Einführung in die Stochastik für Informatiker

Übungsaufgaben mit Lösungen

David Geier und Sven Middelberg

RWTH Aachen, Sommersemester 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Information

Dies sind Aufgaben und Lösungen zu den vom Lehrstuhl angebotenen Klausuraufgaben zur Vorlesung "Einführung in die Stochastik für Informatiker (Cramer, Sommersemester 2007)". Wir übernehmen keinerlei Garantie für Richtigkeit und Vollständigkeit unserer Lösungen. Solltest Du einen Fehler bemerken, würden wir uns über eine Mail an david.geier@rwth-aachen.de oder sven.middelberg@rwth-aachen.de freuen.

2 Aufgabe 1

Für ein Würfelexperiment werden die (äußerlich ununterscheidbaren) Würfel W_1, W_2 und W_3 verwendet. Mit $p_i^{(j)} (i \in \{1, ..., 6\}, j \in \{1, 2, 3\})$ sei die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass Würfel W_j (nach einmaligem Wurf) genau i Augen zeigt. Würfel W_1 ist fair. Es gilt also

$$p_i^{(1)} = \frac{1}{6} \text{ für } i \in \{1, ...6\}.$$

Weiter ist bekannt, dass

$$p_i^{(2)} = \frac{1}{4} \text{ für } i \in \{2, 3, 4, 5\} \text{ sowie}$$

$$p_i^{(3)} = \frac{1}{8} \text{ für } i \in \{2, 3, 4, 5\} \text{ und } p_1^{(3)} = p_6^{(3)}.$$

Spieler A wählt zufällig einen der Würfel aus, wobei jeder Würfel mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Dann wirft er den gezogenen Würfel 10 mal (in unabhängiger Folge). E_i $i \in \{1, ..., 10\}$) sei das Ergebnis, dass der Spieler im i-ten Wurf eine Sechs wirft.

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für E_1.
2. Sind E_1 und E_2 stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Entscheidung. (Hinweis: Sei W_j $(j \in \{1, 2, 3\})$ das Ergebnis, dass Spieler A den j-ten Würfel wählt. Dann gilt nach Vorraussetzung $P(E_1 \cap E_2 | W_j) = P(E_1 | W_j) \cdot P(E_2 | W_j)$.)
3. Wie wahrscheinlich ist es, dass Würfel 3 ausgewählt wurde, falls E_1 und E_2 eingetreten sind?
4. Nehmen Sie an, der Spieler hat Würfel 1 ausgewählt.
   a) Wie wahrscheinlich ist es, dass genau k $(k \in \{0, ..., 10\})$ Sechsen in den Zehn Würfen geworfen werden?
   b) Wie wahrscheinlich ist es, dass die erste Sechs im k-ten Wurfe $(k \in \{1, ..., 10\})$ geworfen wird?

Lösung:

1. Aus der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit folgt:

$$\begin{aligned} P(E_1) &= P(E_1|W_1) \cdot P(W_1) + P(E_1|W_2) \cdot P(W_2) + P(E_1|W_3) \cdot P(W_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

2.

$$P(E_2) = P(E_1) = \frac{5}{36}$$

Aus der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \cap E_2|W_1) \cdot P(W_1) + P(E_1 \cap E_2|W_2) \cdot P(W_2) + P(E_1 \cap E_2|W_3) \cdot P(W_3)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{13}{432} \neq P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{25}{1296}$$

$\Rightarrow$ Die Ereignisse E_1 und E_2 sind stochastisch abhängig

3. Nach dem Satz von Bayes gilt:

$$P(W_3|E_1 \cap E_2) = \frac{P(W_3) \cdot P(E_1 \cap E_2|W_3)}{P(E_1 \cap E_2)} = \frac{\frac{1}{48}}{\frac{13}{432}} = \frac{9}{13}$$

4. a) X: Anzahl der Sechsen in den 10 Würfen

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$

   b) Y: Auftreten der ersten Sechs in den 10 Würfen

$$P(Y = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$$

3 Aufgabe 2

Seien X_1 und X_2 stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. X_1 sei gleichverteilt auf der Menge $\{1, 2, 3\}$, X_2 sei gleichverteilt auf der Menge $\{4, 5, 6\}$. (Es gilt also $P(X_1 = i) = P(X_2 = j) = \frac{1}{3}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{4, 5, 6\}$.) Weiterhin sei $Z = 2X_1 + 2X_2 - 1$.

