Lineare Algebra

1. Semester (WS 1999) – Prof. Pahlings - Zusammenfassung

Diese Zusammenfassung von Klaus Ridder hat weder Anspruch auf Vollständigkeit noch auf Richtigkeit. Für Anregungen und Hinweise auf Fehler / Verbesserungsvorschläge bi ich immer dankbar.

Inhalt

Kapitel I - Grundlagen

§1 - Mengen und Abbildungen

N,Z,Q,R, Mengenoperationen

Def.: **Funktion**: jedem x genau ein y zugeordnet.

Bem.: **Abb**. f und g **gleich** wenn D und W gleich und jedem f(x) immer = f(y)

Def.:
Inkejtiv: max. 1 Urbild („ein-eindetig, also auch rückwärts eindeutig)
Surjektiv: min. 1 Urbild („ganzer Wertebereich abgedeckt")
Bijektiv genau 1 Urbild Injektiv + Surjektiv (1:1 – Abbildung)

Def.:
Bild: f(x)
Urbild: $f^{-1}(y)$

§2 - Äquivalenzrelation

Relation: Beziehung zwischen 2 Elementen aus einer Menge.

Reflexiv: **aRa**
Symmetrisch: **aRb → bRa**
Transitiv: **aRb, bRc → aRc**

Def.: **Äquivalenzrelation** ~: aRa, aRb → bRa, aRb, bRc → aRc

Def.: **Äquivalenzklasse [a]~:** alle Elemente, mit denen a eine Äquivalentrelation hat.

Lemma 1:
a) **a ~ b** 3 **[a]~ = [b]~** (2 äquiv. Elemente sind i.d. gleichen Äq.Klasse)
b) **[a]~ = [b]~** oder **[a]~** O **[b]~** = Ÿ (Äq.Kl. sind gleich oder disjunkt)
c) jedes Element aus M liegt in **einer** Äquivalenzklasse.

Def.: **Partition** A : Teilmenge von M
- Œ A = M (alle Partitionen zusammen bilden M)
- A O A' = Ÿ (sie überschneiden sich nicht)

Def.: **Potenzmenge** = alle Teilmengen

Bem.: die **Äquivalenzklassen** zu ~ bilden zusammen eine **Partition**.

M / ~ : Partition aller Äquivalenzklassen bezüglich ~

§3 - Körper und Ringe

Def. 1:	Menge K = **Körper**, wenn: - Abb. +: KDK → K (a,b) → a+b - Abb. E: KDK → K (a,b) → aEb - **Körperaxiome** gelten alle

Körperaxiome:

●	●	●	(K1)	+ **Assoziativ**	(a+b)+c = a+(b+c)	
●	●	●	(K2)	+ **neutral (0)**	0+a = 0	0 eindeutig !
●	●	●	(K3)	+ **invers (-a)**	a + (-a) = 0	
●	●	●	(K4)	+ **Kommutativ**	a + b = b + a	
●	●	●	(K5)	E **Assoziativ**	(aEb) Ec = aE (bEc)	
		●	(K6)	E **neutral (1)**	1Ea = a	1 eindeutig !
			(K7)	E **invers (a^{-1})**	a E (a^{-1}) = 1	
	●	●	(K8)	E **Kommutativ**	a E b = b E a	
●	●	●	(K9)	+E **Distributiv**	aE(b+c) = aEb + bEc	

Ring
kommutativer Ring
kommutativer Ring mit 1

Folgerung 1:	**0Ex = 0**

Folgerung 2:	**-(-x) = x**

Folgerung 3:	xEy=0 3 x oder y = 0

Bem.: **Ring**: mind. 1 Element (0), **Körper**: mind. 2 Elemente.

Def.:	**Kongruenzklasse**: Z/(3) $[1]_3 = [4]_3 = [7]_3$ ... alle Zahlen deren Differenz ein Vielfaches von 3 ist. a) 0,3,6,9,.... b) 1,4,7,10,..... c) 2,5,8,11,.....

Die neutralen Elemente der Muliplikaion sind 1,4,7,10,....

Lemma 1:	dieses **Z/(m)** ist ein **kommutativer Ring mit 1** (alles außer „inverses Element der Multiplikation“ gilt)

→ zur Übung beweisen! ☺

Satz 1:	Z/(m) **Körper** 3 m **Primzahl**

→ zur Übung beweisen! ☺

da aEb = m in der Äq.Klasse von 0 liegt, und es zu 0 kein Inv.Element gibt.

§4 - Elementare Umformungen

LGS: m Zeilen der Form $\sum_{i=1}^{n} a_{mn} x_{mn}$ bzw. mDn-Matrix

Bem. 1:	Elementare Zeilenumformungen (Lösungsmenge bleibt gleich):

- **V_{ij}** Zeile i und j vertauschen
- **A_{ij}(c)** i:=i+cj
- **C_i(c)** i:=ci

Stufenform:
1.) Ab Zeile r nur Nullen. Und vorher:
2.) unter der Diagonalen nur Nullen
3.) auf der Diagonalen Einsen
4.) sonst nur Nullen.

