Prof. Dr. Dr. h.c. W. Thomas

Daniel Neider, Carsten Otto

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Studiengang (bitte ankreuzen):

○ Informatik Bachelor
○ Informatik Master (Auflage)
○ Mathematik Bachelor
○ Technik-Kommunikation M.A.
○ Informatik Lehramt
○ Informatik Promotion (Auflage)
○ Technik-Kommunikation Bachelor
○ Sonstige: ____________________

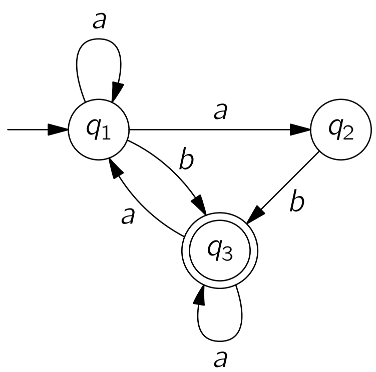
	Anzahl Punkte	Erreichte Punkte
Aufgabe 1	3	
Aufgabe 2	3	
Aufgabe 3	3	
Aufgabe 4	4	
Aufgabe 5	3	
Aufgabe 6	3	
Aufgabe 7	5	
Aufgabe 8	3	
Aufgabe 9	4	
Aufgabe 10	3	
Aufgabe 11	4	
Summe	38	

Hinweise:

- Geben Sie Ihre Antworten in lesbarer und verständlicher Form an.
- Schreiben Sie mit dokumentenechten Stiften, nicht mit roten oder grünen Stiften und nicht mit Bleistiften.
- Bitte beantworten Sie die Aufgaben auf den Aufgabenblättern (benutzen Sie auch die Rückseiten).
- **Auf alle Blätter** (inklusive zusätzliche Blätter) müssen Sie **Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** schreiben.
- Was nicht bewertet werden soll, streichen Sie bitte durch.
- Werden **Täuschungsversuche** beobachtet, so wird die Klausur mit **0 Punkten** bewertet.
- Geben Sie am Ende der Übung **alle Blätter zusammen mit den Aufgabenblättern ab**.

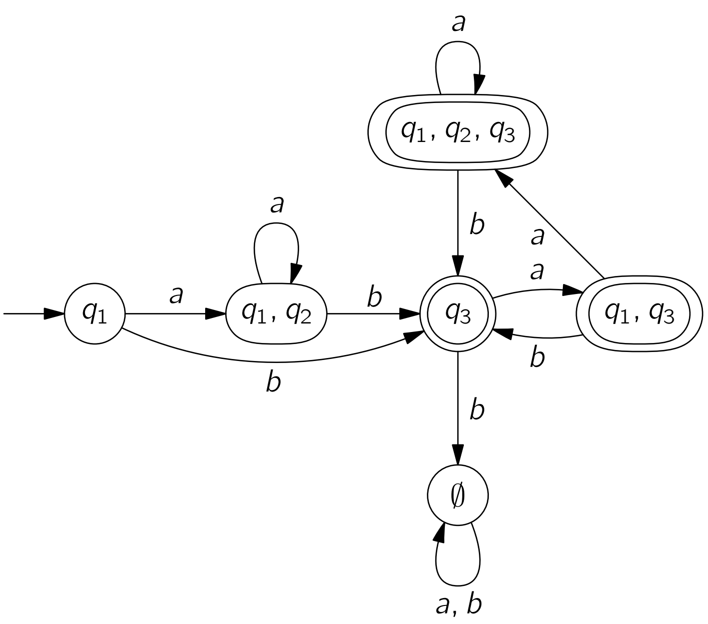
Aufgabe 1 (Potenzmengenkonstruktion): **(3 Punkte)**

Betrachten Sie den folgenden NEA M über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.



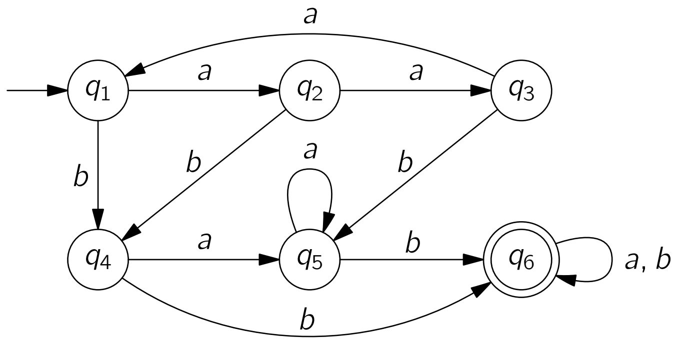
Überführen Sie den NEA M in einen DEA M' mit $L(M) = L(M')$, indem Sie den Potenzautomaten zu M bilden.