1. Geben Sie die Zähldichte von $Y = X_1 + X_2$ an.
2. Berechnen Sie die Erwartungswerte von X_1, X_2 und Z.
3. Welchen Wert hat die Wahrscheinlichkeit $P(Z = 13)$?
4. Bestimmen Sie die Kovarianzen $Cov(X_1, X_2)$ und $Cov(X_1, Z)$.

Lösung:

1. Da X_1 und X_2 stochastisch unabhängig sind gilt nach der Methode der Faltung:
$$P(X_1 + X_2 = k) = \begin{cases} \frac{1}{9}, & \text{falls } k \in \{5, 9\} \\ \frac{2}{9}, & \text{falls } k \in \{6, 8\} \\ \frac{1}{3}, & \text{falls } k = 7 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

2.
$$EX_1 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = 2$$
$$EX_2 = \frac{1}{3}(4 + 5 + 6) = 5$$
$$EZ = 2EX_1 + 2EX_2 - E1 = 4 + 10 - 1 = 13$$

3.
$$P(Z = 13) = P(2X_1 + 2X_2 - 1 = 13) = P(X_1 + X_2 = 7) = \frac{1}{3}$$

4. Weil X_1 und X_2 stochastisch unabhängig sind, gilt nach Lemma C 5.16 (v):
$$Cov(X_1, X_2) = 0$$
$$Cov(X_1, Z) = E((X - EX_1)(Z - EZ)) = E((X_1 - 2)(Z - 15))$$
$$= E(X_1Z - 15X_1 - 2Z + 30) = E(X_1Z) - 15EX_1 - 2EZ + E30 = E(X_1Z) - 26$$
$$= E(2X_1{}^2 + 2X_2X_1 - X_1) - 26 = 2EX_1{}^2 - 8$$

   $EX_1{}^2$ ist 2. zentrales Moment von X. Nach Satz C 5.6 gilt:
$$EX_1{}^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$$

   Somit folgt:
$$Cov(X_1, Z) = 2 \cdot \frac{14}{3} - 8 = \frac{4}{3}$$

4 Aufgabe 3

Seien X und Y stochastisch unabhängige (reellwertige) Zufallsvariablen mit Riemann-Dichten f_X, f_Y sowie Verteilungsfunktionen F_X, F_Y, wobei

$$F_X(z) = \begin{cases} 0, & \text{falls } z < 0 \\ cz^3, & \text{falls } 0 \leq z < 1 \\ 1 - ce^{-6c(z-1)}, & \text{falls } z \geq 1 \end{cases}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ und

$$F_Y(z) = \begin{cases} 0, & \text{falls } z < 0 \\ \frac{1}{3}z, & \text{falls } 0 \leq z < 3 \\ 1, & \text{falls } z \geq 3 \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass $c = \frac{1}{2}$ gilt.
2. Geben Sie die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors (X, Y) explizit an.
3. Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion des Maximums von X und Y.
4. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X \in (\frac{1}{2}, 2])$ sowie $P(X \leq 2, Y > 2)$.
5. Ermitteln Sie den Erwartungswert von X.

<u>Lösung:</u>

1. F_X ist stetig

$$\Rightarrow \lim_{z \uparrow 1} F_X(z) = F_X(1) \Leftrightarrow \lim_{z \uparrow 1} cz^3 = 1 - c \Leftrightarrow c = 1 - c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

2. Aus der stochastischen Unabhängigkeit von X und Y folgt:

$$F^{X,Y}(x, y) = F^X(x) \cdot F^Y(y)$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \vee y < 0 \\ \frac{3}{2}x^3 \cdot y, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \wedge 0 \leq y < 3 \\ \frac{1}{2}x^3, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \wedge y \geq 3 \\ \left(1 - \frac{1}{2}e^{-3(x-1)}\right) \cdot \frac{1}{3}y, & \text{falls } x \geq 1 \wedge 0 \leq y < 3 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-3(x-1)}, & \text{falls } x \geq 1 \wedge y \geq 3 \end{cases}$$

3.