Satz 1:	Jede Matrix K^{mDn} kann durch elementare Zeilenumformungen auf Stufenform gebracht werden. (Beweis: GAUSS-Algorithmus)

§5 - Matrizenrechnung

Matrizen-Addition: **komponentenweise**.
Matrizen-Multiplikation: a:=1E1 + 2E2 + 3E3 usw.

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix} \end{array}$$

<u>ACHTUNG</u>: ADB → A i K^{mDn}, B i K^{nDo} muss gelten !!!

Bem.:	LGS kann als Matrizenprodukt geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + a_{13}x_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_2 \\ a_{31}x_3 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 \end{bmatrix}$$

Lemma 1: K Ring, A i K^{mDn}, B i K^{nDo} C i K^{oDp}
Es gilt:
- (AEB)EC = AE(BEC) (**Assoziativgesetz**)
- AE(B+C) = AEB + AEC (**Distributivgesetz**)

Definition:	alle elementaren Zeilenumformungen lassen sich duch Multiplikation mit geeigneten Matrizen ausführen.

Bem.:	E_m = 0-Matrix mDm mit Einsen auf der Diagonalen.

Def.:	Umformungs-Matrizen

So geht's:	neue Zeile := ensprechende Zeile der Umformungsmatrix anschauen und jeweils die Zeile der Originalmatrix so oft nehmen, wie es in der entsprechenden Spalte der Umformungsmatrix steht.

1.) Zeile 2 und 3 **vertauschen** mit **Permunationsmatrix**:
(zu vertauschende Zeilen einfach in der Matrix vertauschen)
(klar: denn zu holende Zeilennr. := Spalte, in der die 1 steht.)
2.) Zeile 3 **c-mal** zur 1. **addieren**: in der 1.Zeile der Umformungsmatrix in der 3. Spalte das c hinschreiben.
3.) Zeile 3 mit Faktor c malnehmen: einfach in Zeile 3 die 1 durch in c ersetzen.

$$V_{ij} = P_{ij}(-) = \begin{bmatrix} 1 & - & - & - \\ - & - & 1 & - \\ - & 1 & - & - \\ - & - & - & 1 \end{bmatrix} A_{ij} = K_{ij}(c) = \begin{bmatrix} 1 & & c & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} M_{ij} = D_{ij}(c) = \begin{bmatrix} 1 & - & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & - & c & - \\ - & - & - & 1 \end{bmatrix}$$

Satz 1:	K **Ring mit 1** → K^{nDn} **Ring mit 1**. (mit Matrix-Addition und Matrix-Multiplikation)

→ zur Übung beweisen! ☺

Kapitel II - Vektorräume

§1 - Definition und Beispiele

K Körper. → K-Vektorraum: Menge V mit Abbildungen:

Def. 1:	Menge **V = K-Vektorraum**, (über Körper K), wenn: - Abb. +: VDV → V (v,w) → v+w - Abb. E: KDV → V (s,v) → sEv - **Vektorraumaxiome** gelten alle

(V1)	+ **Assoziativ VVV**	(u+v)+w = u+(v+w)	
(V2)	+ **neutral (0)**	0+a = 0	0 eindeutig
(V3)	+ **invers (-v)**	v + (-v) = 0	
(V4)	+ **Kommutativ**	v + w = w + v	
(V5)	E **Assoziativ SSV**	$(s_1 E s_2)$ Ev = s_1E $(s_2 E v)$	
(V6)	E **neutral (1)**	1Ev = 1	

(jetzt wird's anders als in K:)

(V7)	E **Distributiv SVV**	sE(v+w) = sv + sw	
(V8)	E **Distributiv SSV**	$(s_1 + s_2)$Ev = s_1v + s_2 v	

Elemente aus V: **Vektoren**, K Körper → „Vektorraum"
Elemente aus S: **Skalare** K Ring mit 1 → „K-Modul"

K^M = **alle** Abbildungen von M → K

Lemma 1:	V ist K-Vektorraum → a) **0** eindeutig, **-v** eindeutig b) **sEv = 0** → **s = 0** oder **v = 0** c) –v = -1Ev

§2 - Teilräume

Def.:	U a V **Teilraum** von V, wenn U auch **K-Vektorraum** ist.

Satz 1:	U Teilraum ←→ a) U @ Ÿ , b) u+u' i U, c) sEu i U.

Satz 2:	U_1, U_2 Teilräume von V → $\boxed{U_1 \text{ O } U_2}$ und $\boxed{U_1 + U_2}$ Teilräume von V.
	($\boxed{U_1 + U_2}$ = Menge der Summen)
sogar:	die Schnittmenge von Teilräumen ist wieder Teilraum.

Def.:	K^Y = {f : Y → K} $K^{(Y)}$ = {f : Y→K | nur endlich viele f(x) @ 0 } (Teilraum von K^M)

§3 - Linearkombinationen und Erzeugendensysteme

Def. 1:	v heißt **Linearkombination von v_1,..,v_n**, wenn es s_i gibt mit v= Ì $s_i v_i$. <v_1,...,v_m> : Menge aller Linearkombinationen

Satz 1:	Y a V → <Y> Teilraum. („Durchschnitt aller Teilräume von V, die alle y g Y enthalten.)

