Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Studiengang (bitte ankreuzen):

- ○ Informatik Bachelor
- ○ Informatik Master (Auflage)
- ○ Mathematik Bachelor
- ○ Technik-Kommunikation M.A.
- ○ Informatik Lehramt
- ○ Informatik Promotion (Auflage)
- ○ Technik-Kommunikation Bachelor
- ○ Sonstige: ____________________

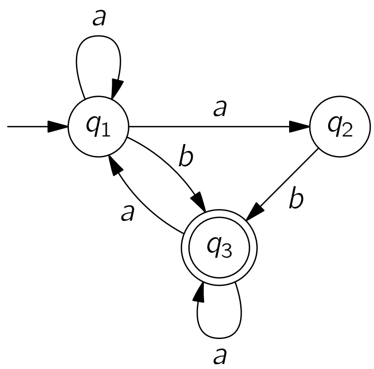
	Anzahl Punkte	**Erreichte Punkte**
Aufgabe 1	**3**	
Aufgabe 2	**3**	
Aufgabe 3	**3**	
Aufgabe 4	**4**	
Aufgabe 5	**3**	
Aufgabe 6	**3**	
Aufgabe 7	**5**	
Aufgabe 8	**3**	
Aufgabe 9	**4**	
Aufgabe 10	**3**	
Aufgabe 11	**4**	
Summe	**38**	

Hinweise:

- Geben Sie Ihre Antworten in lesbarer und verständlicher Form an.
- Schreiben Sie mit dokumentenechten Stiften, nicht mit roten oder grünen Stiften und nicht mit Bleistiften.
- Bitte beantworten Sie die Aufgaben auf den Aufgabenblättern (benutzen Sie auch die Rückseiten).
- **Auf alle Blätter** (inklusive zusätzliche Blätter) müssen Sie **Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer** schreiben.
- Was nicht bewertet werden soll, streichen Sie bitte durch.
- Werden **Täuschungsversuche** beobachtet, so wird die Klausur mit **0 Punkten** bewertet.
- Geben Sie am Ende der Übung **alle Blätter zusammen mit den Aufgabenblättern ab**.

Aufgabe 1 (Potenzmengenkonstruktion): (3 Punkte)

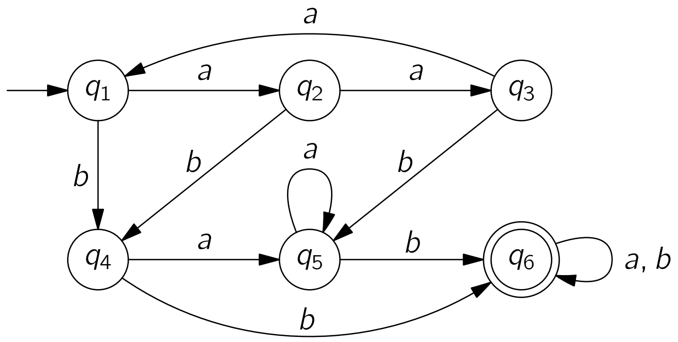
Betrachten Sie den folgenden NEA M über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.



Überführen Sie den NEA M in einen DEA M' mit $L(M) = L(M')$, indem Sie den Potenzautomaten zu M bilden.

Aufgabe 2 (Minimierung): (3 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden DEA M über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.



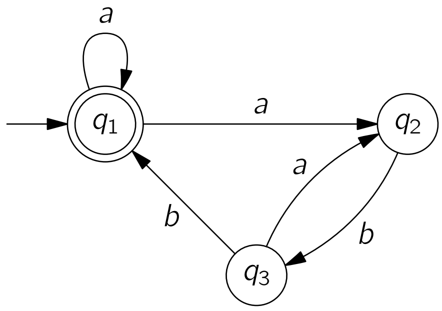
Bestimmen Sie unter Verwendung des Minimierungsverfahrens aus der Vorlesung den minimalen DEA M' mit $L(M) = L(M')$. Füllen Sie dazu die unten stehende Tabelle entsprechend aus und geben Sie eine graphische Darstellung des minimalen DEA M' an.