$$F^{max(X,Y)}(z) = P(X \leq z \cap Y \leq z) = P(X \leq z) \cdot P(Y \leq z)$$

$$= F^X(z) \cdot F^Y(z) = \begin{cases} 0, & \text{falls } z < 0 \\ \frac{1}{6}z^4, & \text{falls } 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{3}z - \frac{1}{6}ze^{-3(z-1)}, & \text{falls } 1 \leq z < 3 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-3(z-1)}, & \text{falls } z \geq 3 \end{cases}$$

4.

$$P\left(X \in \left(\frac{1}{2}, 2\right]\right) = P\left(\frac{1}{2} < X \leq 2\right) = F^X(2) - F^X\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}e^{-3(2-1)}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = \frac{15}{16} - \frac{1}{2e^3} \approx 0.9126$$

$$P(X \leq 2, Y > 2) = F_X(2) \cdot (1 - F_Y(2))$$

$$(1 - \frac{1}{2}e^{-3}) \cdot (1 - \frac{1}{3} \cdot 2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6e^3} \approx 0.325$$

5.

$$F'_X(z) = \begin{cases} 0, & \text{falls } z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2, & \text{falls } 0 \leq z < 1 \\ \frac{3}{2}e^{-3(z-1)}, & \text{falls } z \geq 1 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot F'_X(z) dz$$

$$= \lim_{a \uparrow 1} \int_0^a z \frac{3}{2} z^2 dz + \lim_{b \uparrow \infty} \int_1^b z \frac{3}{2} e^{-3(z-1)} dz$$

$$= \lim_{a \uparrow 1} \left[\frac{3}{8} z^4\right]_0^a + \lim_{b \uparrow \infty} \int_1^b z \frac{3}{2} e^{-3(z-1)} dz$$

$$= \frac{3}{8} + \lim_{b \uparrow \infty} \int_1^b z \frac{3}{2} e^{-3(z-1)} dz$$

Mit partieller Integration ergibt sich:

$$u(z) = \frac{3}{2}z \qquad u'(z) = \frac{3}{2}$$

$$v'(z) = e^{-3(z-1)} \qquad v(z) = -\frac{1}{3}e^{-3(z-1)}$$

$$\Rightarrow \int_1^b z \frac{3}{2} e^{-3(z-1)} dz = \left[-\frac{1}{2} z e^{-3(z-1)}\right]_1^b - \int_1^b -\frac{1}{2} e^{-3(z-1)} dz$$

$$= -\frac{1}{2} b e^{-3(b-1)} + \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{6} e^{-3(z-1)}\right]_1^b = -\frac{1}{2} b e^{-3(b-1)} - \frac{1}{6} e^{-3(b-1)} + \frac{4}{6}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{3}{8} + \underbrace{\lim_{b \uparrow \infty} -\frac{1}{2} b e^{-3(b-1)}}_{=0 \text{ (2-fach L'Hospital)}} - \underbrace{\lim_{b \uparrow \infty} \frac{1}{6} e^{-3(b-1)}}_{=0} + \frac{4}{6}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{4}{6} = \frac{25}{24}$$

5 Aufgabe 4

Seien $n \in (0, \infty)$ und $X_1, ..., X_n$ stochastisch unabhängige $N(\frac{a}{2}, a^3)$-verteilte Zufallsvariablen. Betrachten Sie den durch

$$\widehat{\vartheta}_n = \frac{1}{n-1}\left(X_1 + \left(\sum_{i=2}^{n-1} 2X_i\right) + X_n\right)$$

definierten Schätzer für $a \in (0, \infty)$.

1. Zeigen Sie, dass $\widehat{\vartheta}_n$ erwartungstreu für $a \in (0, \infty)$ ist.
2. Bestimmen Sie die Varianz von $\widehat{\vartheta}_n$.
3. Zeigen Sie (unter Zuhilfenahme der Tschebyscheff-Ungleichung), dass für alle $\epsilon > 0$

   $$\lim_{n\to\infty} P(|\widehat{\vartheta}_n - a| \geq \epsilon) = 0$$

   gilt.