Def.:	U = <Y> 3 Y **Erzeugendensystem** von U V endlich erzeugt 3 V hat endliches Erzeugendensystem

Def.:	Y **Basis** von V 3 V lässt sich eindeutig als LK von Ì s_i**y_i** darstellen.

§4 - Lineare Abhängigkeit und Basen

Def.:	**linear abhängig:** Nullvektor lässt sich mit mind. 1 s_i @ 0 darstellen:

$$\underline{0} = \sum_{i=1}^{n} s_i y_i$$

Lemma 1:	wenn Y **l.a.** ist, lässt sich ein u aus Y aus den anderen Vektoren kombinieren.

Satz 1:	**Basis = l.u**. Erzeugendensystem = **minimales** Erzeugendensystem

Lemma 1:	y={v,sv} l.a.

§5 - Existenz von Basen

Satz 1 (Basisergänzungssatz) **: Jede l.u. Teilmenge aus V lässt sich zu einer Basis von V ergänzen. (**mit Hilfe von geeigneten Vektoren aus einem Erzeugendensystem von V)

Folgerung: jeder Vektorraum hat eine Basis, jedes EZ-System enthält eine Basis.

Bem. 2: Basisergänzungssatz ohn Lemma von Zorn nur für endlich erzeugte Vektorräume beweisbar.

Bem. 3: X a U → <X> a U

Lemma1: v_i der Basis := v_i+v_j → immer noch Basis.

§6 - Austauschsatz und Dimension

Satz 1: (**Austauschsatz von Steinitz**):
wenn man einen Vektor der Basis A durch einen GEEIGNETEN (!) der Basis B ersetzt, bleibt A eine Basis.

(geeignet = Basis muss l-u- bleiben, der ersetzte muss also einer von den den Vektoren aus V sein, aus denen man den neuen aus W linear kombinieren kann.

Satz 2: **2 Basen** haben immer **gleich viele Vektoren**.

Def.: dim V = |B| (Anzahl d. Vektoren der Basis)

Folgerung: V endlich erzeugter Vektorraum: →
a) dim V = n (Dimension = Anzahl d. Basisvektoren)
b) U a V → dim U R dim V (U Teilraum → kleinere Dimension als V)
c) M a V, |M| < dim V → <M> @ V
d) M a V, |M| > dim V → M l.a.
c) M a V, |M| = dim V, <M>=V → M Basis von V
d) M a V, |M| = dim V, M l.u. → M Basis von V

Satz 3: (**Dimensionssatz**) U Unterräume von V:
dim U_1 + dim U_2 = dim (U_1+U_2) + dim (U_1 O U_2)

Kapitel III - Lineare Abbildungen und Matrizen

(zu diesem Kapitel gibt es einen ausführlichen Sonderteil in einer Extra-Datei, daher hier alles kurzgefasst:)

§1 - Lineare Abbildungen

48.3

Lemma 1:	f (k*v + v') = k* f(v) + f(v') → Abbildung linear.

Def.:	Basisfolge = geordnete Basis

Satz 1:	Es gibt genau eine lin. Abb. (definiert durch Bild)

9.1

§2 - Isomorphismen

Monomorphismus
(**in**jektiv, max.1 Urbild)

Epimorphismus
(**sur**jektiv, min. 1 Urbild)

Isomorphismus ≅
(**bi**jektiv, genau 1 Urbild)

Endomorphismus
(**V=W**)

Automorphismus
(**V=W + bi**jektiv)

Lemma1:	Isomoprhismus („≅") ist **Äquivalenzrelation**.
	a) **reflexiv: U≅V → V≅U** (Abb. Lin → UmkAbb.lin.)
	b) **transitiv: U≅V + V≅W → U≅W** (2x ausklammern)

Satz 1:	f Monomorphismus	3 $f(v_i)$	**l.u.** (v_i Basisfolge)
	f Epimorphismus	3 $<f(v_i)>$	**= W**
	f Isomprphismus	3 $f(v_i)$	**Basisfolge**

Satz 2:	V,W endl. Erzeugte K-Vektorräume.
	V @ W 3 **dim V = dim W** (insbesondere: dim V = n 3 $V \cong K^n$)
Dazu Def.:	Mengen B, B' „**gleich mächtig**" (|B| = |B'|) ←→ **bijektive Abb**. existiert

Beispiel: Basis von V: $(v_1,\ldots v_n)$: **V → K^{nD1}** ist Isomorphismus.
„Die Funktion, die den Vektoren eines Vektorraums die K^{nD1} – Spalte mit den Koeffizienten vor der Basis des Vektors zuordnet, ist ein Isomorphismus.

V → K^{nD1}

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \to \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = j_B(v)$$

§3 - Kern und Bild

Def.: Kern φ = alle v, die auf <u>0</u> abgebildet werden.
Bild φ = alle Punkte im Bildbereich, die getroffen werden.

