WS 05/06 - Analyse von Algorithmen
Formelsammlung/Merkblatt

Ulrich Loup

Reduktion der Variablenzahl in einem Programmflußgraph

Der Programmflußgraph habe m Kanten bzw. unbekannte Größen.

1. Spannbaum kennzeichnen und fundamentale Zyklen (n Stück) aufstellen (Vorzeichen bzw. Flußrichtung beachten).
2. Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ aus n Spalten mit den zu dem jeweiligen Zykel passenden Einträgen zusammensetzen. Es gilt also $A\lambda = \vec{E}$ zu lösen, wobei $\vec{E}$ die gesuchten m Größen sind.
3. Wahl von n linear unabhängigen Zeilen aus A, deren Größen als bekannt vorausgesetzt werden ($E_0 := 1$ gesetzt). Erhalte neue auf den Rang von A reduzierte Matrix $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ und korrespondierenden Ergebnisvektor $\vec{E}'$.
4. Löse $A\lambda = \vec{E}'$ und erhalte so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
5. Dann läßt sich jede Größe in den λ_i darstellen.

Spezielle Rekursionsgleichungen

- **Verstecktes Produkt:** Sei $a_n = x_n a_{n-1}$ dann gilt $a_n = a_0 \prod_{k=1}^{n} x_k$.
- **Versteckte Summe:** Sei $a_n = a_{n-1} + x_n$ dann gilt $a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k$.
- **Lineare Rekursionsgleichung mit konstanten Koeffizienten:** Sei

  $$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_t a_{n-t} \quad \text{für } n \geq t, \quad c_i \in \mathbb{R} \tag{1}$$

  von *Ordnung* t. Das charakteristische Polynom

  $$\chi_a(z) = z^t - c_1 z^{t-1} - \cdots - c_t$$

  habe die Nullstellen α_i mit der jeweiligen Vielfachheit j_i. Dann ist der Lösungsraum von (1) gegeben durch die Basis $B = \{n^{j_i} \alpha_i^n\}$.
- **Summationsfaktor:** Gegeben sei eine lineare Rekursionsgleichung erster Ordnung:

  $$a_n = x_n a_{n-1} + y_n, \quad \text{für } n > 0, \quad a_0 = 0. \tag{2}$$

  (2) hat die Lösung

  $$a_n = y_n + \sum_{j=1}^{n-1} y_j \prod_{k=j+1}^{n} x_k.$$

  (Beweis: Teilen von (2) durch den Summationsfaktor $x_{n-1} \cdots x_1$ und Substituieren von $\frac{a_n}{x_{n-1} \cdots x_1}$ durch b_n.)

- **Summe der Harmonischen Zahlen:** Sei $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ die n-te Harmonische Zahl. Es gilt

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n. \tag{3}$$

- **Repertoire-Methode:** Sei

$$a_n = \sum_{i=1}^{t} x_{i,n} a_{n-i} + f_n. \tag{4}$$

  Vorgehensweise:

  1. Wähle Repertoire einiger Folgen $b_n, c_n, \dots$ und halte deren n-tes Folgenglied sowie die zugehörigen Restterme

  $$f_b(n) = b_n - \sum_{i=1}^{t} y_{i,n} b_{n-i}, \quad f_c(n) = c_n - \sum_{i=1}^{t} w_{i,n} c_{n-i}, \quad \dots$$

     und deren Anfangsglieder $b_0, c_0, \dots$ tabellarisch fest.
  2. Kombiniere die zu (4) passenden Startwerte und Restterme aus dem Repertoire, wobei auch auf die Startwerte geachtet werden muss!

Aufstellung von Rekursionsgleichungen

1. Bei gegebenem Programmstück:

   - Bestückung der auftretenden Variablen mit Indizes abhängig von beispielsweise dem Schleifendurchlauf. Dadurch werden Folgen definiert.
   - Bestimmung der Rekursionsgleichungen für die Folgen beispielsweise über Wertetabellen.
   - Unverschränkte Rekursionsgleichungen sofort lösen, die Lösungen dann evtl. anderswo einsetzen und dort lösen.
   - Zusätzlich: Schleifenbedingungen o. ä. in eine Ungleichung über die Folgen übersetzen, normalisieren und die Lösungen bestimmen.

2. Symbolische Methode mittels GFs:

   - Die zu zählenden Objekte seien die Menge M. Dann können Eigenschaften an M direkt als kontextfreie Grammatik dargestellt werden, wobei M selbst als Nonterminal aufgefasst wird.
   - Die jeweiligen Operationen der Grammatik werden direkt in die GF übersetzt werden, wobei ein Terminalsymbol eines bestimmten Objekts immer in die Variable der GF übersetzt wird, bei der die entsprechende Anzahl des Objekts steht. Operationen:
     - Konkatenation $\mapsto$ Multiplikation,
     - Vereinigung $\mapsto$ Addition (nur bei disjunkter Vereinigung),
     - $\varepsilon \mapsto z^0 = 1$.

Größen in binären Suchbäumen

Seien T ein binärer Suchbaum und T_1, T_2 Unterbäume von T.