Lösung:

1. Damit $\widehat{\vartheta}_n$ erwartungstreu ist, muss gelten:

   $$E_\vartheta(\widehat{\vartheta}_n) = a$$

   $$E_\vartheta(\widehat{\vartheta}_n) = \frac{1}{n-1}\left(E(X_1) + 2\sum_{i=2}^{i-1} E(X_i) + E(X_n)\right)$$

   $$= \frac{1}{n-1}\left(\frac{a}{2} + 2\sum_{i=2}^{i-1}\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{n-1}\cdot(n-1)\cdot a = a$$

   $$\Rightarrow \widehat{\vartheta}_n \text{ ist erwartungstreu.}$$

2.
   $$Var(\widehat{\vartheta}_n) = Var\left(\frac{1}{n-1}\left(X_1 + \sum_{i=2}^{n-1} 2X_i + X_n\right)\right)$$

   $$= \frac{1}{(n-1)^2}\cdot Var\left(X_1 + \sum_{i=2}^{n-1} 2X_i + X_n\right)$$

   $$= \frac{1}{(n-1)^2}\cdot\left(Var(X_1) + 4\sum_{i=2}^{n-1} Var(X_i) + Var(X_n)\right)$$

   $$= \frac{1}{(n-1)^2}\cdot\left(a^3 + 4(n-2)a^3 + a^3\right) = \frac{(4n-6)}{(n-1)^2}\cdot a^3$$

3.

6 Aufgabe 5

In den nächsten Semesterferien wird Herr P. eine Europareise mit den Stationen Paris, Rom und London unternehmen. Ein flexibles Flugticket erlaubt es ihm, spontan zu entscheiden, wann er den Flug in die nächste Stadt bzw. die Rückreise antritt. Die Gesamtreseidauer N und die Aufenthaltszeiten N_1, N_2 bzw. N_3 in den Städten Paris, Rom bzw. London werden als Zufallsvariablen mit Werten in den natürlichen Zahlen modelliert, sodass $N = N_1 + N_2 + N_3$ gilt. Herr P. hat vor, jeweils vier oder fünf Tage in Paris und Rom zu bleiben, sowie fünf oder sechs Tage in London. Genauer gelte $P(N_3 = 5) = P(N_3 = 6) = \frac{1}{2}$. Darüberhinaus sei die Aufenthaltsdauer N_3 in London unabhängig vom Zufallsvektor (N_1, N_2). Die Zähldichte des Zufallsvektors (N_1, N_2) ist gemäß folgender Tabelle unvollständig gegeben:

N_1 \ N_2	4	5	Σ
4	$\frac{1}{2}$	g_{45}	p_4
5	g_{54}	g_{55}	$\frac{3}{10}$
Σ	r_4	r_5	

(D.h.: $P(N_1 = 4, N_2 = 4) = \dfrac{1}{2}$, $P(N_1 = 5, N_2 = 4) = g_{54} \in [0, 1]$, $P(N_2 = 4) = r_4 \in [0, 1]$ etc.)

1. Begründen Sie, dass die obige Tabelle unter der Vorraussetzung $E(N_2) = \frac{22}{5} = 4,4$ folgendermaßen vervollständigt werden muss.

N_1 \ N_2	4	5	Σ
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$
5	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$
Σ	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

2. Sind N_1 und N_2 stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich Herr P. vier Tage in Rom aufhält, wenn bekannt ist, dass er fünf Tage in Paris war?
4. Geben Sie die Zähldichte von $N_1 + N_2$ an.
5. Welchen Wert hat die erwartete Gesamtreisedauer $E(N)$?
6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Dauer der gesamten Reise 14 Tage beträgt, wenn bekannt ist, dass Herr P. in Paris und Rom (zusammen) acht Tage verbracht hat?

Lösung:

1.

$$p_4 = P(N_1 = 4) = 1 - P(N_1 = 5) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$\Rightarrow g_{45} = P(N_1 = 4, N_2 = 5) = P(N_1 = 4) - P(N_1 = 4, N_2 = 4) = p_4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{10} - \frac{5}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Weiter gilt: } r_4 + r_5 = 1 \wedge E(N_2) = 4r_4 + 5r_5 = \frac{22}{5}$$

$$\Rightarrow r_4 = 1 - r_5 \Rightarrow E(N_2) = 4 \cdot (1 - r_5) + 5r_5 = \frac{22}{5} \Rightarrow r_5 = \frac{2}{5} \Rightarrow r_4 = \frac{3}{5}$$

$$g_{54} = P(N_1 = 5, N_2 = 4) = r_4 - \frac{1}{2} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$g_{55} = r_5 - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

2.

$$\text{Es gilt: } P(N_1 = 4, N_2 = 4) = \frac{1}{2},\ P(N_1 = 4) = \frac{7}{10},\ P(N_2 = 4) = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow P(N_1 = 4) \cdot P(N_2 = 4) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{50} \neq \frac{1}{2} = P(N_1 = 4, N_2 = 4)$$

$\Rightarrow$ Die Zufallsvariablen N_1 und N_2 sind stochastisch abhängig.