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_2		— —	— —	— —	— —
q_3			— —	— —	— —
q_4				— —	— —
q_5					— —
q_6					

DEA M':

Aufgabe 3 (Reguläre Ausdrücke): **(1 + 2 = 3 Punkte)**

a) Geben Sie für den folgenden NEA über $\Sigma = \{a, b\}$ einen äquivalenten regulären Ausdruck an.



b) Geben Sie für die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 2 \text{ oder } w \text{ enthält ungeradzahlig viele } b\}$$

einen äquivalenten regulären Ausdruck an.

Aufgabe 4 (Markiersprache): **(1 + 3 = 4 Punkte)**

Zu einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ definieren wir die „Markiersprache“

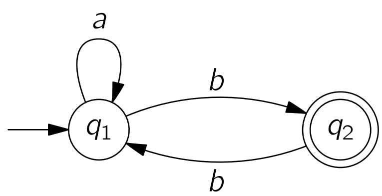
$$L^{\$} = \{a_1\$a_2\$\dots a_n\$ \mid a_1a_2\dots a_n \in L, a_i \in \Sigma, \$ \notin \Sigma\}$$

die sich durch das Hinzufügen von \$ nach jedem Buchstaben eines Wortes $w \in L$ ergibt.

Beispiel: Für $abab \in L$ ist $a\$b\$a\$b\$ \in L^{\$}$.
Hinweis: Falls $\varepsilon \in L$ ist $\varepsilon \in L^{\$}$, jedoch nicht $\$ \in L^{\$}$!

Wir behaupten: Wenn L regulär ist, so ist auch $L^{\$}$ regulär.

a) Zunächst betrachten wir ein Beispiel: Geben Sie für den folgenden NEA $\mathcal{A}$ über $\Sigma = \{a, b\}$ einen NEA $\mathcal{A}^{\$}$ über $\Sigma \cup \{\$\}$ mit $L(\mathcal{A}^{\$}) = (L(\mathcal{A}))^{\$}$ an.



b) Geben Sie nun für den allgemeinen Fall eines NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ einen NEA $\mathcal{A}^{\$}$ über $\Sigma \cup \{\$\}$ mit $L(\mathcal{A}^{\$}) = (L(\mathcal{A}))^{\$}$ an.

Aufgabe 5 (Kontextfreie Grammatiken): **(1 + 2 = 3 Punkte)**

Geben Sie je eine kontextfreie Grammatik für die folgenden beiden Sprachen an:

a) $L_1 = \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$ über dem Alphabet $\{a, b\}$

b) $L_2 = \{u\$v \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| > 0, |v| > 0 \text{ und } |u|_b = |v|_b\}$ über dem Alphabet $\{a, b, \$\}$

Aufgabe 6 (Kontextfreie Grammatiken): **(2 + 1 = 3 Punkte)**

Betrachten Sie die folgende kontextfreie Grammatik G mit den Regeln:

$$\begin{aligned} S &\to ABB \mid aB \\ A &\to bC \mid ba \\ B &\to aD \mid c \\ C &\to Aa \mid bB \\ D &\to b \mid c \end{aligned}$$

a) Geben Sie einen Ableitungsbaum zum Wort $w = bbaaacc$ an. Sofern vorhanden, markieren Sie (z. B. durch Umkreisen) das wiederholte Auftreten von Nichtterminalen entlang eines Pfades von der Wurzel zu einem Blattknoten.

b) Enthält $L(G)$ unendliche viele verschiedene Wörter? Falls ja, geben Sie mit Rückgriff auf Aufgabenteil **a)** eine unendliche Teilmenge von $L(G)$ formal an.

Aufgabe 7 (CYK-Algorithmus): **(3,5 + 0,5 + 1 = 5 Punkte)**

Gegeben ist die folgende kontextfreie Grammatik G in Chomsky-Normalform:

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow AC \mid CC \mid DD \\
A &\rightarrow b \mid BB \mid CS \\
B &\rightarrow c \mid AC \\
C &\rightarrow a \mid CB \mid AA \\
D &\rightarrow a \mid DD
\end{aligned}$$

Ermitteln Sie mittels des CYK-Algorithmus, ob das Wort $w = baca$ zur Sprache $L(G)$ gehört.

a) Füllen Sie die Tabelle entsprechend des CYK-Algorithmus vollständig aus.

i/j	1	2	3	4
1				
2	**b**			
3		**a**		
4			**c**	
				a

b) Gilt $w \in L(G)$? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

c) Sofern $w \in L(G)$ gilt, geben Sie zusätzlich eine Ableitung an, die dies belegt.