Lösung:



Aufgabe 2 (Minimierung): **(3 Punkte)**

Betrachten Sie den folgenden DEA M über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.



Bestimmen Sie unter Verwendung des Minimierungsverfahrens aus der Vorlesung den minimalen DEA M' mit $L(M) = L(M')$. Füllen Sie dazu die unten stehende Tabelle entsprechend aus und geben Sie eine graphische Darstellung des minimalen DEA M' an.

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_2		— —	— —	— —	— —
q_3			— —	— —	— —
q_4				— —	— —
q_5					— —
q_6					

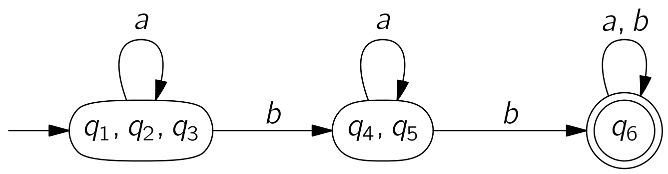
DEA M':

Lösung:

Tabelle des Markierungsalgorithmus:

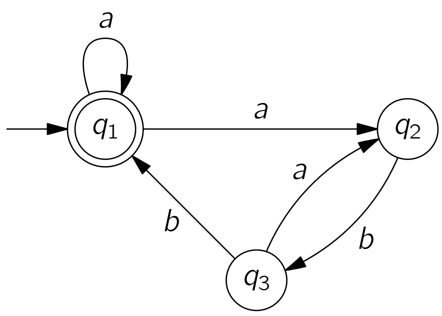
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_2		-	-	-	-
q_3			-	-	-
q_4	X	X	X	-	-
q_5	X	X	X		-
q_6	X	X	X	X	X

Aus der Tabelle ergibt sich der folgende minimale DEA:



Aufgabe 3 (Reguläre Ausdrücke): **(1 + 2 = 3 Punkte)**

a) Geben Sie für den folgenden NEA über $\Sigma = \{a, b\}$ einen äquivalenten regulären Ausdruck an.



b) Geben Sie für die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 2 \text{ oder } w \text{ enthält ungeradzahlig viele } b\}$$

einen äquivalenten regulären Ausdruck an.

Lösung:

a) $(a + ab(ab)^*b)^*$

b) $b^*ab^*a(a+b)^* + a^*ba^*(ba^*ba^*)^*$

Aufgabe 4 (Markiersprache): **(1 + 3 = 4 Punkte)**

Zu einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir die „Markiersprache“

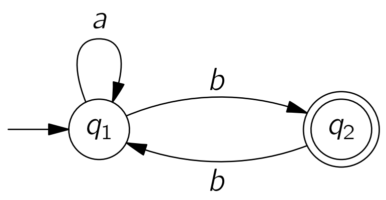
$$L^\$ = \{a_1\$a_2\$\ldots a_n\$ \mid a_1a_2\ldots a_n \in L, a_i \in \Sigma, \$ \notin \Sigma\}$$

die sich durch das Hinzufügen von \$ nach jedem Buchstaben eines Wortes $w \in L$ ergibt.

Beispiel: Für $abab \in L$ ist $a\$b\$a\$b\$ \in L^\$$.
Hinweis: Falls $\varepsilon \in L$ ist $\varepsilon \in L^\$$, jedoch nicht $\$ \in L^\$$!

Wir behaupten: Wenn L regulär ist, so ist auch $L^\$$ regulär.

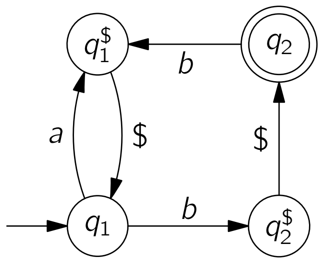
a) Zunächst betrachten wir ein Beispiel: Geben Sie für den folgenden NEA $\mathcal{A}$ über $\Sigma = \{a, b\}$ einen NEA $\mathcal{A}^\$$ über $\Sigma \cup \{\$\}$ mit $L(\mathcal{A}^\$) = (L(\mathcal{A}))^\$$ an.