3.

Der Tabelle lässt sich entnehmen: $P(N_1 = 5, N_2 = 4) = \frac{1}{10}$.

4.

$$N_1(x) = \begin{cases} \frac{7}{10}, & \text{für } x = 4 \\ \frac{3}{10}, & \text{für } x = 5 \end{cases},\ N_2(x) = \begin{cases} \frac{3}{5}, & \text{für } x = 4 \\ \frac{2}{5}, & \text{für } x = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_1(x) + N_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{für } x = 8 \\ \frac{3}{10}, & \text{für } x = 9 \\ \frac{1}{5}, & \text{für } x = 10 \end{cases}$$

5.

$$E(N) = E(N_1 + N_2 + N_3) = E(N_1) + E(N_2) + E(N_3)$$

$$= 4 \cdot \frac{7}{10} + 5 \cdot \frac{3}{10} + \frac{22}{5} + 5.5 = 2.8 + 1.5 + 4.4 + 5.5 = 14.2$$

6. (N_1, N_2) und N_3 sind stochastisch unabhängig

$$\Rightarrow P(N_3 = 6 | (N_1 = 4, N_2 = 4)) = P(N_3 = 6) = \frac{1}{2}$$

7 Aufgabe 6

Gegeben sei die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [0,1] \\ 0, & sonst. \end{cases}$$

1. Weisen Sie nach, dass f Riemann-Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P_0 auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ist. ($\mathcal{B}$ bezeichne hierbei die Borel-σ-Algebra über den reellen Zahlen.)
2. Geben Sie die zu f und P_0 gehörende Verteilungsfunktion F an.
3. Sei X eine (auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ definierte) reellwertige Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsverteilung P_0.
   a) Ermitteln Sie für die Zufallsvariable $Y = X^3 + 1$
      - den Erwartungswert $E(Y)$ und
      - die Verteilungsfunktion F^Y.

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P^Y([0,2])$?

Lösung:

1.
$$f(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$$

f ist Riemann-Dichte genau dann, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 3x^2 dx = \left[x^3\right]_0^1 = 1$$

$\Rightarrow$ f(x) ist Riemann-Dichte

2.
$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_0^x 3x^2 dx = \left[x^3\right]_0^x = x^3$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3, & x \in [0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

3. a) •

$$E(Y) = E(X^3+1) = \underbrace{E(X^3)}_{\text{3. (zentrales) Moment}} +1$$

$$= \int_0^1 x^3 \cdot 3x^2 dx + 1 = \int_0^1 3x^5 dx + 1 = \left[\frac{1}{2}x^6\right]_0^1 + 1 = \frac{3}{2}$$

- Nach dem Transformationsatz für Dichtefunktionen (Satz C 4.2) gilt:

$$f^Y(y) = \begin{cases} |(g^{-1})'(y)| \cdot f^X(g{-}1(y)), & x \in [1,2] \\ 0, & sonst, \end{cases}$$

denn Y = g(x): [0,1] $\rightarrow$ [1,2]

$$g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$$

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(y-1)^2}}$$

Somit folgt:

$$f^Y(y) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(y-1)^2}} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{(y-1)^2} = 1$$

$$\Rightarrow f^Y(y) = \begin{cases} 1, & x \in [1,2] \\ 0, & sonst \end{cases}$$

$$\Rightarrow F^Y(y) = \int_1^y 1dy = y - 1$$

$$\Rightarrow F^Y(y) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ y-1, & x \in [1,2] \\ 1, & sonst \end{cases}$$

b)

$$P^Y([0,2]) = F^Y(2) = 1$$

8 Aufgabe 7

Sei f die Dichtefunktion eines Zufallsvektors (X, Y) mit

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 - y}, & x, y \geq 0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass die marginalen Dichten f^X und f^Y von X und Y gegeben sind durch:

$$f^X = \begin{cases} x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}, & x \geq 0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

$$f^Y = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

2. Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie ihre Antwort.

