Musterlösungen zur Zusatzübung

13. Juni 2002

Aufgabe 6

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \mathbb{1}_{(x_2,x_2+1)}(x_1)$$

Mit

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)} \quad \text{für } x_2 > 0$$

ergibt sich eine gemeinsame Dichte $f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)$ für $x_2 \neq 0$

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) f_{X_2}(x_2) = \mathbb{1}_{(x_2,x_2+1)}(x_1)\mathbb{1}_{(0,1)}(x_2).$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 \leq 2) &= \int\int_{0 \leq x_1+x_2 \leq 2} f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) dx_1\ dx_2 \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-x_2} \mathbb{1}_{(x_2,x_2+1)}(x_1)\mathbb{1}_{(0,1)}(x_2) dx_1\ dx_2 \\
&= \int_0^1 \int_0^{2-x_2} \mathbb{1}_{(x_2,x_2+1)}(x_1) dx_1\ dx_2.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{(x_2,x_2+1)}(x_1)$ und der Integralgrenze liefert die Integration über x_1 einen Beitrag für

$$x_2 < x_1 < x_2 + 1 \quad \text{und} \quad 0 < x_1 < 2 - x_2.$$

Daraus folgt für $x_2 < \frac{1}{2}$

$$x_2 < x_1 < x_2 + 1$$

und für $x_2 > \frac{1}{2}$

$$x_2 < x_1 < 2 - x_2.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 \leq 2) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{x_2}^{x_2+1} dx_1\ dx_2 + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{x_2}^{2-x_2} dx_1\ dx_2 \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} dx_1 + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2 - 2x_2)\ dx_2 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

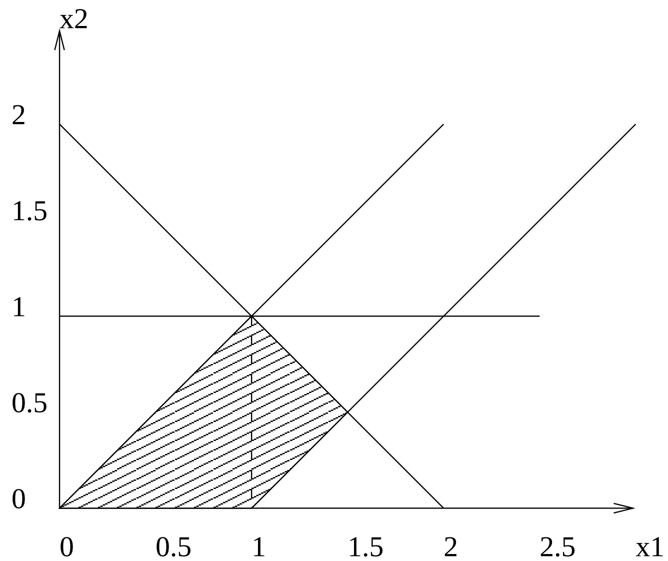

Abbildung 1: Skize des Integrationsbereichs in Aufgabe 6.

Auf dieses Ergebnis kommt man sehr schnell, wenn man sich an Hand einer Skize klar macht, welche Fläche durch $x_1 + x_2 < 2$, $x_2 < x_1 < x_2 + 1$ und $0 < x_2 < 1$ beschrieben wird (siehe Abbildung 1). Da die gemeinsame Dichte nur durch eine Konstante und die Indikatorfunktion gegeben ist, ist $P(X_1 + X_2 < 2)$ gleich dem Inhalt der durch die Ungleichungen eingeschlossen Fläche, also $P(X_1 + X_2 < 2) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1$.

Aufgabe 7

$$\begin{aligned} P(\max\{X,Y\} \leq x) &= P(X \leq x, Y \leq x) = P(X \leq x)P(Y \leq x) \\ &= (1 - e^{-\lambda x})(1 - e^{-\lambda x}) = 1 - 2e^{-\lambda x} + e^{-2\lambda x} \\ &= F_{max\{X,Y\}}(x) \quad \text{für } x > 0, \text{ sonst } F_{max\{X,Y\}}(x) = 0 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Erwartungswert

$$\begin{aligned} E[\max\{X,Y\}] &= -\int_{-\infty}^{0} F_{max\{X,Y\}}(x)\ dx + \int_0^\infty (1 - F_{max\{X,Y\}}(x))\ dx \\ &= \int_0^\infty 2e^{-\lambda x} - e^{-2\lambda x}\ dx = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}. \end{aligned}$$

Mit

$$\max\{E[X], E[Y]\} = E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

folgt $E[\max\{X,Y\}] > \max\{E[X], E[Y]\}$.

Aufgabe 8

$X_1, \dots, X_n$ sind s.u.

$$\Rightarrow \quad L(\lambda|x_1, \dots x_n) := f(x_1, \dots x_n|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x_i|}$$

$$\Rightarrow \quad \log L(\lambda|x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} (\log(\lambda) - \log(2) - \lambda|x_i|)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d \log L(\lambda|x_1, \dots x_n)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} - |x_i| =: 0$$

$$\Rightarrow \quad n \cdot \frac{1}{\hat{\lambda}} - \sum_{i=1}^{n} |x_i| =: 0 \qquad \text{da} \qquad \sum_{i=1}^{n} |x_i| \neq 0, \text{ P-f.s}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$

$\log L$ ist stetig in λ und $\lim_{\lambda \to 0} \log L = \lim_{\lambda \to \infty} \log L = -\infty$.

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}$$

ist also ML-Schätzer für λ.