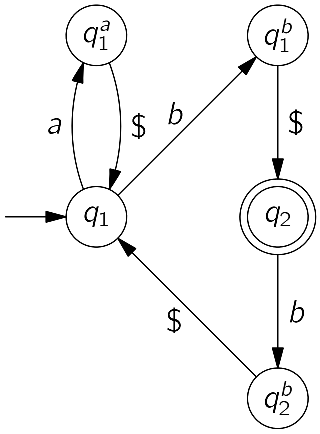
b) Geben Sie nun für den allgemeinen Fall eines NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ einen NEA $\mathcal{A}^\$$ über $\Sigma \cup \{\$\}$ mit $L(\mathcal{A}^\$) = (L(\mathcal{A}))^\$$ an.

Lösung:

a)



Alternative:



b) $\mathcal{A}^\$ = (Q^\$, \Sigma \cup \{\$\}, q_0, \Delta^\$, F)$

$Q^\$ = Q \cup \{q^\$ \mid q \in Q\}$

$\Delta^\$$ ist die kleinste Menge mit

- $(q, a, p^\$) \in \Delta^\$$ für alle $q \in Q, a \in \Sigma, p \in \Delta(q, a)$
- $(q^\$, \$, q) \in \Delta^\$$ für alle $q \in Q$

Alternative:

$\mathcal{A}^\$ = (Q^\$, \Sigma \cup \{\$\}, q_0, \Delta^\$, F)$

$Q^\$ = Q \cup \{q^a \mid q \in Q, a \in \Sigma\}$

$\Delta^\$$ ist die kleinste Menge mit

- $(q, a, q^a) \in \Delta^\$$ für alle $q \in Q, a \in \Sigma$
- $(q^a, \$, p) \in \Delta^\$$ für alle $q \in Q, a \in \Sigma, p \in \Delta(q, a)$

Aufgabe 5 (Kontextfreie Grammatiken): **(1 + 2 = 3 Punkte)**

Geben Sie je eine kontextfreie Grammatik für die folgenden beiden Sprachen an:

a) $L_1 = \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$ über dem Alphabet $\{a, b\}$

b) $L_2 = \{u\$v \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| > 0, |v| > 0 \text{ und } |u|_b = |v|_b\}$ über dem Alphabet $\{a, b, \$\}$

Lösung:

a) Sei $G_1 = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den folgenden Regeln in P:

$$S \quad \rightarrow \quad aSbb \mid abb$$

Dann gilt $L(G_1) = L_1$.

b) Sei $G_2 = (\{S, A, B\}, \{a, b, \$\}, P, S)$ mit den folgenden Regeln in P:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AbBbA \mid aA\$aA \\ A &\rightarrow \varepsilon \mid a \mid aA \\ B &\rightarrow AbBbA \mid A\$A \end{aligned}$$

Dann gilt $L(G_2) = L_2$.

Aufgabe 6 (Kontextfreie Grammatiken): **(2 + 1 = 3 Punkte)**

Betrachten Sie die folgende kontextfreie Grammatik G mit den Regeln:

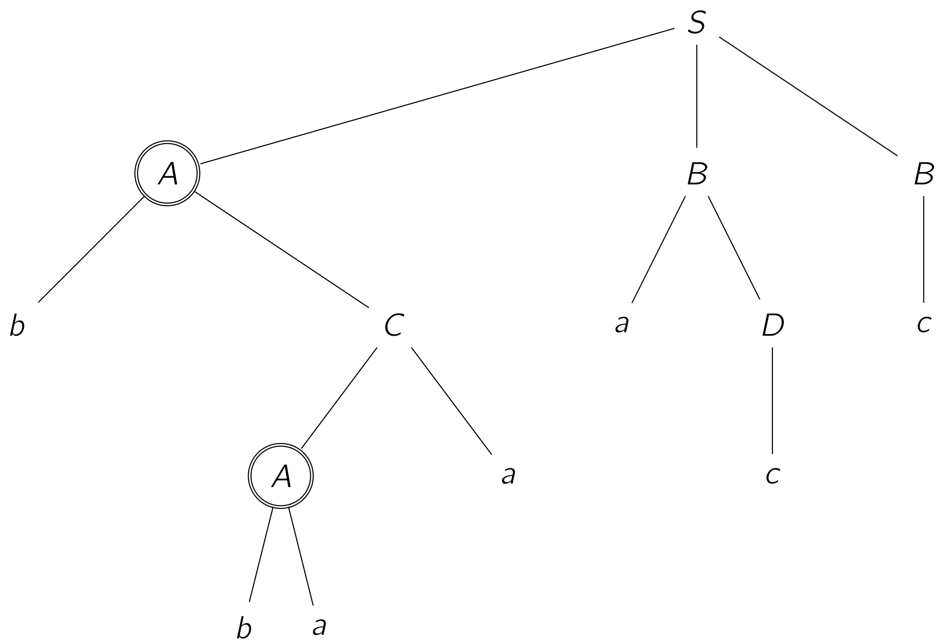
$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABB \mid aB \\ A &\rightarrow bC \mid ba \\ B &\rightarrow aD \mid c \\ C &\rightarrow Aa \mid bB \\ D &\rightarrow b \mid c \end{aligned}$$