Lemma 1: V → linear:
a) **Kern** φ ist Teilraum von **V**, Kern φ = **{0}** 3 φ **Monomorphismus**
b) **Bild** φ ist Teilraum von **W**, Bild φ = **W** 3 φ **Epimorphismus**

(logisch: Monom. = injektiv = jedes Bild nur 1 Urbild. Gilt bei link. Abb. Immer, außer wenn eben ein Kern existiert, der ja komplett auf <u>0</u> abgebildet wird.)

Beispiel(!): Lösungsmenge eines homogenen LGS ist genau Kern φ (Teilraum K^{nD1})

Ein LGS ist ja AE[], jeweils =0. das ist aber genau der Kern von []. (s.49.2/26)

Satz 1 (**DIMENSIONSSATZ)**: V→ W linear.
dim (**V**) = dim (**Bild** j) + dim (**Kern** j)

(logisch: aus dem Kern heraus wird ja nix abgebildet, also ist das Bild nur die Dimension von V ohne den Kern.)

Def.!: <u>Rang</u> der **Abbildung** φ = <u>Dimension</u> des **Bildes** von φ = <u>Rang</u> der **Abb.-Matrix** A

Folgerung: (für lineare (!) Abb.:)

a) φ Monomorphismus	(φ injektiv):	Rg φ = dim V
b) φ Epimorphismus	(φ surjektiv):	Rg φ = dim W
c) φ Isomorphismus	(φ bijektiv):	dim V = dim W

a) klar: sonst gäbe es ja noch einen Kern, dann ist es nicht mehr injektiv.
b) klar: wenn ganz W getroffen wird, muss φ auch ganz W bedienen.

Bem.:

	injektive Abb.:	|X| = |Bild f|
	surjektive Abb.:	|Y| = |Bild f|
→	bijektive Abb.:	|X| = |Y|

§4 - Homomorphiesatz

Satz 1: $\varphi: V \to W$ lineare Abbildung.
$w \in$ Bild φ

$$\overset{-1}{\varphi}(w) = \{v_0 + u \mid u \in Kern\,\varphi\}$$

„die Faser von w aus W ist v_0 + alle Elemente des Kerns.“.
(logisch: man kann zu v_0 ja aus dem Kern addieren, was man will – man kommt immer auf dasselbe w, da alle Elemente aus u ja in 0 abgebildet werden; w+0=0.)

DEF. Faktorraum / Restklassenraum: U Teilraum von V. $v \in V$:

1.) $v + U := \{v + u \mid \mathbf{u \in U}\}$ (ein v + alle u)
2.) $V / U := \{v + U \mid \mathbf{v \in V}\}$ (alle v + alle u) ← Restklassenraum

zu 1.): ein Unterraum U durch 0 wird per v verschoben.
zu 2.): der Unterraum U durch 0 wird in ganz V „rumgeschoben“

(Nullvektor in V/U = 0+U = U)

Vergl.: $\mathbb{Z} / \{m\} = \{ [x]_m \mid x \in \mathbb{Z}\}$ $[x]_m = x + \mathbb{Z}\cdot m$

Bem.: $\mathbf{v} \sim_U \mathbf{v'} \Leftrightarrow \mathbf{v - v'} \in U$ (~ = Äquivalenzrelation)

$$[v]_{\sim_U} = \{v' \in V \mid v - v' \in U\} = \{v + u \mid u \in U\} = v + U$$

(Alle v’s, die in U liegen, liegen in der gleichen Äquivalenzklasse.)

Homomorphiesatz: $\varphi: V \to W$ lin.Abb.

a) Kern φ: Teilraum von V
Bild φ: Teilraum von W

b) $\pi: V \to V / \text{Kern } \varphi$
$v \to v + \text{Kern } \varphi$

→ es gilt: ϕ: **V / Kern** $\varphi \cong$ **Bild** φ ($\cong$ = Isomorphisums) → $\pi \circ \phi = \varphi$

Wenn man zu V einen Vektor aus dem Kern dazuaddiert, kommt man trotzdem auf dasselbe Bild, weil ja alle Vektoren aus dem Kern auf 0 abgebildet werden.
Da unsere Abbildung linear ist, haben wir so einen Isomorphismus.
(Da abb. Proportional und |V| = |W|→ Abb. Isomorphismus)

Folgerung: a) dim V / U = dim V – dim U
b) jeder Teilraum eines Vektorraums ist Kern einer lin. Abb.

z.B. U ist waagerechte Fläche, V ist 3D-Raum: jetzt haben wir nur noch die vertikale Achse linear unabhängig, und die hat dim=1.

§5 - Rang einer Matrix

(A g K^{mDn}, K Körper, φ_A: K^{nD1} → K^{mD1}, x → Ax)
Rg A := Rg j$_A$:= dim Bild j$_A$

Der Rang einer Matrix ist gleich dem Rang des Bildes der Abbildung, die durch die Matrix erzeugt wird.

Satz 1: A g K^{mDn}
a)

$$\text{Rg } A = \dim \left\langle \begin{bmatrix} a_{11} \\ M \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ M \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right\rangle$$

SR(A) = “Spaltenraum” der Matix A

b) der Rang ändert sich nicht bei elementaren Spaltenoperationen
c) der Rang ändert sich nicht bei elementaren Zeilenoperationen

Rang = dim Bild = Anzal der l.u. Vektoren in der Matrix

zu a): dim Bild A = dim der Bilder der Einheitsvektoren
zu b): trivial. (II.§5 Lemma2)
zu c): Der Kern ist ja die Lösungsmenge des homogenen LGS[1], und diese ändert sich bei Zeil.Op. nicht, also auch der Rang nicht.

