

**Vorname:** \_\_\_\_\_

**Nachname:** \_\_\_\_\_

**Matrikelnummer:** \_\_\_\_\_

**Studiengang (bitte ankreuzen):**

- |   |  |
|---|--|
| <input type="radio"/> Informatik Bachelor         | <input type="radio"/> Informatik Lehramt             |
| <input type="radio"/> Informatik Master (Auflage) | <input type="radio"/> Informatik Promotion (Auflage) |
| <input type="radio"/> Mathematik Bachelor         | <input type="radio"/> Technik-Kommunikation Bachelor |
| <input type="radio"/> Technik-Kommunikation M.A.  | <input type="radio"/> Sonstige: _____                |

	<b>Anzahl Punkte</b>	<b>Erreichte Punkte</b>
<b>Aufgabe 1</b>	<b>5</b>	
<b>Aufgabe 2</b>	<b>4</b>	
<b>Aufgabe 3</b>	<b>12</b>	
<b>Aufgabe 4</b>	<b>5</b>	
<b>Aufgabe 5</b>	<b>7</b>	
<b>Aufgabe 6</b>	<b>6</b>	
<b>Aufgabe 7</b>	<b>6</b>	
<b>Summe</b>	<b>45</b>	

**Hinweise:**

- Geben Sie Ihre Antworten in lesbarer und verständlicher Form an.
- Schreiben Sie mit dokumentenechten Stiften, nicht mit roten Stiften oder mit Bleistiften.
- Bitte beantworten Sie die Aufgaben auf den Aufgabenblättern (benutzen Sie auch die Rückseiten).
- **Auf alle Blätter** (inklusive zusätzliche Blätter) müssen Sie **Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** schreiben.
- Was nicht bewertet werden soll, streichen Sie bitte durch.
- Werden **Täuschungsversuche** beobachtet, so wird die Präsenzübung mit **0 Punkten** bewertet.
- Geben Sie am Ende der Übung **alle Blätter zusammen mit den Aufgabenblättern ab**.

Matrikelnummer:

Name:

---

**Aufgabe 1 (Endliche Automaten):**

**(2+3=5 Punkte)**

a) Betrachte die Sprache  $L = \Sigma^* abc^*$  über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Geben Sie durch einen Transitionsgraphen einen **NEA**  $\mathcal{A}_1$  an, der  $L$  erkennt.

b) Betrachte die Sprache  $L = (\Sigma^* b) + (aa)^*$  über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ . Geben Sie durch einen Transitionsgraphen einen **DEA**  $\mathcal{A}_2$  an, der  $L$  erkennt.

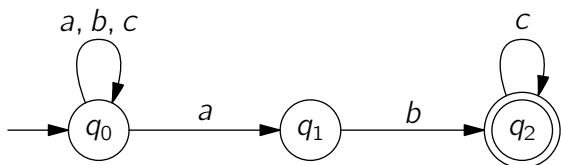
*Hinweis:* Am besten verfahren Sie direkt. Sie können aber auch bekannte Konstruktionen verwenden. Nur das Endergebnis zählt.

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

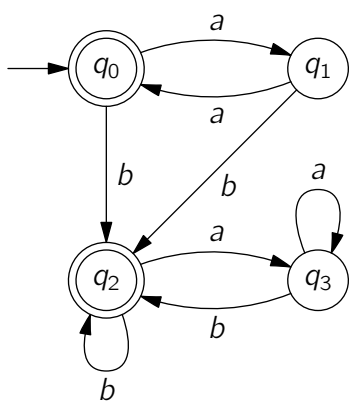
Name: \_\_\_\_\_

Lösung: \_\_\_\_\_

a)



b)



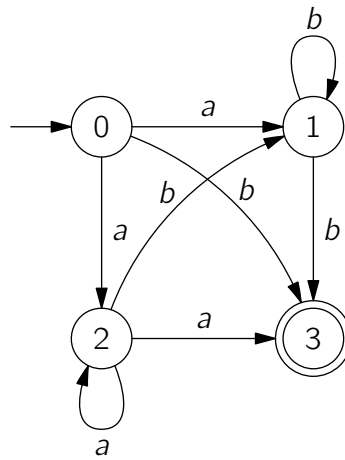
Matrikelnummer:

Name:

**Aufgabe 2 (Potenzmengenkonstruktion):**

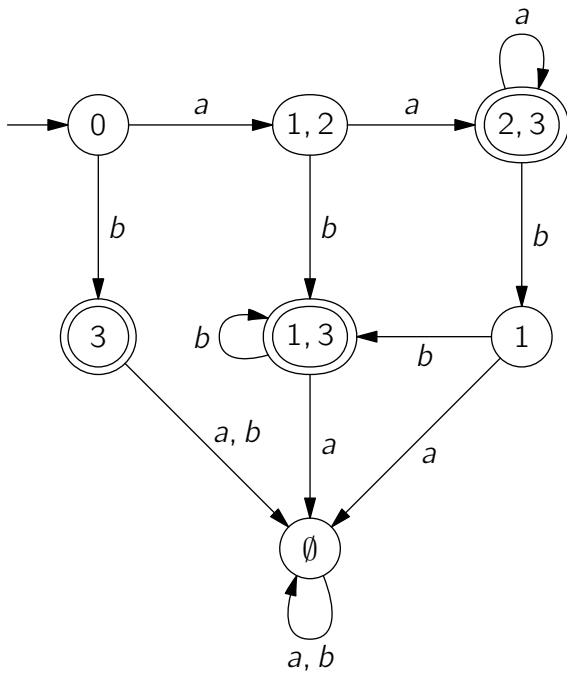
**(4 Punkte)**

Gegeben sei der folgende NEA  $\mathcal{A}$ :



Führen Sie die Potenzmengenkonstruktion für  $\mathcal{A}$  durch.

**Lösung:**



**Aufgabe 3 (Fragenkatalog):****(12 Punkte)**

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen jeweils **mit Begründung** an, ob sie **wahr** oder **falsch** ist. Antworten Sie dabei so kurz und präzise wie möglich und begründen Sie Ihre Antwort **durch einen kurzen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel**.

**Hinweise:**

- Für eine richtige Antwort mit richtiger Begründung erhalten Sie **2** Punkte.
  - Für eine falsche Antwort erhalten Sie **keine** Punkte.
  - Bei einer falschen, unpräzisen oder fehlenden Begründung erhalten Sie **keine** Punkte.
- a) Zu jeder regulären Sprache  $L$  existiert ein bis auf Isomorphie eindeutiger, minimaler nicht-deterministischer Automat  $\mathcal{A}$  mit  $L(\mathcal{A}) = L$ .
- b) Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine beliebige Sprache. Jeder *deterministische* endliche Automat, der die Sprache  $L$  erkennt, hat mehr Zustände als jeder *nichtdeterministische* endliche Automat, der ebenfalls  $L$  erkennt.
- c) Reguläre Sprachen sind unter Durchschnitt abgeschlossen, d. h. für zwei reguläre Sprachen  $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$  ist  $L_1 \cap L_2$  ebenfalls eine reguläre Sprache.

Matrikelnummer:

Name:

---

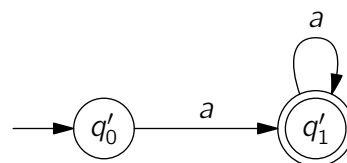
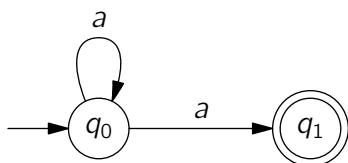
d) Sei  $U \subseteq \Sigma$ . Dann gilt  $\Sigma^* \setminus U^* = (\Sigma \setminus U)^*$ .

e) Seien  $\mathcal{A}_1 = (Q_1, \Sigma, q_0^1, \delta_1, F_1)$  und  $\mathcal{A}_2 = (Q_2, \Sigma, q_0^2, \delta_2, F_2)$  deterministische endliche Automaten. Dann hat jeder deterministische endliche Automat  $\mathcal{B}$  mit  $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A}_1) \cup L(\mathcal{A}_2)$  mindestens  $|Q_1| \cdot |Q_2|$  Zustände.

f) Sei  $\Sigma = \Gamma = \{a\}$ . Die Funktion  $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  mit  $f(a^n) = a^{3n}$  für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 0$ , ist durch eine verallgemeinerte sequentielle Maschine (GSM) über dem Eingabe-Alphabet  $\Sigma$  und dem Ausgabealphabet  $\Gamma$  berechenbar.

Lösung: \_\_\_\_\_

a) Falsch. Die beiden folgenden NEAs sind minimal, nicht isomorph und erkennen  $L = aa^*$ .