a) Geben Sie einen Ableitungsbaum zum Wort $w = bbaaacc$ an. Sofern vorhanden, markieren Sie (z. B. durch Umkreisen) das wiederholte Auftreten von Nichtterminalen entlang eines Pfades von der Wurzel zu einem Blattknoten.

b) Enthält $L(G)$ unendliche viele verschiedene Wörter? Falls ja, geben Sie mit Rückgriff auf Aufgabenteil **a)** eine unendliche Teilmenge von $L(G)$ formal an.

Lösung:

a)



b) $L(G)$ enthält unendlich viele Wörter, z. B. $w_i = b^i\, ba\, a^i\, acc$ für $i \geq 0$. Somit gilt $L = \{b^i\, ba\, a^i\, acc \mid i \geq 0\} \subseteq L(G)$ und L ist eine Menge mit unendlich vielen Elementen.

Aufgabe 7 (CYK-Algorithmus): **(3,5 + 0,5 + 1 = 5 Punkte)**

Gegeben ist die folgende kontextfreie Grammatik G in Chomsky-Normalform:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AC \mid CC \mid DD \\ A &\rightarrow b \mid BB \mid CS \\ B &\rightarrow c \mid AC \\ C &\rightarrow a \mid CB \mid AA \\ D &\rightarrow a \mid DD \end{aligned}$$

Ermitteln Sie mittels des CYK-Algorithmus, ob das Wort $w = baca$ zur Sprache $L(G)$ gehört.

a) Füllen Sie die Tabelle entsprechend des CYK-Algorithmus vollständig aus.

i/j	1	2	3	4
1				
2	**b**			
3		**a**		
4			**c**	
				a

b) Gilt $w \in L(G)$? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

c) Sofern $w \in L(G)$ gilt, geben Sie zusätzlich eine Ableitung an, die dies belegt.

Lösung:

a)

i/j	1	2	3	4
1	A	S, B	S, B, A	S, B
2	**b**	C, D	C	S
3		**a**	B	$\emptyset$
4			**c**	C, D
				a

b) Da $S \in N_{1,4}$ gilt $w \in L(G)$.

c) $\underline{S} \vdash \underline{A}C \vdash \underline{B}BC \vdash \underline{A}CBC \vdash b\underline{C}BC \vdash ba\underline{B}C \vdash bac\underline{C} \vdash baca$.

Aufgabe 8 (Pumping-Lemma): **(3 Punkte)**

Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen, dass die Sprache

$$L = \{a^k b^k c^k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ nicht regulär ist.

Lösung:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen das Wort $w = a^n b^n c^n \in L$ mit $|w| \geq n$. Sei $w = xyz$ mit $|xy| \leq n$ und $|y| > 0$. Wir wählen $i = 0$, d.h. wir wollen zeigen, dass $xy^iz \notin L$ gilt. Wegen $|xy| \leq n$ muss $y = a^t$ für ein $t \in \mathbb{N}$ gelten. Damit ist $w' = xz = a^{n-t}b^n c^n$ und da $0 < |y| = t$ gilt, ist $w' \notin L$. Nach dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen ist damit L nicht regulär.