Aufgabe 8 (Pumping-Lemma): **(3 Punkte)**

Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen, dass die Sprache

$$L = \{a^k b^k c^k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 9 (Pushdown Automaten): (4 Punkte)

Zu einem Wort $w = a_0 \ldots a_n \in \Sigma^*$ definieren wir seine *umgedrehte Verdopplung* durch

$$w_D^R = a_n a_n a_{n-1} a_{n-1} \ldots a_1 a_1 a_0 a_0.$$

Beispiel: Für $w = ab$ ist $w_D^R = bb\,aa$.

Geben Sie einen Pushdown-Automaten $\mathcal{A}$ an, der die Sprache $L = \{w w_D^R \mid w \in \Sigma^*\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$ (im Modell „Akzeptieren mit Endzuständen") akzeptiert. Eine graphische Lösung genügt.

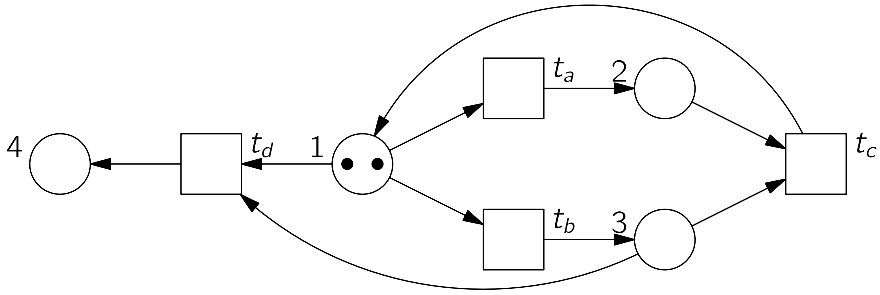
Bitte beschreiben Sie auch kurz die Arbeitsweise Ihres Automaten, um die Korrektur zu erleichtern. Erläutern Sie z. B. die Bedeutung einzelner Zustände oder deuten Sie die Arbeitsweise Ihres Automaten auf dem Beispielwort *abbbaa* an. Diese Beschreibung wird nicht bepunktet!

Aufgabe 10 (Entscheidungsproblem): **(3 Punkte)**

Wir betrachten einen Kellerautomaten $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F)$. Beschreiben Sie *unter Verwendung von Resultaten aus der Vorlesung* ein Verfahren, mit dem man bestimmen kann, ob $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ gilt.

Aufgabe 11 (Petrinetze): **(2 + 1 + 1 = 4 Punkte)**

Gegeben sei folgendes Petrinetz $N = (P, T, F)$ und die Anfangsmarkierung $m^- = (2, 0, 0, 0)$.



a) Bestimmen Sie ausgehend von der Anfangsmarkierung alle durch Schaltfolgen erreichbaren Markierungen, indem Sie den Erreichbarkeitsbaum angeben.

Falls eine Markierung mehrfach vorkommt, dürfen Sie die Wiederholung entsprechend markieren und die Baumkonstruktion unter der wiederholten Markierung abbrechen.

Bitte beachten Sie Aufgabenteile b) und c) auf der nächsten Seite!

b) Ist in N von der Anfangsmarkierung aus ein Deadlock erreichbar? Begründen Sie ihre Antwort kurz.

c) Wir betrachten N als Sprachakzeptor $\mathcal{N} = (N, M^-, M^+, \ell)$ mit $M^- = \{(2, 0, 0, 0)\}$ und $M^+ = \{(1, 0, 0, 0)\}$. Die Beschriftungsfunktion $\ell : T \to \{a, b, c, d\}$ ist durch $t_x \mapsto x$ definiert. Geben Sie die von $\mathcal{N}$ erkannte Sprache $L(\mathcal{N})$ an.