- Die *Größe* $|T|$ von T ist die Anzahl der internen Knoten definiert durch

$$|T| = |T_1| + |T_2| + 1, \qquad |\Box| = 0.$$

- *interne Pfadlänge:*

$$\pi(T) = \pi(T_1) + \pi(T_2) + |T| - 1, \qquad \pi(\Box) = 0.$$

- *externe Pfadlänge:*

$$\xi(T) = \xi(T_1) + \xi(T_2) + |T| + 1, \qquad \xi(\Box) = 0.$$

- Ist jedes Element beim Algorithmus zu T gleichwahrscheinlich, dann ist die durchschnittliche Anzahl der Vergleiche

$$C^+ := \frac{\pi(T)}{|T|} + 1 \quad \text{im erfolgreichen Fall,}$$
$$C^- := \frac{\xi(T)}{|T|+1} \quad \text{im erfolglosen Fall}$$

  und es gilt

$$\xi(T) = \pi(T) + 2|T|$$

  sowie als Folgerung

$$C^- = (C^+ + 1)(1 - \frac{1}{|T|+1}),$$

  d.h., für $|T| \to \infty$ macht der Algorithmus im Schnitt nur einen Vergleich mehr im erfolglosen Fall. Außerdem ist die Anzahl der externen Knoten $|T| + 1$.

Asymptotische Abschätzungen

- Euler**sche Summationsformel:** Falls für $1 \le i \le 2m$ das Integral $\int_0^\infty |f^{(i)}(x)| dx$ existiert, dann ist

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^\infty f(x)dx + \frac{1}{2} f(n) + C + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) + R_m,$$

  mit dem Restglied

$$R_m = \mathcal{O}\left(\int_n^\infty |f^{(2m)}(x)| dx \right).$$

  Dabei sind $B_k = n![z^n]\frac{z}{e^z - 1}$ die Bernoulli-Zahlen, wobei die ersten 12 sich zu

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

  ergeben.

- Existiert für eine die Funktion $f(z)$ der Grenzwert $\lim_{z \to z_0} f(z) < \infty$, dann hat f keine Singularität in z_0, ist also analytisch oder holomorph. (Beachte L'Hospital.)

- **Exponentielles Wachstum:** Sei $G(z)$ GF und z_0 die dominante Singularität von $G(z)$, dann gilt
$$[z^n]G(z) \asymp \left(\frac{1}{|z_0|}\right)^n.$$
- Die $f(z)$ heißt **meromorph** in z_0, falls es in z_0 analytische Funktionen $g(z)$ und $h(z) \neq 0$ gibt mit
$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}.$$
- Die Funktion $f(z)$ hat in z_0 einen **Pol** m-ter Ordnung, falls $f(z)(z - z_0)^m$ in z_0 analytisch ist.
- **Abschätzung für meromorphe Funktionen:** Sei $f(z)$ meromorph auf $K := \overline{K_R}(z_0)$ und habe die Pole $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$. f sei analytisch in z_0 und allen $z \in \partial K_R(z_0)$. Dann gibt es Polynome $P_1(z), \ldots, P_m(z)$, so dass
$$[z^n]f(z) = \sum_{j=1}^{m} P_j(n)\alpha_j^{-n} + \mathcal{O}(R^{-n}).$$
Weiter ist $\mathrm{Grad}(P_j) = \mathrm{Ord}(\alpha_j) + 1$.
- Die Funktion $f(z)$ hat in z_0 eine **algebraische Singularität**, falls
$$f(z) = h(z) + \sum_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)^{c_j} g_j(z),$$
wobei $h(z), g_j(z)$ in z_0 analytisch und $c_j \notin \mathbb{N}_0$.
- **Abschätzung bei algebraischen Singularitäten:** Sei $f(z)$ analytisch auf $K := K_R(z_0)$ und habe auf ∂K nur algebraische Singularitäten und gelte
$$f(z) = h(z) + \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{z}{\alpha_j}\right)^{c_j} g_j(z)$$
für auf $\overline{K}$ analytische $h(z), g_j(z)$, Singularitäten $\alpha_j \in \partial K$ und $c_j \notin \mathbb{N}_0$. Setze $a := \min\{\Re(c_j) \mid 1 \leq j \leq k\}$. Dann gilt
$$[z^n]f(z) = -\sum_{\substack{j \\ \Re(c_j)=a}} \frac{g_j(\alpha_j)n^{-c_j-1}}{\Gamma(-c_j)\alpha_j^n} + o(R^{-n}n^{-a-1}).$$

Sonstiges

- Zur Berechnung von beispielsweise der Newton-Formel
$$[z^n](1+z)^r = \binom{r}{n}$$
für beliebiges $r \in \mathbb{Q}$ wird oft die folgende Verallgemeinerung des Binomialkoeffizienten benötigt:
$$\binom{r}{n} = \frac{r^{\underline{n}}}{n!}$$
mit
$$r^{\underline{n}} = \underbrace{r(r-1)\cdots(r-n+1)}_{n \text{ Faktoren}} = \prod_{i=0}^{n-1}(r-i).$$