Satz 2: a) **JEDE** K^{mDn}-Matrix A kann man durch diese elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen auf die Form bringen, dass überall Null steht nur auf der Hauptdiagonalen ab **r** Einsen.

b) dim ZR(A) = dim SR(A) “**Zeilenrang = Spaltenrang**” (Rg A = r)

§6 - Der Hauptsatz über LGS

Hauptsatz: a) AEx = $\underline{0}$: dim **Lösung des hom. LGS** = dim **Kern** j **:**
(dim=0 →eindeutig lösbar)
b) AEx = $\underline{b}$: lösbar, wenn Rg[A] = Rg[A,b] ← erweiterte Matrix (mit Wertespalte)
c) AEx = $\underline{b}$: Lösungsmenge ist $v_1 + L_0$ (**v_1** = **eine** Lsg., + **L_0** = **alle** Lsg.)
Ax=b eindeutig lösbar → Rg A = n
d) m R n: Rg A = n 3 Ax=b eindeutig lösbar. (merke: Rang=dim Bild)

zu b): b muß ja l.a. sein, damit es eine Lösung gibt.
zu c):

Satz 2: f: K → K Polynomfkt. Vom Grad maximal n, hat f maximal (!) n **Nullstellen** (oder f ist gleich die Nullfunktion.)

→ Beweis?

Satz 3: die Funktionen $x \to x^i$ sind l.u.

→ Beweis?

[1] Homogenes LGS = rechts überall Null

§7 - Matrix einer linearen Abbildung

Def.: $_{B'}[\varphi]_B$: = $[a_{ij}]$ g K^{mDn} ⇔ j $(\mathbf{v_j})$= Ì $\mathbf{a_{ij}w_i}$

in der j-ten Spalte stehen die Koeffizienten, um in B' das Bild des j-ten Basisvektors aus B darzustellen.
(Koeffizienten aus j-ter Spalte * Basisvektor**en** aus B' (links) = Bild des j-ten Basisvektors aus B (rechts)
1. wie ist das Bild des 1. Basisvektors (auch in B geschriben) ?
2. wie stelle ich das in B' dar?
3. → diese Koeffizienten (vor den B'-Vektoren) in die 1. Spalte schreiben usw.

50.3

Bezeichnung: $_B$**[v]** = Ú$_B$**(v)** =Vektor aller **Koeffizienten vor den Basisvektoren** der Basis B, um v zu erzeugen. $(a_1,....,a_n)$
(also Spalte j in der Abbildung, falls v der Einheitsvektor e_j von w ist.)

51.1

Satz 1: **$_{B'}$ [j (v)] = $_{B'}$[j]$_B$E $_B$[v]**

Koeffizienten um v durch B auszudrücken E Basiswechselmatrix
= Koeffizienten um φ(v) durch B' auszudrücken

Folgerung: Rg φ = Rg $_{B'}[\varphi]_B$

Satz 2: **$_{B''}$[j 6 Ï]$_B$ = $_{B''}$[j]$_{B'}$ E $_{B'}$[Ï]$_B$**

Bem.: **$_{B'}[id_V]_B$** = *Basiswechselmatrix* (wenn U=V=W)

Satz 3: $_{C'}[\varphi]_{B'}$ = $_{C'}[id_V]_C$E$_C$**[j]$_B$**E$_B[id_V]_{B'}$ (2x Satz 2 anwenden)

B = (v_1, v_2, v_3, v_4) ← Basis des Ausgangsbereichs
B' = (w_1, w_2, w_3) ← Basis des Bildbereichs

$$_{B'}j_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

$\varphi(v_2) = a_{12}Ew_2 + a_{22}Ew_2 + a_{32}Ew_2 + a_{42}Ew_2$

§8 - Algebra der Linearen Abbildungen

Satz 1: **Hom(V,W)** a Abb(V,W)

Der Raum der **linearen Abbildungen** V→W ist ein **Teilraum** aller Abbildungen V→W

Hom(V,W) → K^{mDn} ist *Isomprphismus*

Die Abbildung „Abbildung → Abbildungsmatrix“ ist ein Isomorphismus.

Satz 2 **End(V)** := Hom(V,V) ist ein *Ring mit Eins*

Eine Abbildung heißt Endomorphismus, wenn Definitions- und Bildbereich identisch sind.

$Ü_B$: **End(V) → K^{nDn}** ist *Ring-Isomprphismus*

d.h. $Ü_B$ ist bijektiv, und sowohl + und E kann man vor oder nach der Abbildung machen.

Def.: **K-Algebra**: E (KDA)→A, (wie in K-Vektorraum) (A Matrix)
+ (ADA)→A (wie in K-Vektorraum)
(neu →) *** (ADA)→A** **(A,+,*) ist ein *Ring***
(sEaEa’ = aEsEa’ = aEa’Es): *Skalar ist „durchshiebbar“*

Eine K-Algebra ist ein K-Vektorraum mit einer zusätzlichen Multiplikation, in der 2 Matrizen **komponentenweise** multipliziert werden.