3. Berechnen Sie den Erwartungswert von X. (Hinweis: Integrieren Sie partiell und beachten Sie, dass für die Dichtefunktion h der $N(0,1)$-Verteilung $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = 1$ gilt.)

4. Welche der folgenden Aussagen ist die korrekte Begründung für die Eigenschaft $Cov(X, Y^2) = 0$?

   a) Mit X und Y sind auch X und Y^2 stochastisch unabhängig. Da aus stochastischer Unabhängigkeit die Unkorreliertheit folgt, gilt $Cov(X, Y^2) = 0$.

   b) Aus der Unabhängigkeit von X und Y folgt $Cov(X, Y) = 0$. Eine Eigenschaft der Kovarianz liefert $Cov(X, Y^2) = 2Cov(X, Y)$, so dass $Cov(X, Y^2) = 0$.

   c) Es gilt $Cov(X, Y) = 0$. Daraus folgt stets $Cov(X, Y^2) = 0$.

Lösung:

1.

$$f^X(x) = f^{X,Y}(x, \mathbb{R}) = \int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 - y} dy = \int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{-y} dy$$
$$= x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \int_0^\infty e^{-y} dy = \lim_{a \to \infty} x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left[-e^{-y}\right]_0^a$$
$$= \lim_{a \to \infty} x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-e^{-a}) - x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-e^{-0}) = 0 - x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-1) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$f^Y(y) = f^{X,Y}(\mathbb{R}, y) = \int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 - y} dx = \int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{-y} dx$$
$$= e^{-y} \cdot \int_0^\infty x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \lim_{a \to \infty} e^{-y} \cdot \left[-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_0^a$$
$$= \lim_{a \to \infty} e^{-y} \cdot (-e^{-\frac{1}{2}a^2}) - e^{-y} \cdot (-e^{-\frac{1}{2}0^2}) = 0 - e^{-y} \cdot (-1) = e^{-y}$$

2. X und Y sind stochastisch unabhängig, denn es gilt:

$$f(x,y) = f^X \cdot f^Y = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{-y} = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2 - y},\ \forall x, y \geq 0$$

3.
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx, \text{ da } f^X(x) = 0\ \forall x < 0$$

$$\text{Partielle Integration: } \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$\text{Wähle: } u(x) = x,\ u'(x) = 1,\ v'(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2},\ v(x) = -e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\int_0^{\infty} x \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = [x \cdot (-e^{-\frac{1}{2}x^2})]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1 \cdot (-e^{-\frac{1}{2}x^2}) dx$$

$$= \underbrace{\lim_{a \to \infty} \left[x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_0^a}_{=0 \text{ (2 fach L'Hospital)}} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$= \sqrt{2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{=1\ (N(0,1)-\text{Verteilung})} = \sqrt{2\pi} \cdot 1 = \sqrt{2\pi}$$

4. Antwort (a) ist nach Lemma C 5.16 (v) korrekt.

9 Aufgabe 8

Seien $Y_1, ..., Y_n$ ($n \in \mathbb{N}$) unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte

$$g_\vartheta(y) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta} \cdot e^{\frac{-y}{\vartheta}}, & y \geq 0 \\ 0, & sonst, \end{cases}$$

wobei $\vartheta \in (0, \infty)$. Weiter seien $y_1, ..., y_n > 0$ Realisierungen von $Y_1, ..., Y_n$.

1. Für $X \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$, gilt $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ sowie $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. Begründen Sie mit diesem Resultat die Aussagen:

   $$E_\vartheta(Y_1) = \vartheta,\; Var_\vartheta(Y_1) = \vartheta^2.$$

   (E_ϑ bzw. Var_ϑ bezeichnen hierbei den Erwartungswert bzw. die Varianz bei gegebener Dichte g_ϑ, $\vartheta \in (0, \infty)$.)

2. Bestimmen Sie die Likelihoodfunktion sowie die Log-Likelihoodfunktion für $\vartheta > 0$ bei gegebener Beobachtung $y_1, ..., y_n > 0$.

3. Ermitteln Sie die Maximum-Likelihoodschätzung $\widehat{\vartheta}_n(y_1, ..., y_n)$ für $\vartheta > 0$ bei gegebener Beobachtung $y_1, ..., y_n > 0$ durch Maximieren der Log-Likelihoodfunktion.

4. Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihoodschätzer $\widehat{\vartheta}_n(Y_1, ..., Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ erwartungstreu für $\vartheta > 0$ ist sowie

   $$\lim_{n \to \infty} Var_\vartheta(\widehat{\vartheta}_n(Y_1, ..., Y_n)) = 0, \text{ für alle } \vartheta > 0.$$

10 Aufgabe 9

Seien $a, b > 0$ und X, Y reellwertige Zufallsvariablen mit $X \sim N(0,1)$ und $Y = aX + b$. Betrachten Sie folgende Aussagen:

1. $Cov(X, Y) = 0$,
2. $E(Y^2) = a^2 + b^2$,
3. Y ist normalverteilt,
4. Y ist absolut stetig mit Dichte f_Y, definiert durch $f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} exp(\frac{-(x-b)^2}{2a^2})$ für $x \in \mathbb{R}$,
5. $X + Y \sim N(a + b, a^2 + 1)$.

Welche dieser Aussagen sind richtig?

a) alle außer (1)

b) alle außer (4)

c) alle außer (1) und (5)

d) genau (3) und (4)

e) nur (2)

Lösung:
Die Aussagen (1) und (5) sind falsch, die Aussagen (2) und (3) sind korrekt $\Rightarrow$ (c) ist die korrekte Antwort.
Aussage (1) ist falsch, denn Y ist eine lineare Transformation von X und somit ist $Cov(X, Y) = \pm 1$.
Aussage (5) ist falsch, denn nach Beispiel C 4.1 gilt:

$$X + Y = (a + 1)X + b \Rightarrow X + Y \sim N(b, a^2 + 2a + 1)$$

Aussage (2) ist korrekt, denn:

$$EY^2 = E(a^2X^2 + 2abX + b^2) = a^2EX^2 + b^2$$

EX^2 ist zweites zentrales Moment der N(0,1) Verteilung. Nach Beispiel C 6.9 (iii) gilt:

$$EX^2 = h''(0) = e^{\frac{1}{2}t^2} + t^2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot t^2}|_{t=0} = 1$$

Somit folgt für EY^2 :

$$EY^2 = a^2 \cdot 1 + b^2 = a^2 + b^2$$

Aussage (3) ist korrekt, denn nach Beispiel C 6.9 ist Y als lineare Transformation einer normalverteilten Zufallsvariable wiederum nomalverteilt.

11 Aufgabe 10

Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_4$ seien unabhängig identisch verteilt mit Wahrscheinlichkeitsverteilung P_μ, welche vom unbekannten Erwartungswert $\mu \in \Theta = (0, \infty)$ der X_i abhängt. $\widehat{\vartheta}$ sei eine erwartungstreue Schätzfunktion für $\mu \in \Theta$. Betrachten Sie folgende Aussagen:

1. $E_\mu(\widehat{\vartheta}) = \mu$ für alle $\mu \in \Theta$,
2. $E_\mu(\widehat{\vartheta}) = E_\mu(X_1)$ für alle $\mu \in \Theta$,
3. $E_\mu(\widehat{\vartheta}) = E_\mu(X_1X_2X_3)$ für alle $\mu \in \Theta$,
4. $E_2(\widehat{\vartheta}) = E_2(X_1X_2X_3 - 6)$,
5. $E_\mu(\widehat{\vartheta}) = E_\mu(\frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4))$ für alle $\mu \in \Theta$,

(E_μ bezeichne hierbei den Erwartungswert bei gegebener Verteilung $P_\mu, \mu \in \Theta$.) Welche dieser Aussagen sind richtig?

a) alle

b) alle außer (3)

c) alle außer (3) und (4)

d) alle außer (4) und (5)

e) nur (1)

12 Aufgabe 11

In einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P) seien von den Ereignissen $A, B, C \in F$ folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$P(A) = \frac{2}{5},\ P(A \cup B) = \frac{11}{20},\ P(B \cap C) = \frac{1}{20},\ P(B \setminus C) = \frac{1}{5}$$

Welche der nachstehenden Aussagen ist richtig?

1. $P(B) = \frac{1}{4}$ und $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$,
2. $P(B) = \frac{1}{4}$ und $P(A \cap B) = \frac{6}{5}$,
3. $P(B) = \frac{1}{4}$ und $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$,
4. $P(B) = \frac{3}{20}$ und $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$,
5. $P(B) = \frac{3}{20}$ und $P(A \cap B) = \frac{19}{20}$.

Lösung:

$$P(B \setminus C) = P(B) - P(B \cap C) \Rightarrow \frac{1}{5} = P(B) - \frac{1}{20} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

Nach Siebformel gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{11}{20} = \frac{2}{5} + \frac{1}{4} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

$\Rightarrow$ Also ist Antwort (1) korrekt.

13 Aufgabe 12

Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, v_1, v_2 > 0$ und X_1, X_2 reellwertige Zufallsvariablen mit $X_i \sim N(a_i, v_i)$ $(i \in 1, 2)$. Betrachten Sie folgende Aussagen:

1. $Cov(X_1, X_2) = 0$,
2. $E(X_1 + 2X_2) = a_1 + 2a_2$,
3. $E(X_1X_2) = a_1a_2$,
4. $Var(3X_1 + 3X_2) = 3v_1 + 3v_2$,
5. $Var(2X_1 + X_2) = 4v_1 + v_2$.

Welche dieser Aussagen können aus den obigen Vorraussetzungen gefolgert werden?

a) nur (2),

b) genau (1) und (2),

c) alle außer (1), (3) und (4),

d) alle außer (3) und (5),

e) alle außer (4).

Lösung:
Die Aussagen (1), (3), (4) und (5) sind falsch $\Rightarrow$ (a) ist die korrekte Antwort. Aussage (1) ist falsch, denn im Allgemeinen gilt nicht, dass $Cov(X_1, X_2) = 0$, da nicht bekannt ist ob X_1 und X_2 stochastisch unabhängig sind. Aussage (3) ist falsch, da der Multiplkationssatz (C 5.9) nur für stochastisch unabängige Zufallsvariablen gilt. Aussage (4) ist falsch, denn nach Lemma C 5.15 gilt:

$$Var(3X_1 + 3X_2) = Var(3X_1) + Var(3X_2) + 2 \cdot Cov(3X_1, 3X_2)$$

$$= 9 \cdot Var(X_1) + 9 \cdot Var(X_2) + 18 \cdot Cov(X_1, X_2) = 9v_1 + 9v_2 + 18 \cdot Cov(X_1, X_2)$$

Dies ist im Allgemeinen nicht $3v_1 + 3v_2$.
Aussage (5) ist falsch, denn nach Lemma C 5.15 gilt:

$$Var(2X_1 + X_2) = Var(2X_1) + Var(X_2) + 2Cov(2X_1, X_2)$$

$$= 4 \cdot Var(X_1) + Var(X_2) + 4 \cdot Cov(X_1, X_2) = 4v_1 + v_2 + 4 \cdot Cov(X_1, X_2)$$

Somit ist $Var(2X_1 + X_2) = 4v_1 + v_2$ genau dann, wenn $Cov(X_1, X_2) = 0$. Weil nicht bekannt ist ob X_1 und X_2 unkorreliert sind, gilt Aussage (5) im Allgemeinen nicht.

14 Aufgabe 13

$X_1, ..., X_n (n \in \mathbb{N})$ seien diskrete, identisch verteilte Zufallsvariablen, deren Zähldichte von einem unbekannten Parameter $c_0 \in \mathbb{R}$ abhängt. $x_1, ..., x_n$ seien Realisierungen von $X_1, ..., X_n$. Mit der Maximum-Likelihood-Methode wurde eine Schätzfunktion $\widehat{\vartheta}$ sowie ein Schätzwert $\widehat{c} = \widehat{\vartheta}(x_1, ..., x_n)$ für c_0 ermittelt. Betrachten Sie folgende Aussagen:

1. $P_{\widehat{c}}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) \geq P_c(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$ für alle $c \in \mathbb{R}$,
2. $\widehat{\vartheta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$,
3. $E_{\widehat{c}}(\widehat{\vartheta}) \geq E_c(\widehat{\vartheta})$ für alle $c \in \mathbb{R}$,
4. $E_{\widehat{c}}(\widehat{\vartheta}) \geq E_{\widehat{c}}(X_i)$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$,
5. $\widehat{c} \geq c$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

Welche dieser Aussagen können stets gefolgert werden?

- nur (1),
- nur (4),
- genau (3) und (4),
- genau (1), (2) und (3),
- alle.