A) \in K[X]^{n \times n}$ heißt die ***charakteristische Matrix von A***.

(2) $\chi_A := \det (X E_n - A) \in K[X]$ heißt das ***charakteristische Polynom von A***.

(3) Sei $T \in GL_n(K)$, dann gilt:

$$\chi_{T^{-1} A \cdot T} = \chi_A$$

(b) Sei V ein n-dim. K-VR, $\varphi \in End_K(V)$, $\mathcal{B}$ Basis von V, $A := M_{\mathcal{B}}(\varphi) \in K^{n \times n}$.
Dann heißt
$\chi_\varphi := \chi_A$ das ***charakteristische Polynom von φ***.
Dies ist unabhängig von der gewählten Basis $\mathcal{B}$.

4.32 Beispiele

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$X E_2 - A = \begin{pmatrix} X & -1 \\ 1 & X \end{pmatrix}$, $\chi_A = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1$

(b) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ldots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ obere Dreiecksmatrix.

$\Rightarrow \chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$

4.33 Bemerkung

Seien R, S Ringe, $\varphi : R \to S$ Ringhomomorphismus.
[$\varphi(1) = 1$; $\varphi(r + r') = \varphi(r) + \varphi(r')$; $\varphi(r\cdot r') = \varphi(r) \cdot \varphi(r')$]
$A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$, $\varphi(A) = (\varphi(a_{ij})) \in S^{n\times n}$
Dann ist

$$\det(\varphi(A)) = \varphi(\det(A))$$

4.34 Korollar

Sei $A \in K^{n\times n}$, $a \in K$. Dann gilt:
$\chi_A(a) = \det(a\cdot E_n - A)$

4.35 Satz

Sei $A \in K^{n\times n}$, V n-dim. K-VR, $\varphi \in End_K(V)$, $a \in K$. Dann gilt:
a EW von A (bzw. von φ) $\Leftrightarrow \chi_A(a) = 0$ (bzw. $\chi_\varphi(a) = 0$)

a EW von A $\Leftrightarrow$ es ex. $0 \neq v \in K^n$ mit $Av = av$
$\Leftrightarrow$ es ex. $0 \neq v \in K^n$ mit $(aE_n - A)v = 0$
$\Leftrightarrow$ $aE_n - A$ nicht invertierbar
$\Leftrightarrow$ $\det(aE_n - A) = 0$ (d. h. $\chi_A(a) = 0$)

4.36 Beispiele

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ hat keine Eigenwerte in $\mathbb{R}$, denn
$\chi_A = x^2 + 1$
Über $\mathbb{C}$ hat A die EW $\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$
(b) Ähnliche Matrizen haben die gleichen EW.

4.37 Definition

Sei R kommutati er Ring, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
$Sp(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in \mathbb{R}$ heißt die ***Spur von A***.

4.38 Bemerkung

Sei R kommutativer Ring, $A, B \in R^{n\times n}$, $T \in GL_n(R)$. Dann gilt:
(a) $Sp(A\cdot B) = Sp(B\cdot A)$
(b) $Sp(T^{-1} A T) = Sp(A)$

4.39 Bemerkung

Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt:
$\chi_A = x^n - Sp(A)\, x^{n-1} + c_{n-2}\, x^{n-2} + \ldots + c_1 x + (-1)^n \cdot \det(A)$
mit geeigneten $c_1, \ldots, c_{n-2} \in K$

4.40 Korollar

Sei $A \in K^{n\times n}$, bzw. $\varphi \in End_K(V)$ für einen n-dim. K-VR V.
Dann hat A (bzw. φ) höchstens n EW (inklusive Vielfachheiten).

4.41 Definition

Sei $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+ a_0 \in K[X]$ normiert. Dann heißt

$$C(f) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & & : & : \\ 0 & 0 & . & & & \\ : & : & . & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \ldots & & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

die ***Begleitmatrix von f*** (companion matrix).

$n = 1$: $f = X + a_0$: $C(f) = (-a_0) \in K^{1 \times 1}$

4.42 Bemerkung

Sei $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0 \in K[X]$.
Dann ist $\chi_{(f)} = f$.

§ 4 Das Minimalpolynom

K Körper, V n-dim. K-VR, $\varphi \in End_K(V)$

4.43 Definition

(a) $U \leq V$ heißt ***φ -invariant***, falls $\varphi(U) \leq U$ ist.
(b) Sei $U \leq V$ φ -invariant.
Dann sei $\varphi_U : U \to U$, $u \to \varphi(u)$, $u \in U$.
$\varphi_U \in End_K(U)$ ist die ***Einschränkung von φ auf U***.

4.44 Bemerkung

Sei $U \leq V$ φ -invariant.

(a) Sei $\mathcal{C} = (v_1,\ldots,v_m)$ Basis von U
Ergänze $\mathcal{C}$ zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1,\ldots,v_m,v_{m+1},\ldots,v_n)$ von V. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} M_{\mathcal{C}}(\varphi_U) & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

für geeignete Matrizen C und D.

(b) $\chi_{\varphi_U} \mid \chi_\varphi$

4.45 Beispiel

Sei $v_1 \in V$ EV von φ zum EW $a \in K \Rightarrow U := \langle v_1 \rangle$ ist φ -invariant.
Ist $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ Basis von V, dann ist

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} a & * \ldots * \\ \hline 0 & \\ : & D \\ 0 & \end{array}\right)$$

für ein $D \in K^{(n-1) \times (n-1)}$

4.46 Satz

Sei $A \in K^{n \times n}$ mit

$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$,

d. h. das charakteristische Polynom von A zerfällt in Linearfaktoren.
$\Rightarrow$ A ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix

4.47 Bemerkung

(a) $End_K(V)$ ist K-VR mit
$+ : End_K(V) \times End_K(V) \to End_K(V)$
$(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v), \quad \varphi, \psi \in End_K(V), v \in V$
$\cdot : K \times End_K(V) \to End_K(V)$
$(a\,\varphi)(v) := a\,\varphi(v), \quad a \in K, \varphi \in End_K(V), v \in V$

(b) $End_K(V)$ wird K-Algebra mit (a) und
$\cdot : End_K(V) \times End_K(V) \to End_K(V)$
$(\varphi, \psi) \to \varphi \circ \psi$

(c) Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von V, dann ist
$M_{\mathcal{B}} : End_K(V) \to K^{n \times n}, \varphi \to M_{\mathcal{B}}(\varphi)$
eine K-Algebren-Isomorphismus

4.48 Bemerkung

Sei $0 \neq v \in V$
Die Folge $(v, \varphi(v), \varphi^2(v) = \varphi(\varphi(v)), \ldots, \varphi^n(v))$ ist l. a.

4.49 Satz (Cayley-Hamilton)

Sei $\varphi \in End_K(V)$, bzw. $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt:
$\chi_\varphi(\varphi) = 0$ bzw. $\chi_A(A) = 0$

4.50 Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}, \; X E_2 - A = \begin{pmatrix} X-1 & -2 \\ -3 & X-4 \end{pmatrix}$

$\chi_A = (X-1)(X-4) - 6 = x^2 - 5x - 2$
$\chi_A(A) = A^2 - 5A - 2E_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}, \quad A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E_2$

$A(A - 5E_2) = 2E_2 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A - 5E_2)$

4.51 Bemerkung und Definition !!

Sei $A \in K^{n \times n}$, $\varphi \in End_K(V)$, wobei V n-dim. K-VR sei.

(a) Es existiert $\mu_A \in K[X]$, $\deg(\mu_A) \geq 1$ (bzw. $\mu_\varphi \in K[X]$, $\deg(\mu_\varphi) \geq 1$), mit

(1) μ_A (bzw. μ_φ) ist normiert.

(2) $\mu_A(A) = 0$ (bzw. $\mu_\varphi(\varphi) = 0$)

(3) $\mu_A \mid f$ (bzw. $\mu_\varphi \mid f$) für alle $f \in K[X]$ mit $f(A) = 0$ (bzw. $f(\varphi) = 0$)

Durch (1) – (3) ist μ_A (bzw. μ_φ) eindeutig festgelegt. Es heißt das ***Minimalpolynom von A (bzw. von φ)***.

(b) Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von V, dann ist $\mu_\varphi = \mu_{M_B(\varphi)}$

(c) Ist $B \in K^{n \times n}$ ähnlich zu A, dann ist $\mu_A = \mu_B$.

4.52 Beispiele

(a)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{6 \times 6}$

$\chi_A = X^2 (X-1)^4$, $\mu_A = X (X-1)^3$

(b)

Sei $a \in K$ und $A = \begin{pmatrix} a & 1 & & & 0 \\ & a & 1 & & \\ & & . & . & \\ & & & . & 1 \\ 0 & & & & a \end{pmatrix} \in K^{n \times n}$

$\Rightarrow \chi_A = \mu_A = (X - a)^n$

(c) Sei $f \in K[X]$, $f \notin K$, f normiert. $\Rightarrow \chi_{(f)} = \mu_{(f)} = f$

(d)

Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & & 0 \\ & a_2 & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ 0 & & & & a_n \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix,

und sei $\{a_1,\ldots, a_n\} = \{b_1,\ldots,b_n\}$ mit $b_i \neq b_j$ für $i \neq j$.

$\Rightarrow \mu_A = \prod_{i=1}^{n} (X - b_i)$

4.53 Lemma
Sei $0 \neq f \in K[X]$ mit $f(\varphi) = 0$.
Seien $g, h \in K[X]$ teilerfremd mit $f = g \cdot h$
Setze $U := \text{Kern}\,(g(\varphi))$, $W := \text{Kern}\,(h(\varphi))$.
Dann sind U und W φ -invariant und es gilt:

$V = U \oplus W$, d. h. $V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$

4.54 Satz !
Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt:
A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ μ_A zerfällt in ein Produkt von paarweise verschiedenen Linearfaktoren.

Kapitel IV – Euklidische und Unitäre Räume
Zusätzliche Struktur für reele oder komplexe VR: ***Skalarprodukt***.
$K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a,b \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{C} \text{ mit } i^2 = -1\}$
(1, i) l. u. über $\mathbb{R}$
$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$\bar{\ } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, a+ib _> a - ib (Komplexe Konjugation)
$|\, c \,| = \sqrt{c \cdot \bar{c}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt (***komplexer***) ***Absolutbetrag*** von $c \in \mathbb{C}$
$A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\bar{A} := (\bar{a}_{ij})$

§ 1 Skalarprodukte
$K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, V K-VR (nicht notwendig e. e.)

5.1 Definition und Bemerkung
(a) Eine Abbildung $\beta : V \times V \to K$ heißt ***Bilinearform*** (im Fall $K = \mathbb{R}$) bzw. ***Seqsui-Linearform*** (im Fall $K = \mathbb{C}$), fall gilt:
- (a) $\beta(v_1 + v_2, w) = \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w)$ und
  $\beta(av, w) = a\,\beta(v, w)$
  für alle $v, v_1, v_2, w \in V$, $a \in K$
- (b) $\beta(v, w_1 + w_2) = \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2)$ und
  $\beta(v, aw) = \bar{a}\,\beta(v, w)$
  für alle $v, w, w_1, w_2 \in V$, $a \in K$
  (Beachte: für $K = \mathbb{R}$ ist $\bar{a} = a$)

(b) Sei β Bilinearform (bzw. Sesqui-Linearform) auf V.
β ***symmetrisch*** (bzw. ***hermite'sch***), falls gilt:
$\beta(v,w) = \beta(w, v)$ für alle $v, w \in V$
(bzw. $\beta(v,w) = \overline{\beta(w, v)}$ für alle $v,w \in V$)

Ist β hermite'sch (also $K = \mathbb{C}$), dann ist $\beta(v,v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$.

Sei β symmetrisch (bzw. hermite'nsch). Dann heißt ***β ein Skalarprodukt auf V***, falls β ***positiv definit*** ist, d. h. falls gilt:
$\beta(v,v) > 0$ für alle $v \in V$, $v \neq 0$

5.2 Beispiele

(1) $V = K^n$, ($\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$)
$< , > : V \times V \to K$

$$< \begin{pmatrix} a_1 \\ : \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ : \\ b_n \end{pmatrix} > := \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j \in K$$

ist ein Skalarprodukt auf V, das ***Standardskalarprodukt***.

5.3 Satz (Cauchy – Schwarz'sche Ungleichung)

Sei (,) ein Skalarprodukt auf V.
Dann gilt für alle $v_1, v_2 \in V$:
$|(v_1, v_2)|^2 \leq (v_1, v_1)(v_2, v_2)$, sowie
$|(v_1, v_2)|^2 = (v_1, v_1)(v_2, v_2) \Leftrightarrow v_1, v_2$ sind l. a.

5.4 Beispiele

Seien $a_j, b_j \in \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq n$

$$\Rightarrow \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j \right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \right)$$

mit Gleichheit genau dann wenn $\begin{pmatrix} a_1 \\ : \\ a_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ : \\ b_n \end{pmatrix}$ l. a. sind.

5.5 Defintion und Bemerkung

Sei V e. d. und β eine Bilinearform (bzw. eine Sesqui-Linearform) auf V.
Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$

(a) Dann heißt
$G_{\mathcal{B}}(\beta) := (\beta(v_i, v_j)) \in K^{n \times n}$ mit $1 \leq i,j \leq n$
die ***Gram-Matrix von β bzgl $\mathcal{B}$.***

(b) Sei $A := G_{\mathcal{B}}(\beta)$. Dann gilt für alle $v, w \in V$
$\beta(v, w) = \aleph_{\mathcal{B}}(v)^t A \overline{\aleph_{\mathcal{B}}(w)}$
β symmetrisch $\Leftrightarrow$ A symmetrisch, d. h. $A = A^t$
β hermite'sch $\Leftrightarrow$ A hermite'sch, d. h. $A = \bar{A}^t$

$\beta(v, w) = v^t A \bar{w}$ für alle $v,w \in K^n$

5.6 Bemerkung

Sei $A \in K^{n \times n}$.

(a) $\beta_A : K^n \times K^n \to K$
$\beta_A(v, w) := v^t A \bar{w}$, $v,w \in K^n$
ist Bilinearform (bzw. Sesqui-Linearform) auf K^n-

(b) β_A ist symmetrisch $\Leftrightarrow$ A symmetrisch ($K = \mathbb{R}$)
β_A ist hermite'sch $\Leftrightarrow$ A hermite'sch ($K = \mathbb{C}$)

5.7 Definition

(a) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt ***positiv definit***,
wenn $A = A^t$ ist und
$v^t A v > 0$ für alle $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$

(b) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt ***positiv definit***,
wenn $A = \bar{A}^t$ ist und
$v^t A \bar{v} > 0$ für alle $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$

5.8 Satz !

Sei V n-dim. K-VR und β eine Bilinearfrom (bzw. Seqsui-Linearform) auf V.
Seien $\mathcal{B} = (v_1,\ldots,v_n)$ und $\mathcal{B}' = (v_1',\ldots,v_n')$ Basen von V und
$T = M_B^{B'}(id_V)$ die Basiswechselmatrix.
Setze $A := G_{\mathcal{B}}(\beta)$ und $A' := G_{\mathcal{B}'}(\beta)$.
Dann gilt: $A' = T^t A \overline{T}$

§ 2 Längen, Winkel, Orthogonalität

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ V K-VR mit Skalarprodukt (,)

5.9 Definition

(a) Im Fall $K = \mathbb{R}$ [bzw. $K = \mathbb{C}$] heißt (V, (,)) ***euklidischer*** [bzw. ***unitärer***] ***Raum***.
Die Abbildung $\|\,.\,\|\ V \to \mathbb{R}, v \to \sqrt{(v,v)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt die ***euklidische*** [bzw. ***unitäre***] ***Norm auf V***.

(b) ($\mathbb{R}^n$, < , >) [bzw. ($\mathbb{C}^n$,< , >)] heißt der ***n-dim. euklidische*** [bzw. ***unitäre***] ***Raum $\mathbb{R}^n$*** [bzw. ***$\mathbb{C}^n$***].

5.10 Beispiel

Im n-dim. euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist $\|v\|$ die „Länge" des Ortsvektors $\overrightarrow{0v}$.

$$l = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{<v,v>}$$

Allgemein

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ : \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad <v,v> = \sum_{j=1}^{n} a_j^2, \qquad \|v\| = \sqrt{<v,v>} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}$$

5.11 Bemerkung (Eigenschaften von || ||)

(1) || || ist Norm auf V, d. h.

(a) $\| v \| \geq 0$ für alle $v \in V$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(b) $\| a v \| = |a| \cdot \|v\|$ für alle $v \in V$, $a \in K$

(c) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ für alle $v_1,v_2 \in V$

(2) ***Polarisationsformeln***:

(a) Für $K = \mathbb{R}$ gilt:

$$(v, w) = \frac{1}{2}(||v + w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2), \text{ für alle } v,w \in V$$

(b) Für $K = \mathbb{C}$ gilt:

$$(v,w) = \frac{1}{4}(||v+w||^2 - ||v-w||^2 + i||v+iw||^2 - i\cdot||v-iw||^2), \text{ für alle } v,w \in V$$

(3) Für $0 \neq v$, $0 \neq w \in V$ gilt:

$$\left|\frac{(v,w)}{\|v\|\cdot\|w\|}\right| \leq 1$$

5.12 Definition und Bemerkung

(a) $v \in V$ heißt ***normiert***, falls $||v|| = 1$

(b) Ist $0 \neq v \in V$, dann ist $\frac{v}{\|v\|}$ normiert.

5.13 Definition

Sei V ein euklidischer VR. Für $0 \neq v,w \in V$ sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq \pi$ definiert durch:

$$\cos\alpha = \frac{(v,w)}{\|v\|\cdot\|w\|}$$

α heißt der ***Winkel zwischen v und w***.

5.14 Bemerkung

Bezeichnungen wie in 5.13. Dann gilt:

$$\begin{aligned} v, w \text{ l. a.} &\Leftrightarrow |(v,w)|^2 = (v,v)(w,w) \\ &\Leftrightarrow |(v,w)| = ||v||\,||w|| \\ &\Leftrightarrow \cos\alpha \in \{1, -1\} \\ &\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ oder } \alpha = \pi \end{aligned}$$

wobei α den Winkel zwischen v und w bezeichnet.
Sind v und w normiert, dann gilt:

$\alpha = 0 \Leftrightarrow v = w$

$\alpha = \pi \Leftrightarrow v = -w$

5.16 Satz (Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren)

Seien $v_1,\ldots,v_n \in V$ l. u. und sei $0 \leq m \leq n$ mit
$(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq m$ (Kronecker-Delta)
(keine Bedingung für m = 0)
Dann existieren $w_1,\ldots,w_n \in V$ mit $w_j = v_j$ für $1 \leq j \leq m$, und

$w_l = \sum_{j=1}^{l} a_{lj}\, v_l$ mit geeigneten $a_{lj} \in K$, $a_{ll} \neq 0$, und

$(w_j, w_k) = \delta_{ik}$ für $1 \leq j,k \leq n$.

5.18 Definition

(a) Sei V e. d. , Eine Basis ($v_1,\dots,v_n$) von V heißt ***Orthonormalbasis (ONB) von V***, falls gilt:
$(v_i, v_j) = \delta_{ij} \quad 1 \le i, j \le n$

(b) Sei $U \le V$
$U^\perp = \{v \in V \mid (u,v) = 0$ für alle $u \in U\}$ heißt der ***Orthogonalraum zu U***.

5.19 Korollar

Sei $\dim_K(V) = n$

(a) V besitzt ONB

(b) Ist $A \in K^{n \times n}$ positiv definiert, dann exisitert $S \in GL_n(K)$ mit $A = S^t = \bar{S}$

(c) Ist $U \le V$, dann ist $V = U \oplus U^\perp$ (d. h. $V = U + U^\perp$ und $U \cap U^\perp = \{0\}$)
Insbesondere ist $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$.

5.20 Definition

(a) $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt ***orthogonal***, falls $K = \mathbb{R}$ ist [bzw. ***unitär***, falls $K = \mathbb{C}$ ist] und es gilt:
$(\varphi(v), \varphi(w)) = (v,w)$ für alle $v,w \in V$

(b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt ***orthogonal***, falls $A^t A = E_n$
$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt ***unitär***, falls $A^t \bar{A} = E_n$
$O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A$ orthogonal$\}$ ***orthogonale Gruppe***
$U(n) := \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A$ unitär$\}$ ***unitäre Gruppe***

5.21 Bemerkung

(a) Sei V n-dim. und $\mathcal{B}$ eine ONB von V. Sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
Dann gilt:
A orthogonal (bzw. unitär) $\Leftrightarrow$ φ orthogonal (bzw. unitär)

(b) Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt:
A orthogonal (bzw. unitär) $\Leftrightarrow$ Spalten von A bilden ONB von K^n bzgl. <,>

(c) $O(n) \le GL_n(\mathbb{R})$, $\quad U(n) \le GL_n(\mathbb{C})$.

