Der allgemeine Abbildungsbegriff

Def. 1 A, B seien Mengen.
Eine Zuordnungsvorschrift : f , die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zuordnet, heißt Abbildung von A nach B.
A heißt Ausgangsmenge (Definitionsbereich) , B heißt Zielmenge von f .

Schreibweisen: $x \xrightarrow{f} y$ bzw. $y = f_{(x)}$ Abbildung (Funktion) $\boxed{f : A \to B}$.
Die Menge Bild (f) : = $\{ f_{(x)} \mid x \in A \} \subseteq B$ heißt Bild (Wertevorrat) von f .

Def. 2 Die Abbildung $\boxed{id_A : A \to A}$, definiert durch $id_A (x) = x$ für jedes $x \in A$ heißt Identität auf A

Def. 3 A, B, C seien Mengen und $f : A \to B$ sowie $g: B \to C$ Abbildungen.
Die Abbildung: $\boxed{g \circ f : A \to C}$ ist erklärt durch $\mathbf{(}\, g \circ f\, \mathbf{)}_{(x)} := g\,(\, f_{(x)}\,)$ für alle $x \in A$.
Sie heißt Komposition (Hintereinanderausführung) von g und f . („ Erst f dann g “)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & B \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

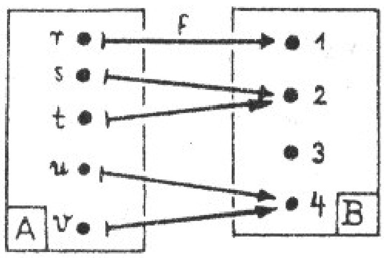
Def. 4 $\boxed{f : A \to B}$ heißt surjektiv , wenn Bild (f) = B , d.h. wenn der Wertevorrat mit der Zielmenge übereinstimmt.

Def. 5 $\boxed{f : A \to B}$ heißt injektiv , wenn für je zwei Elemente $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt.

Def. 6 $\boxed{f : A \to B}$ heißt bijektiv , wenn f surjektiv und injektiv ist. Es existiert die Umkehrabbildung (die zu f inverse Abbildung) $\boxed{f^{-1} : B \to A}$.
Diese ordnet jedem $y \in B$ das eindeutig bestimmte Element $x \in A$ zu :
$x = f^{-1}{}_{(y)}$, das vermöge f auf y abgebildet wird, d.h. $y = f_{(x)}$.
Anmerkung: Es gelten : $x = f^{-1} \circ f = id_A$ und $f \circ x = f^{-1} = id_B$.

Def. 7 Der allgemeine Gleichungsbegriff.
Seien $f : A \to B$ eine Abbildung und $b \in B$ fest. (f, b gegeben)
$\boxed{f_{(x)} = b}$ (*) heißt Gleichung für die Unbekannte $x \in A$.
Die Lösungsmenge von (*) ist $L_{(*)} = \{ x \mid x \in A$ und x wird durch f auf b abgebildet $\}$

SATZ: (4) f surjektiv $\Leftrightarrow$ (*) besitzt für jedes feste $b \in B$ mindestens eine Lösung. (Existenz)
(5) f injektiv $\Leftrightarrow$ (*) besitzt für jedes feste $b \in B$ höchstens eine Lösung. (Eindeutigkeit)
(6) f bijektiv $\Leftrightarrow$ (*) besitzt für jedes feste $b \in B$ genau eine Lösung. (Eindeut. Existenz)
Kennt man f^{-1} , so kann die Lösung x berechnet werden : $\boxed{x = f^{-1}{}_{(b)}}$. (Lösungsformel)



Beispiel 1.

$\boxed{f: A \longrightarrow B}$

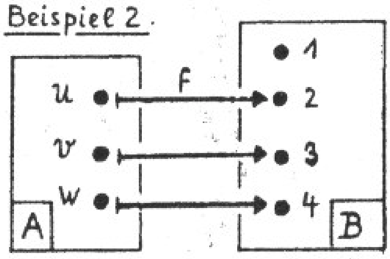
ist weder surjektiv noch injektiv.

$Bild(f) = \{1,2,4\}$.

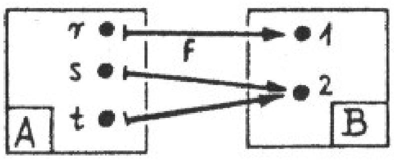
Die Gleichung: $\boxed{f(x) = 4}$ $(*)$ hat die Lösungsmenge: $\mathcal{L}(*) = \{u, v\}$.

Die Gleichung: $\boxed{f(x) = 3}$ ist unlösbar.

Beispiel 2.

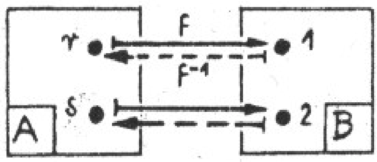


$\boxed{f: A \rightarrow B}$ ist injektiv aber nicht surjektiv.



Beispiel: 3 $\boxed{f: A \longrightarrow B}$ ist surjektiv aber nicht injektiv.

Beispiel 4. $\boxed{f: A \longrightarrow B}$ ist bijektiv



Umkehrabbildung:

$\boxed{f^{-1}: B \dashrightarrow A}$