**Matrikelnummer:**

**Name:**

---

- b)** Falsch. Jeder DEA  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$  hat genau so viele Zustände wie der NEA  $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$  mit  $\Delta = \{(q, a, p) \mid \delta(q, a) = p\}$ , wobei beide Automaten die gleiche Sprache erkennen.
- c)** Wahr. Da  $L_1, L_2$  regulär sind, gibt es DEAs  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  mit  $L(\mathcal{A}_1) = L_1, L(\mathcal{A}_2) = L_2$ . Die Produktkonstruktion von  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  (mit  $F' = F_1 \times F_2$ ) ergibt einen DEA  $\mathcal{A}' = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, (q_0^1, q_0^2), \delta', F_1 \times F_2)$  mit  $L(\mathcal{A}') = L_1 \cap L_2$ . Da jeder DEA eine reguläre Sprache erkennt, ist  $L_1 \cap L_2$  also auch regulär.
- d)** Falsch. Wähle z. B.  $\Sigma = \{a, b\}$  und  $U = \{a, b\}$ . Dann ist  $\Sigma^* \setminus U^* = \emptyset$ , aber  $\varepsilon \in (\Sigma^* \setminus U)^*$ .
- e)** Falsch. Betrachte zwei beliebige isomorphe DEAs  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  mit jeweils  $n \geq 2$  Zuständen. Es gilt  $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_1) \cup L(\mathcal{A}_2)$  und  $n < n^2$ .
- f)** Wahr.  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, \gamma)$  mit  $\delta(q_0, a) = q_0$  und  $\gamma(q_0, a) = aaa$ .
-

**Aufgabe 4 (Myhill-Nerode Kongruenz):****(5 Punkte)**

Betrachten Sie die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{in } w \text{ kommt weder das Infix } ab \text{ noch das Infix } ba \text{ vor}\}.$$

Geben Sie vier nicht  $L$ -äquivalente Wörter  $w_1, w_2, w_3, w_4$  an. Zeigen Sie, dass  $w_i \not\sim_L w_j$  für  $i \neq j$  gilt, indem sie jeweils ein trennendes Wort  $w$  mit  $w_i w \in L \Leftrightarrow w_j w \notin L$  angeben.

*Hinweis:* Es sind sechs Kombinationen  $w_i \not\sim_L w_j$  zu betrachten.

**Lösung:** \_\_\_\_\_Wähle  $w_1 = \varepsilon$ ,  $w_2 = a$ ,  $w_3 = b$  und  $w_4 = ab$ . Dann gilt:

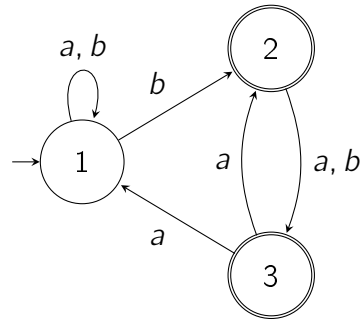
- $\varepsilon \not\sim_L a$ , denn mit  $w = b$  gilt  $\varepsilon \cdot b = b \in L$  aber  $a \cdot b = ab \notin L$ .
  - $\varepsilon \not\sim_L b$ , denn mit  $w = a$  gilt  $\varepsilon \cdot a = a \in L$  aber  $b \cdot a = ba \notin L$ .
  - $\varepsilon \not\sim_L ab$ , denn mit  $w = \varepsilon$  gilt  $\varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon \in L$  aber  $ab \cdot \varepsilon = ab \notin L$ .
  - $a \not\sim_L b$ , denn mit  $w = a$  gilt  $a \cdot a = aa \in L$  aber  $b \cdot a = ba \notin L$ .
  - $a \not\sim_L ab$ , denn mit  $w = \varepsilon$  gilt  $a \cdot \varepsilon = a \in L$  aber  $ab \cdot \varepsilon = ab \notin L$ .
  - $b \not\sim_L ab$ , denn mit  $w = \varepsilon$  gilt  $b \cdot \varepsilon = b \in L$  aber  $ab \cdot \varepsilon = ab \notin L$ .
- \_\_\_\_\_



**Aufgabe 5 (Reguläre Ausdrücke):****(5+2=7 Punkte)**

- a) Wandeln Sie folgenden NEA über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$  mittels des Eliminationsverfahrens in einen äquivalenten regulären Ausdruck um. Geben Sie hierbei für jeden Zwischenschritt den jeweiligen VNEA an und entfernen Sie die Zustände in der Reihenfolge 2, 3, 1. Vereinfachen Sie hierbei die regulären Ausdrücke nicht, sondern notieren Sie die Ausdrücke unverändert laut Verfahren.

*Hinweis:* Benutzen Sie bei Platzproblemen bitte auch eine Blatt-Rückseite!



Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

Name: \_\_\_\_\_

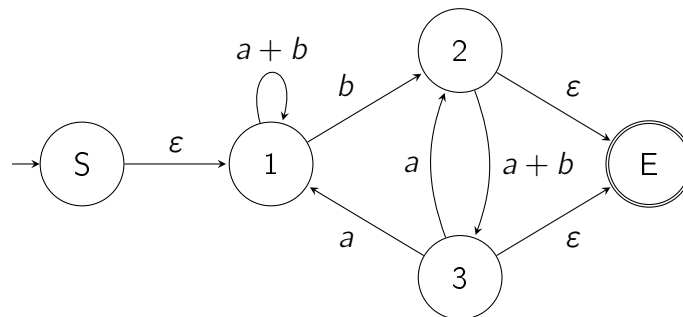
b) Geben Sie für den regulären Ausdruck

$$((ab + aab^*) \cdot a)^*$$

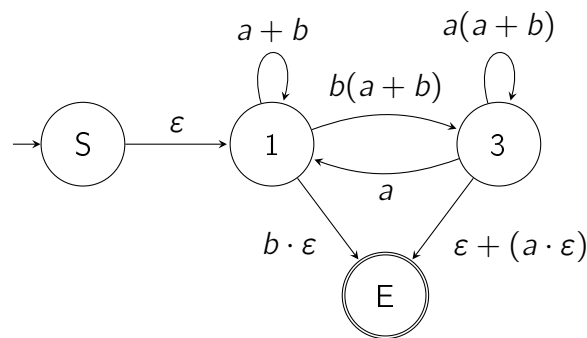
über  $\Sigma = \{a, b\}$  einen äquivalenten endlichen Automaten an (ein DEA, NEA oder  $\epsilon$ -NEA ist erlaubt). Sie können nach dem Verfahren der Vorlesung vorgehen oder den Automaten direkt angeben. Es reicht, den Transitionsgraphen anzugeben.

Lösung: \_\_\_\_\_

a) 1. Schritt

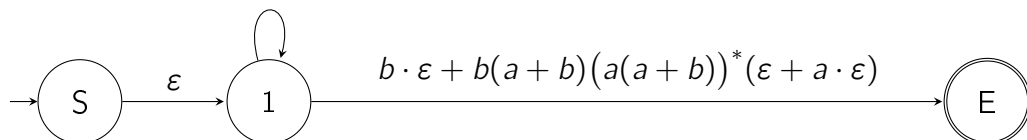


2. Schritt

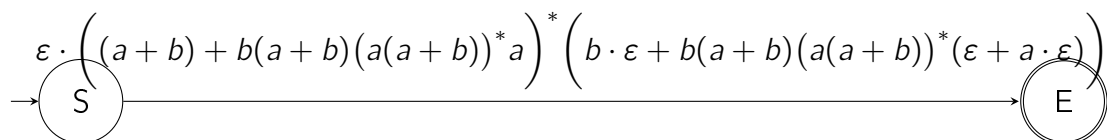


3. Schritt

$$(a + b) + b(a + b)(a(a + b))^* a$$



4. Schritt (kann man auch weglassen)



Matrikelnummer:

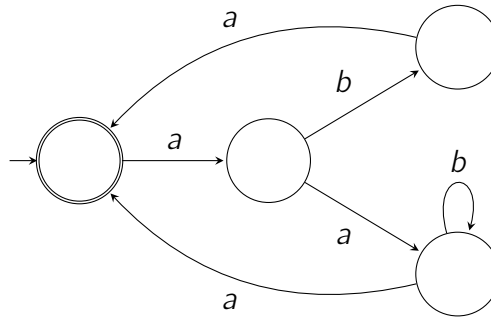
Name:

---

Der gesuchte reguläre Ausdruck ist also

$$\varepsilon \cdot \left( (a + b) + b(a + b)(a(a + b))^* a \right)^* \left( b \cdot \varepsilon + b(a + b)(a(a + b))^* (\varepsilon + a \cdot \varepsilon) \right).$$

**b)** Eine direkte Konstruktion liefert:



---

**Aufgabe 6 (Induktion):****(2+4=6 Punkte)**

Einfache reguläre Ausdrücke über einem Alphabet  $\Sigma$  sind reguläre Ausdrücke über  $\Sigma$  ohne das Vorkommen von  $*$ , d. h. ohne den Kleene-Stern.

- a) Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ . Geben Sie eine induktive Definition der einfachen regulären Ausdrücke über  $\Sigma$  an.