Aufgabe 9 (Pushdown Automaten): **(4 Punkte)**

Zu einem Wort $w = a_0 \dots a_n \in \Sigma^*$ definieren wir seine *umgedrehte Verdopplung* durch

$$w_D^R = a_n a_n a_{n-1} a_{n-1} \dots a_1 a_1 a_0 a_0.$$

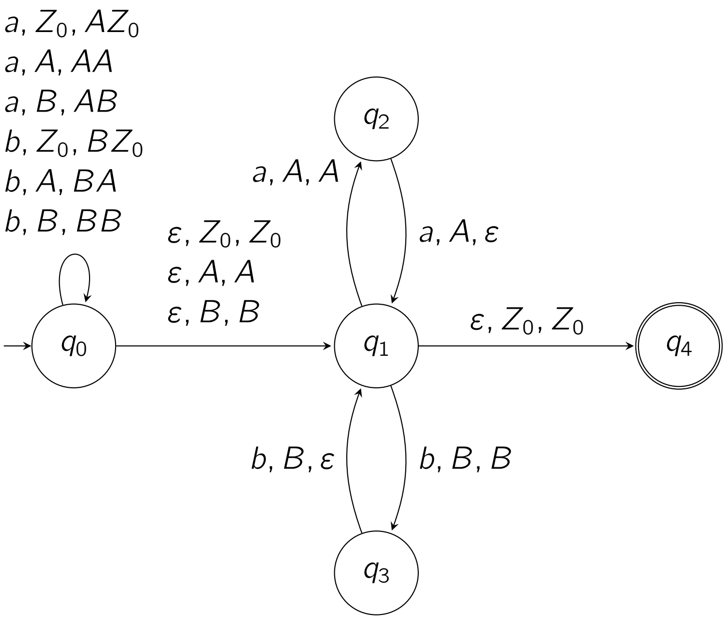
Beispiel: Für $w = ab$ ist $w_D^R = bb\,aa$.

Geben Sie einen Pushdown-Automaten $\mathcal{A}$ an, der die Sprache $L = \{ww_D^R \mid w \in \Sigma^*\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$ (im Modell „Akzeptieren mit Endzuständen") akzeptiert. Eine graphische Lösung genügt.

Bitte beschreiben Sie auch kurz die Arbeitsweise Ihres Automaten, um die Korrektur zu erleichtern. Erläutern Sie z. B. die Bedeutung einzelner Zustände oder deuten Sie die Arbeitsweise Ihres Automaten auf dem Beispielwort *abbbaa* an. Diese Beschreibung wird nicht bepunktet!

Lösung:

Es sei $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \{Z_0, A, B\}, q_0, Z_0, \{q_4\})$ wie folgt:



In Zustand q_0 wird das Wort w gelesen. Dabei wird für jedes gelesene Symbol ein entsprechendes Symbol auf den Stack gelegt. Wenn $\mathcal{A}$ rät, dass w ganz gelesen wurde, geht der Automat in den Zustand q_1 über. Dort wird verifiziert, dass die restliche Eingabe w_D^R entspricht.
Wird ein a gelesen und steht A auf dem Stack, so geht der Automat in Zustand q_2 über, verändert den Stack aber nicht. In Zustand q_2 wird sichergestellt, dass nun ein weiteres a in der Eingabe folgen muss; beim Lesen dieses as wir nun auch das oberste Stacksymbol vom Stack entfernt. Analog verfährt $\mathcal{A}$ wenn ein b gelesen wird in Zustand q_3.
Ist der Stack leer, kann $\mathcal{A}$ in den Zustand q_4 übergehen und akzeptieren.

Aufgabe 10 (Entscheidungsproblem): (3 Punkte)

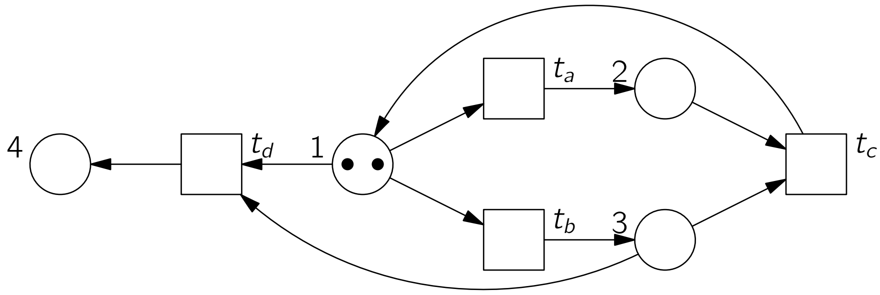
Wir betrachten einen Kellerautomaten $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F)$. Beschreiben Sie *unter Verwendung von Resultaten aus der Vorlesung* ein Verfahren, mit dem man bestimmen kann, ob $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ gilt.

Lösung:

1. Konstruiere $\mathcal{A}'$ mit $N(\mathcal{A}') = L(\mathcal{A})$, d. h. konstruiere aus dem $\mathcal{A}$ (der mit Endzuständen akzeptiert) einen PDA $\mathcal{A}'$, der $L(\mathcal{A})$ mit leerem Keller akzeptiert.
2. Wandle $\mathcal{A}'$ in eine äquivalente CFG G um.
3. Führe den Leerheitstest (durch Markierungsalgorithmus) für kontextfreie Grammatiken auf G durch. Gibt „Ja" genau dann, wenn der Leerheitstest „Nein" liefert (und umgekehrt).

Aufgabe 11 (Petrinetze): **(2 + 1 + 1 = 4 Punkte)**

Gegeben sei folgendes Petrinetz $N = (P, T, F)$ und die Anfangsmarkierung $m^- = (2, 0, 0, 0)$.



a) Bestimmen Sie ausgehend von der Anfangsmarkierung alle durch Schaltfolgen erreichbaren Markierungen, indem Sie den Erreichbarkeitsbaum angeben.

Falls eine Markierung mehrfach vorkommt, dürfen Sie die Wiederholung entsprechend markieren und die Baumkonstruktion unter der wiederholten Markierung abbrechen.

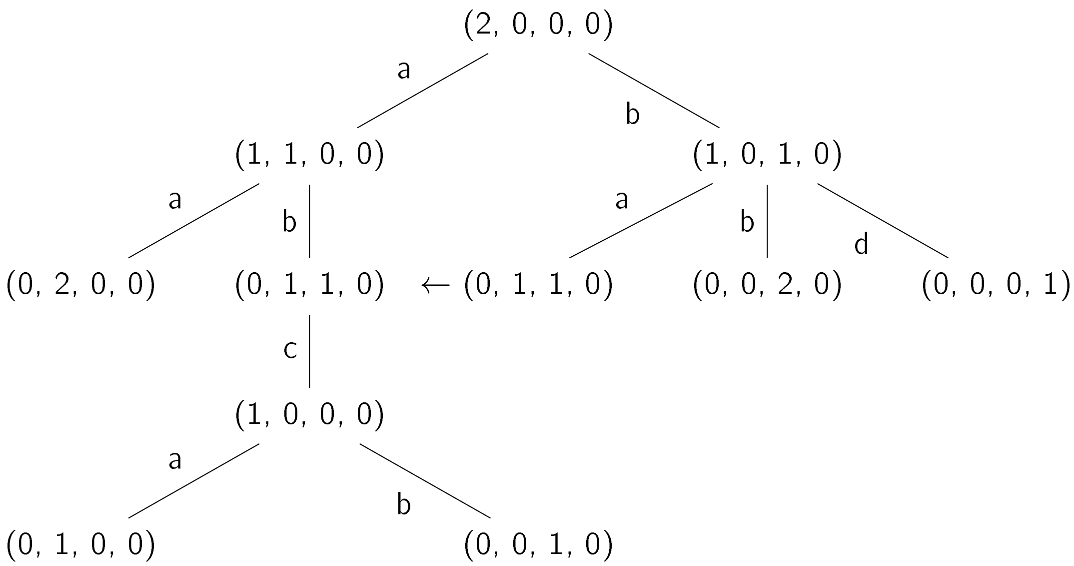
Bitte beachten Sie Aufgabenteile b) und c) auf der nächsten Seite!

b) Ist in N von der Anfangsmarkierung aus ein Deadlock erreichbar? Begründen Sie ihre Antwort kurz.

c) Wir betrachten N als Sprachakzeptor $\mathcal{N} = (N, M^-, M^+, \ell)$ mit $M^- = \{(2, 0, 0, 0)\}$ und $M^+ = \{(1, 0, 0, 0)\}$. Die Beschriftungsfunktion $\ell : T \to \{a, b, c, d\}$ ist durch $t_x \mapsto x$ definiert. Geben Sie die von $\mathcal{N}$ erkannte Sprache $L(\mathcal{N})$ an.

Lösung:

a)



b) Ja, beispielsweise: $(2, 0, 0, 0) \vdash^{a} (1, 1, 0, 0) \vdash^{a} (0, 2, 0, 0)$. Anschließend kann keine weitere Transition mehr geschaltet werden.

c) $L(\mathcal{N}) = \{abc, bac\}$