Beispiele: a) End(V) , b) K^{nDn}, c) C

§9 - Volle lineare Gruppen

Def.: **Monoid**: - *Menge* **G**,
- *Verknüpfung* E**(G**D**G)** → **G** , E(a,b) → aEb

• •	K5 - (G1)	E **Assoziativ**	(aEb) Ec = aE (bEc)	
• •	K6 - (G2)	E **neutral (1)**	eEa = a	e eindeutig
		zusätzlich bei **GRUPPE:**		
•	K7 - (G3)	E **invers (a^{-1})**	a E (a^{-1}) = 1	

Eine Gruppe ist eine Menge mit der MAL-Verknüpfung, für die das Assoziativgesetz gilt, es eine neutrale 1 gibt und ein inverses. Fehlt das inverse, ist es ein Monoid.

Lemma 1: a) e eindeutig.
b) –a eindeutig, „a ist invertierbar“ ⇔ a^{-1} existiert. (also G3)
c) a^{-1} E b^{-1} = $(a\text{E}b)^{-1}$

Def.: **GL(V)** = alle *bijektiven Endomorphismen (also alle bij. V→V-Abbildungen)*
GL(n,K) = alle K^{nDn} – Matrizen mit ***Rang n***

Satz 1: a) **(GL(n,k),**6**)** ist „**general linear group**[2]“ auf V
b) **(SL(n,k)** ist „Gruppe mit Matrixmultiplikation“
(volle lineare Gruppe mkit Rang n über K)
c) GL(V) → GL(n,k) ist *Isomorphismus* *(dimV=n)*
End(V) → K^{nDn}

51.3

Satz 2: **Rg A = n 3 A invertierbar.**
(inverse Matrix davor oder dahinter mult.)

Lemma 2: **A** g K^{mDn} , **C** g K^{nDp} → Rg (**A** E **C**) R Rg **A**, Rg **C**

→ Beweis?

Matrix invertieren: zu invertierende Matrix A und Einheitsmatrix E simultan so umformen, aus A die Einheitsmatrix wird. Was aus E wurde ist dann A-1.

$$
\begin{array}{cc}
* & \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

WARUM? BEISPIEL: Nun, den 1. Vektor (100) muss man ja z.B. erhalten, indem man jede Zeile der Ausgangsmatrix mit der 1. Spalte der Abbildungsmatrix multipliziert. Dies muß nun in der 1. Zeile 1 ergeben und in den anderen beiden Null. Wir haben also ein Gleichungssystem, dass es zu lösen gilt; die Lösungen a_1, a_2, a_3, schreiben wir dann genau da hin. Da wird das mit jeder Spalte von E_n machen müssen, machen wir es simultan auf Einmal.

[2] General linear group = volle lineare Gruppe

M_r E .... E $M_1 = A^{-1}$

Da man jede Zeilenumformung ja als Multiplikation mit einer Elementar-Matrix M (siehe weiter vorne, „Umformungsmaxtrix“) auffassen kann, erhält man die Einheitsmatrix auch, wenn man die entsprechenden Umformungsmatrizen nacheinander davormultipliziert.

Man kann die Umformungsmatrizen auch vorher miteinander multiplizieren, dann ergeben sie die inverse Matrix: diese mal der gegebenen Matrix gibt ja die Einheitsmatrix.

→ wenn Rang=n ist 3 Matrix ist Element von GL(n,K) (ist ja Voraussetzung zum invertieren),

$M^{-1} = M$

Das inverse einer Elementar-Matrix M ist wieder genau diese.

Kapitel IV - Determinanten

ZIEL: Abb **det: K^{nDn} → K** mit:
- det (AEB) = det(A) Edet(B)
- det E_n = 1
- Rg A R n → det A = 0 sdf

Wir suchen eine Abbildung, die jeder Matrix mit gleich vielen Zeilen und Spalten eindeutig eine Zahl zuordnet. Dabei muss gelten dass die Determinante desy Produktes zweiter Matrizen gleich dem Produkt der Einzeldeterminanten ist, dass die Determinante der Einheitsmatrix immer 1 ist und dass die Daterminante immer gleich Null ist, wenn der Rang kleiner als n ist (die Matrix also weniger als n (=Anzahl der Zeilen bzw. Spalten) linear unabhängige Zeilen / Spalten besitzt.

§1 - Permutationen

Def.: Ð Menge
Menge der Permutationen â : **Sym(Ð) = {**j **:**Ð→Ð | j **bijektiv}**

Eine bijektive Abbildung einer Menge in sich selbst heisst **Permutation**.

Wertetabelle: (1 2 3 4 5)
(2 4 1 3 5)

1 geht über in 2, 2 geht wieder über in 4 ect. (immer von oben nach unten lesen)

Zyklus â g S_n: (1 2 4 3) (5): immer von hinten nach vorn gelesen!
(**ziffernfremd**=jede Zahl kommt nur in einem Zyklus vor!)