- b) Zeigen Sie induktiv anhand Ihrer Definition in a):

Für alle einfachen regulären Ausdrücke  $r$  über  $\Sigma$  ist  $L(r)$  endlich.

Formulieren Sie dazu die Aussage des Induktionsanfangs, die Induktionsvoraussetzung und die Induktionsbehauptung explizit.

**Lösung:** \_\_\_\_\_

- a) Einfache reguläre Ausdrücke über dem Alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$  sind wie folgt induktiv definiert:

- $\emptyset$ ,  $\varepsilon$  sowie  $a, b \in \Sigma$  sind jeweils reguläre Ausdrücke über  $\Sigma$ .
- Sind  $r$  und  $s$  einfache reguläre Ausdrücke über  $\Sigma$ , so auch  $(r + s)$  und  $(r \cdot s)$ .

- b) Induktion über den Aufbau der einfachen regulären Ausdrücke:

**Induktionsanfang:**

- Für  $r = \emptyset$  ist  $L(r) = \emptyset$ , also endlich.
- Für  $r = \varepsilon$  ist  $L(r) = \{\varepsilon\}$ , also endlich.
- Für  $r = a$  ist  $L(r) = \{a\}$ , also endlich.
- Für  $r = b$  ist  $L(r) = \{b\}$ , also endlich.

**Induktionsannahme:** Seien  $r, s$  einfache reguläre Ausdrücke über  $\Sigma$  mit  $L(r), L(s)$  endlich.

**Induktionsschritt:**

- Für  $t = (r + s)$  ist  $L(t) = L(r + s) = L(r) \cup L(s)$ . Da  $L(r)$  und  $L(s)$  jeweils endlich sind, ist auch die Vereinigung  $L(r) \cup L(s) = L(t)$  endlich.

**Matrikelnummer:**

**Name:**

---

- Für  $t = (r \cdot s)$  ist  $L(t) = L(r \cdot s) = L(r) \cdot L(s)$ . Da  $L(r)$  und  $L(s)$  jeweils endlich sind, ist auch die Konkatenation  $L(r) \cdot L(s) = L(t)$  endlich.
-

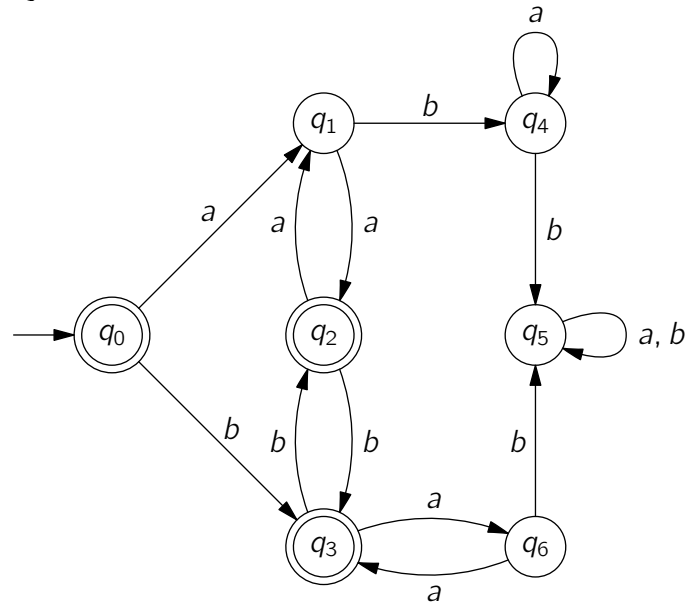
Matrikelnummer:

Name:

**Aufgabe 7 (Minimierung):**

**(6 Punkte)**

Wir betrachten den folgenden DEA  $\mathcal{A}$ :



Bestimmen Sie mittels des Markierungsalgorithmus die Paare nicht-äquivalenter Zustände von  $\mathcal{A}$  und geben Sie dann den reduzierten Automaten  $\bar{\mathcal{A}}$  durch einen Transitionsgraphen an.

	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$
$q_1$						
$q_2$						
$q_3$						
$q_4$						
$q_5$						
$q_6$						

**Lösung:** \_\_\_\_\_

Tabelle des Markierungsalgorithmus:

Matrikelnummer:

Name:

	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$
$q_1$	1	-	-	-	-	-
$q_2$		1	-	-	-	-
$q_3$		1		-	-	-
$q_4$	1	2	1	1	-	-
$q_5$	1	3	1	1		-
$q_6$	1		1	1	4	5

Aus der Tabelle ergibt sich der folgende minimale DEA:

