Gedächnisprotokoll zur Zwischenprüfungsklausur Stochastik

bei Prof. Dr. A. Steland
Institut für Statistik und Wirtschaftsmathematik
RWTH Aachen

geschrieben am 13.12.2008

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Die Urne U1 enthält eine schwarze und eine weiße Kugel, die zweite Urne U2 enthält eine schwarze und zwei weiße Kugeln. Sie ziehen zufällig zwei Kugeln aus U2 und legen sie in U1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie aus U1 eine weiße Kugel ziehen.

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Teil A

Gegeben sind die folgenden Wahrscheinlichkeitsmaße:

$\mathcal{P}(X=0)=\frac{1}{4}$, $\mathcal{P}(X=1)=\frac{1}{2}$, $\mathcal{P}(X=4)=\frac{1}{8}$, $\mathcal{P}(X=9)=\frac{1}{8}$, $\mathcal{P}(X=16)=\frac{1}{8}$

a) Begründen Sie, warum der Erwartungswert und die Varianz der Zufallvariablen $\sqrt{X}$ existiert und berechne beides.

b) Bestimmen Sie die Erzeugendenfunktion von $\mathcal{P}$ und gib den maximalen Definitionsbereich an.

Teil B

c) A und B sowie A und C seien stochastisch Unabhängig. Zeigen Sie das dann auch A und $B \setminus C$ stochastisch unabhängig sind.

Teil C

d) Sei μ ein endliches Maß mit $\mu(\Omega) < \infty$ gegeben, zeigen Sie dass $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \frac{1}{\mu(\Omega)}\mu(\mathcal{A})$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

e) Ist die Einschränkung, dass μ endlich ist, nötig damit $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist? (Begründung)

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Teil A

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X_1,X_2,..:$\Omega \to \mathbf{R}$ ein Folge von Zufallsvariabeln und $p \in [1, \infty]$. Man sagt, X_n konvergiert im p-ten Mittel gegen die Zufallsvariable X, wenn gilt: $E(|X_n - X|^p) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Zeigen Sie: Wenn X_n im p-ten Mittel gegen X konvergiert, so folgt $X_n \xrightarrow{p} X$ für $n \to \infty$

Teil B

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X_1,X_2,..:$\Omega \to \mathbf{R}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariabeln mit

$P(X_k = k) = P(X_k = -k) = \frac{1}{2k^2}$ und $P(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{k^2}$ für k=1,2,3,..

Zeigen Sie, dass für $\bar{X_n} := \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ gilt: $\bar{X_n} \xrightarrow{p} 0$, $n \to \infty$

Teil C

Zeigen Sie: $Var(X + Y) = Var(X) + 2Cov(XY) + Var(Y)$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Teil A

Die Lebensdauer einer Glühbirne wird mit der Dichtefunktion:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass gilt: $\mathcal{P}(X \geq s + t \,|\, X \geq s) = \mathcal{P}(X \geq t)$

b) Erklären Sie die obige formal gezeigte Behauptung (*in einem Satz*) einem Oberstufenschüler. Sie können voraussetzen, das die Begriffe Wahrscheinlichkeit und bedingte Wahrscheinlichkeit bekannt sind.

Teil B

c) $f_c(x) = cx\cos(x)1_{[0,\frac{\pi}{2}]}$
Bestimmen Sie c so, dass f_c eine Riemann-Dichte ist.

d) Ersetzen Sie $1_{[0,\frac{\pi}{2}]}$ durch $1_{[0,\pi]}$. Lässt sich nun ein c bestimmen, so dass f_c eine Dichte ist? (Begründung)