Wir beginnen in der rechtesten Klammer: dort schauen wir so die 1 hingeht. Hier ist sie ja gar nicht drin, also bleibt sie. Bei dem Wert wo sie hingegangen ist (also wieder 1) wird dann in der Klammer davor nachgeschaut wo das hingeht, bis ganz links.

Bem.1: (Sym(Ð),6) ist **symmetrische Gruppe** auf Ð (= es gibt n! Permutationen)

Es gibt ja n! mögliche Permutationen, das nennt man „Symmetrische Gruppe“

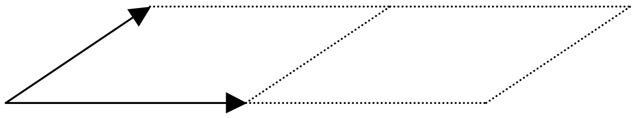
Transposition = 2-Zyklus z.B. (3 5)

Satz 1:
a) Jeder Zyklus â ist ein Produkt von **ziffernfremden** Zyklen.
b) Jeden Zyklus â kann man als Produkt von **Transpositionen** schreiben.
c) Jeden Zyklus â kann man als Produkt von **Transpositionen** aus { (0 1) (1 2) ... (n-1 n) }schreiben.

→ „Signum“
→ „alternierende Gruppe“

§2 - Determinanten

52.2



Ç(v,w) = Flächeninhalt zwischen den beiden Vektoren v und w

<u>Anschaulicherweise gilt:</u>
a) Ç(sv,w) = sEÇ(v,w)
b) Ç(u+v,w) = Ç(u,w) + Ç(v,w)
c) Ç(v,v) = 0
d) Ç(e_1, e_2) = 1

$$
\begin{aligned}
&\Delta\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\right) \\
&= \Delta(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) \\
&= \Delta(ae_1, ce_1 + de_2) + \Delta(be_2, ce_1 + de_2) \\
&= \Delta(ae_1, ce_1) + \Delta(ae_1, de_2) + \Delta(be_2, ce_1) + \Delta(be_2, de_2) \\
&= ac \cdot \Delta(e_1, e_1) + ad \cdot \Delta(e_1, e_2) + bc \cdot \Delta(e_2, e_1) + bd \cdot \Delta(e_2, e_2) \\
&= ac \cdot 0 + ad \cdot 1 + bc \cdot (-1) + bd \cdot 0 \\
&= ad - bc
\end{aligned}
$$

Wir betrachten die beiden Vektoren v= [ab] und w= [cd].
1. Beide Vektoren aufgespaltet in ()e_1 $^+$ ()e_2 schreiben.
2. Satz b anwenden: statt 2 Vektoren zu addieren und dann die Fläche mit dem dritten zu berechnen können wir einzeln die Fläche zum dritten berechnen.
3. "
4. Satz a anwenden
5. Satz c anwenden
6. fertig!

Def.: D: VD...DV → K (v v-zeilige Vektoren) heißt „Determinantenform“, wenn gilt:

(1) multipliziert man einen Vektor mit s, kann man auch die ganze Determinante mit s multiplizieren.
(2) Addiert man zu einem Vektor einen zweiten hinzu, entspricht das der Summe der Determinanten von der Ursprungsmatrix und einer Matrix, in dem dieser Vektor durch den zweiten ersetzt wurde.
(3) Sind 2 Vektoren gleich, ist die Determinante Null.
(4) Die Determinante der Einheitsmatrix ist 1.

Lemma 1:

a) vertauscht man 2 Vektoren, kehrt sich das Vorzeichen der Determinanten um.
b) ... auch wenn man das mehrmals tut.
c) Addiert man zu einem Vektor das Vielfache eines anderen, ändert sich die Determinante nicht!

Satz 1: die Determnante existiert und ist eindeutig.

„alternierende Multilinearform.“: Wie Determinante, nur daß die Determinante der Eimheitsmatrix nich gleich 1 ist, sondern c.

§3 - Eigenschaften der Determinante

Satz 1: det (AEB) = det A E det B
det (A^{-1}) = $(\det A)^{-1}$

A) die Determinante des Produktes zweiter Matrizen ist gleich dem Produkt der Determinanten. B) die Determinante der Umkehrmatrix ist gleich dem Kehrwert der Det. der Originalmatrix.

Satz 3: Man kann auch z.B. eine 4x4 – Matrix erst in vier 2x2-Matritzen teilen, diese Det’s einzeln ausrechnen, die Ergebnisse in eine neue 2x2-Matrix schreiben und die Det. ausrechnen.

Satz 4: Laplace’scher Entwicklungssatz

Die bekannte Berechnungsvorschrift für Determinanten.

01.2

Def.: adjunkte Matrix: in jede Zelle wird der Wert der „Rest-Determinante“ geschrieben.

#	-	#	#	#	#
#	-	#	#	#	#
-	A	-	-	-	-
#	-	#	#	#	#
#	-	#	#	#	#
#	-	#	#	#	#

Corollar: adj A E A = det A E E_n
→ A invertierbar 3 **Rg A = n** bzw. **det A @ 0**

Die adjunkte Matrix E Matrix = 0-Matrix mit dem Determinantenwert auf der Diagonalen.