5.22 Definition

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
$A^+ := (\bar{A})^t$ heißt die zu A adjungierte Matrix.

Zusammenfassung

(a) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:
A *hermite'sch* $\Leftrightarrow A^+ = A$
A *unitär* $\Leftrightarrow$ A invertierbar und $A^{-1} = A^+$

(b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:
A symmetrisch $\Leftrightarrow A^t = A$
A orthogonal $\Leftrightarrow$ A invertierbar und $A^{-1} = A^t$ ($A^tA = E_n$)

$\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ orthogonal (unitär) $\Leftrightarrow$ $(\varphi(v), \varphi(w)) = (v,w)$ für alle $v,w \in V$

$\mathcal{B}$ ONB von V, $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. φ orthogonal $\Leftrightarrow$ A orthogonal

5.23 Definition

Ein $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt selbstadjungiert, falls gilt:
$(\varphi(v), w) = (v, \varphi(w))$ für alle $v,w \in V$.
analog zu 5.21 gilt:

5.24 Bemerkung

Sei V n-dim. und $\mathcal{B}$ eine ONB von V. Sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$, $A := M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Dann gilt:
φ selbstadjungiert $\Leftrightarrow \overline{A}^t = A$

§ 3 Der Spektralsatz

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (V, (,)) ein n-dim. euklid. oder unitärer Raum

5.25 Lemma

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.
Dann existiert $a \in \mathbb{R}$ mit $\chi_A(a) = 0$ (A besitzt einen reellen EW)

5.26 Satz (Spektralsatz) !!

Sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ selbstadjungiert.
Sei $A \in K^{n \times n}$ mit $\overline{A}^t = A$ (d. h. A symmetrisch oder hermite'sch)

(a) Es existiert ONB von V, die aus EV von φ besteht.
(b) $K = \mathbb{R}$
Es existiert $S \in O(n)$, so dass $S^t A S$ eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge die EW von A sind.
(c) $K = \mathbb{C}$
Es existiert $S \in U(n)$, so dass $S^+ A S$ eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge die EW von A sind.

5.27 Korollar

Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann gilt:
$\overline{A}^t = A$ (d. h. A symmetrisch oder hermite'sche) $\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar.

5.28 Beispiel

§ 4 Orthogonale Endomorphismen

$K = \mathbb{R}$, (V, (,)) n-dim. euklidischer Raum

5.29 Bemerkung

Sei $A \in O(2)$

Dann exisitiert $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 \le \alpha \le 2\,\pi$ mit

(1)

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ oder

(2)

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

Im Fall (1) ist $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um den Winkel α, und

$\chi_A = X^2 - 2\cdot\cos(\alpha)\, X + 1$

Im Fall (2) ist φ_A eine Spiegelung an der Geraden durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$

und A ist ähnlich zu $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.30 Bemerkung

Sei $f \in \mathbb{R}[X]$ irreduzibel.

$\Rightarrow \deg f \le 2$

5.31 Bemerkung

Sei $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ orthogonal.

(a) Ist $W \le V$ φ-invariant, dann ist auch $W^{\perp}$ φ-invariant und es gilt:
$V = W \oplus W^{\perp}$

(b) Es existiert $W \le V$ φ-invariant mit $\dim_{\mathbb{R}} W \le 2$

5.32 Satz !!

Sei $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ orthogonal. Dann existiert ONB von V mit

$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}$

mit $A_j = (1) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, oder $A_j = (-1) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

oder $A_j = \begin{pmatrix} \cos\alpha_j & -\sin\alpha_j \\ \sin\alpha_j & \cos\alpha_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ für ein $\alpha_j \in \mathbb{R}$ mit $0 \le \alpha_j \le 2\cdot\pi$