

1.1 NEU: Grad  $\geq 2$ , normiert:

$$\mu = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow \text{Begleitmatrix } \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mu = x^2 + 2x + 3$  zerfällt nicht in paarweise verschiedene Linearfaktoren

$\Rightarrow$  ~~nicht~~ Matrix nicht diagonalisierbar.

1.2 NEU: Satz: diag'bar  $\Leftrightarrow D = T^{-1}AT$  mit  
T invertierbar.

T ist hier aber nicht ~~in~~ zwingend invertierbar.

1.3 JA:  $O \cdot A = A$  gilt nur für die Nullmatrix,  
und diese ist bereits diagonal  
(d.h. außerhalb der Hauptdiagonale nur Nullen).

2.1 JA:  $\varphi(v) = a \cdot v$ ; z.B. Diagonalmatrix mit a  
auf der Diagonalen.

2.2 NEU: nur ungerade dimensionierte  
Abbildungsmatrizen haben in jedem Fall  
einen Eigenwert.

2.3 NEU:  $0$  einziger Eigenwert kann auch  
eine lineare Abb. mit einem Kern sein.

3.1 JA, klar.

3.2 NEIN, sie ist  $\in \{-1, 0, 1\}$ .

3.3 JA Rang nicht voll  $\Leftrightarrow \det = 0$ .

4.1 NEIN

z.B. 
$$\left( \begin{array}{c|c} 10 & 4 \\ 01 & 5 \\ 01 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{c|c} 10 & 4 \\ 01 & 5 \\ 01 & 6 \end{array} \right)$$

4.2 JA

$\text{rg}(A)$  muß gleich  $\text{Rg}(A, b)$  sein, da sich  $b$  als LK von  $A$  darstellen lassen muß.

4.3 JA

nicht invertierbar  $\Leftrightarrow$  2 Zeilen l.a.  
 $\Rightarrow$  Widerspruch herstellbar.

5.1 JA

Eine l.a. Gruppe von Vektoren bleibt auch nach Hinzunahme eines Vektors l.a.

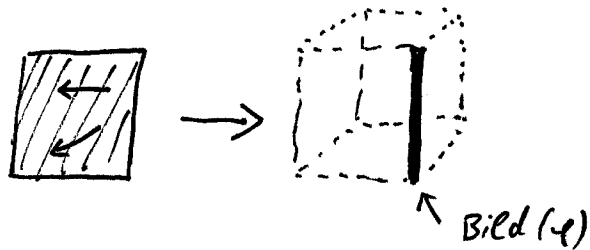
5.2 NEIN

, sondern nur ein Erzeugendensystem von  $V$ : eine Basis muß aus l.u. Vektoren bestehen!

5.3 JA

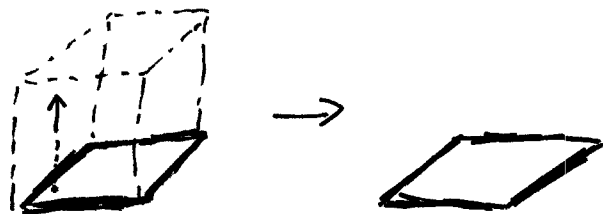
6.\* Betrachte als Beispiel:

$\varphi: V \rightarrow W \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  Projektion nach rechts



$\varphi$ : Kern sind alle waagerechten Vektoren.

$\psi: W \rightarrow V \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ : Projektion nach unten,



$\psi$ : Kern sind hier alle senkrecht stehenden Vektoren.

Kern  $\psi \circ \varphi$  (zuerst  $\varphi$ , dann  $\psi$ ) ist offensichtlich der Nullvektor.

6.1 NEIN: Fläche  $\neq$  Nullraum.

6.2 JA: Die erste Abbildung kann immer nur maximal den gesamten Zielraum erreichen, damit kann das Bild ( $\psi \circ \varphi$ ) nie größer sein als das Bild der letzten Abbildung ( $\psi$ ).

6.3 NEIN: Hier stimmen nicht einmal die Dimensionen.

7.1 JA:  $(E-1)=0 \Rightarrow$  charakteristische Polynom.  
Da es nicht weiter zerlegbar ist, ist es  
auch das Minimalpolynom.

7.2: NEIN: es kann z.B.  $(x-3)(x-4)^2$  sein.

7.3: JA: denn  $x(x-1)$  zerfällt in paarweise  
verschiedene Linearfaktoren.

8.1 NEIN:  $\varphi(0)=1$ , muss aber 0 sein.

8.2 NEIN:  $\varphi \begin{pmatrix} ax_1+x_2 \\ ay_1+y_2 \end{pmatrix} \neq a \cdot \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

8.3 JA

8.4 JA

9.

-5-

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (n \geq 2)$$

$$\mu_A = \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)$$

(also:  $\mu_A$  zerfällt in paarweise versch. Linearfaktoren  
 $\Rightarrow A$  diagonalisierbar)

$\Rightarrow$  Wenn die Matrix diagonalisiert ist,  
stehen die Eigenwerte auf der  
Hauptdiagonalen. Diese sind alle  
Einheitswurzeln, d.h. oft genug potenziert  
(mit  $n_A$ ) ergeben sie 1.

z.z.: diese Diagonalmatrix oft genug potenziert  
ergibt die Einheitsmatrix.

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & c & \\ & & & d \end{pmatrix}^{n_A \cdot n_B \cdot n_C \cdot n_D} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

da  $a^{n_A} = 1, k \cdot 1 = 1.$

10.

$x := A$

$$f, g \in K[X] \quad A \in K^{n \times n}$$

z.z:  $f(A) \cdot g(A) = g(A) \cdot f(A)$

$$f(A) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$g(A) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$$

$$f(A) \cdot g(A) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^m b_j x^j$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i x^i b_j x^j$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b_j \underbrace{x^i x^j}_{|i+j=k}$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b_j x^k$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_i b_j x^j x^i$$

$$= \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n b_j x^j a_i x^i$$

$$= \sum_{j=0}^m b_j x^j \cdot \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$= g(A) \cdot f(A)$$

q.e.d.

11.

$$A \in \mathbb{Z}^{n \times n} \quad (n \geq 2)$$

$$\det(A) \neq 0$$

$$\det(A) \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow A$  ganzzahlig in  $\mathbb{Z}$   
invertierbar (das Inverse  
hat auch nur Einträge in  $\mathbb{Z}$ )

$$\Leftrightarrow \det(A) \in \{-1, 0, 1\}$$

$$\Rightarrow \det(A) = \{-1, 1\}$$

da  $-1$  und  $1$  beide in  $\mathbb{Z}$  invertierbar sind,  
ist auch die Matrix invertierbar.

$c_{ij}$  teilt  $\det(A)$ , also ist  $c_{ij} \in \{-1, 1\}$ .

Somit sind die  $b_{ij}$ 's unsere Einträge der  
Matrix, die  $c_{ij}$  das Vorzeichen.

A12      $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$       $A^3 = E_n$

Z.Z.:      $A$  diagonalisierbar.

---

Weg:      $\Leftrightarrow \mu_A$  zerfällt in paarweise verschiedene  
Linearfaktoren

$$A^3 = E_n \Rightarrow \underbrace{A^3 - E_n = 0}$$

ist Minimalpolynom einer Matrix  $A$ .  
Diese stellen wir jetzt auf:  
(Begleitmatrix)

$$\mu_A = X^3 - 1$$

dieses hat 3 versch. Nullstellen:

a) 1  
b)  $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$

c)  $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$

zerfällt in 3 p.v. L.F.  $\Rightarrow$  Diagonalmatrix



13.

$$\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \leftarrow \ominus \\ \leftarrow \ominus \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \leftarrow \ominus \\ \leftarrow \ominus \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \leftarrow \ominus \\ \leftarrow \ominus \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \leftarrow \oplus \\ \leftarrow \oplus \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \left. \begin{array}{l} \leftarrow \ominus \\ \leftarrow \ominus \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \oplus \cdot (-1) \\ \leftarrow \oplus \cdot (-1) \\ \leftarrow \oplus \cdot (-1) \\ \leftarrow \oplus \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(nicht verifiziert  $\nabla \nabla \nabla$ )