§4 - Polynomringe

Def. **Polynomring R = K[X]**: Eine K-Algebra mit Polynomfunktionen
$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ n = Grad.

Bem. 1: K[X] hat unendlich viele Elemente.

Bem. 2: Polynom @ Polynomfunktion!

Satz 1: Einsetzungshomomorphismus:

Der eindeutig bestimmte K-Algebra-Homomorphismus, der jeder Funktion den Wert zuordnet, den man für x einsetzen muß.

§5 - Polynome über Körpern, Nullstellen

Lemma 1: Grad (fEg) = Grad f + Grad g

Satz 1: Polynomdivision: **g=qf+r** existiert zu jedem Polynom g.

Man kann jedes Polynom mit Rest durch eins dividieren, sodaß eins von niedrigerem Rang rauskommt.

02.1

Def.: a **Nullstelle** von **f** g **K[X]** 3 **f(a) = 0**
Folgerung: **a** Nullstelle 3 **f (X – a)** E **q** (q g K[X])

... das bekannte „Ausklammern“ einer Nullstelle.

Def.: a Nullstelle der Vielfachheit k: **f = (X-a)^k**E**q** mit **q(a)** @ **0**
Folgerung: **f** g **K[X]** hat Nullstellen **a_1, ..., a_m** mit Vielfachheiten **k_1,...,k_n**, →
f = (X-a_1)$^k{}_1$E**(X-a_1)$^k{}_2$**E**(X-a_1)$^k{}_m$** E**q** (wobei **q** @ **0**)

Def.: „**f zerfällt in Linearfaktoren**“ 3 **Grad q** @ **0** →
“**f algebraisch abgeschlossen**“ 3 jedes f gK[X] zerfällt in Lin.Fakt.

Für R und Q gilt dies z.B. nicht, für C schon!

Satz 2: P(K) = {**f:K→K** | f Polynom} $x \to \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

→ es gibt genau einen **K-Algebra-Homomorphismus**
j **:K[X] → P(K)** mit **X → id_K**
x → x

K=|¥| → **Isomorphismus.**

Kapitel V - Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit

§1 - Eigenwerte

V K-Vektorraum, **B=(v_1,...,v_n)** Basisfolge.
Gesucht: Basis **P = $_B$(id)$_{B'}$** , so dass die Abbildung j diagonal ist.

Def.: **diagonalisierbar** 3 nach dem Basiswechsel **P^{-1}EAEP** (**P = $_B$(id)$_{B'}$**) ex.

Wir haben also nach dem Basiswechsel eine Abbildungsmatrix, auf denen nur die Diagonal-Einträge @ 0 sind. Das bedeutet, dass der i-te abzubildende Vektore (der ja VOR der Abbildungsmatrix stehet) (?) nur mit dem i-ten Diagonalelement multipliziert wird.

Def.: **Eigenvektor v=E$_j$(t)**, **Eigenwert t** 3 **t(v) = tEv**

Ein Vektor heißt Eigenvektor, wenn es für diesen Vektor egal ist, ob man ihn mit der gegebenen Abbildung abbildet oder nur mit einem „Eigenwert" t multipliziert.

Bem.: E_φ(t) = Kern (φ-tEid$_V$): „Eigenraum zum Eigenwert"

Lemma 1: t Eigenwert von φ
3 Rg (φ - tEE_n) < n
3 det (φ - tE E_n) = 0
3 det ($_B\varphi_B$ - tEE_n) = 0

Satz 1: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind l.u.

§2 - Das charakteristische Polynom

Def: **charakteristisches Polynom** = [XEE_n – A]

Das charakteristische Polynom ist die Einheitsmatrix E dem Eigenwert minus der Abbildungsmatrix.

Satz 1: ÷$_A$ = det (charakteristisches Polynom)

Satz 2: a) Bei Basiswechsel ändert sich ÷$_A$, det A und Spur A *nicht*.
b) t Eigenwert 3 t Nullstelle von ÷$_A$.

Def.: t **„algebraische Vielfachheit"** 3 t k-fache Nullstelle.
t **„gemoetrische Vielfachheit"** 3 dim **E$_j$(t)** = dim **Kern (j - tEE_n)**

Satz 3: t Eigenwert → geom. Vielfachheit R alg. Vielfachheit.

Satz 4: Cauchy-Hammilton: A g K^{nDx} → ÷$_A$(A)=0

§3 - Minimalpolynom

§4 - j -invariante Teilräume

§5 - Die Jordansche Normalform

Kapitel VI - Bilinearformen und Skalarprodukt

§1 - Der Dualraum

Def.:	**Dualraum** von V: **V* = Hom(V,K)** **Linearform** auf V: ein Element des Dualraums.

Eine **Linearform** ist also eine *bijektive* linearen Abbildungen von V nach K;
der **Dualram** sind ALLE Linearformen.

Bem.: zu B **duale Basis**:

Wer hat Lust, das Skript zu Ende zu führen? Der kann bei mir gern die WORD-Datei anfordern!

Mail: siehe unten.