Prof. Dr. R. Mathar RWTH Aachen, SS 2000
Michael Schmeink, Ute Kohlhaas Ausgabe: 03.07.2000

Musterlösung zur 2. Zusatzübung zur Stochastik für Informatiker

Aufgabe 1

Wir integrieren zunächst $f_{\mu,\sigma}$ über $\mathbb{R}$ und überprüfen, ob diese Integration 1 ergibt.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu,\sigma}(x)\ dx &= \frac{\sigma}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma^2+(x-\mu)^2}\ dx = \frac{\sigma}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma^2[1+(\frac{x-\mu}{\sigma})^2]}\ dx \\
&= \frac{1}{\mu\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\ dx = \frac{1}{\mu\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+y^2}\ \sigma\ dy \\
&\quad \text{mit der Substitution } y := \frac{x-\mu}{\sigma} \\
&= \frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+y^2}\ dy = \frac{1}{\pi}\Big[\arctan(y)\Big]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\Big] \\
&= \frac{1}{\pi}\ \pi = 1.
\end{aligned}$$

Somit gilt $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu,\sigma}(x)\ dx = 1$. Außerdem ist $f_{\mu,\sigma}(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Durch $f_{\mu,\sigma}$, $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$ ist also stets eine Dichte gegeben.

Aufgabe 2

Die auf $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable, die das Intervall $[0,1]$ in zwei Teile zerlegt, werde mit U bezeichnet.

a) Die Länge des linken Teilstücks ist dann gerade gegeben durch den Wert der Zufallsvariablen U. Mit

$$g(u) = \begin{cases} u, & 0 < u < 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

erhält man den Erwartungswert der Länge des linken Teilstücks durch

$$E[g(U)] = \int_0^1 u \cdot 1\ du = 0.5.$$

b) Die Länge des kürzeren Teilstücks ergibt sich zu $\min(U, 1-U)$. Mit

$$g(u) = \begin{cases} \min(u, 1-u), & 0 < u < 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} u, & 0 < u < \frac{1}{2}, \\ 1-u, & \frac{1}{2} \leq u < 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

erhält man den Erwartungswert der Länge des kürzeren Teilstücks durch

$$E[g(U)] = \int_0^{\frac{1}{2}} u \cdot 1\ du + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-u)\cdot 1\ du = \frac{1}{8} + \Big(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\Big) = 0.25.$$

Aufgabe 3

Der Würfel wird unabhängig so oft geworfen, bis alle sechs Ziffern gefallen sind. Die Anzahl der dazu benötigten Würfe ist durch die Zufallsvariable N gegeben. Die Folge der Würfe, bzw. der Ausgänge, beschreiben wir durch eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_N$. Den Zeitpunkt des ersten Auftretens der i-ten bisher nicht gewürfelten Zahl bezeichnen wir mit $T_i,\ i \in \{1,\dots,6\}$. T_i wird gemessen in der Anzahl der bisher durchgeführten Würfe. Damit gilt

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 \\ T_i &= \inf\Big\{n \in \mathbb{N} | X_n \notin \{X_{T_1}, X_{T_2}, \dots, X_{T_{i-1}}\}\Big\},\ i \in \{2,\dots,6\}, \end{aligned}$$

und es ist

$$N = T_6.$$

Gesucht ist der Erwartungswert und die Varianz von N, also $E[T_6]$, $\mathrm{Var}[T_6]$. Setze nun

$$\begin{aligned} N_1 &:= 1 \\ N_i &:= T_i - T_{i-1},\ i \in \{2,\dots,6\}. \end{aligned}$$

Damit erhält man für T_i die Darstellung

$$T_i = \sum_{j=1}^{i} N_j. \tag{1}$$

$N_i - 1$ ist die Wartezeit von der $(i-1)$-ten bis zur i-ten Ziffer und ist geometrisch verteilt mit Parameter $p_i = \frac{7-i}{6}$. Die N_i sind stochastisch unabhängig.
Für den Erwartungwert von T_6 ergibt sich somit

$$\begin{aligned} E[T_6] &= \sum_{i=1}^{6} E[N_i] \quad \text{wegen (1)} \\ &= \sum_{i=1}^{6} \Big(\frac{1-p_i}{p_i} + 1\Big) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{p_i} \\ &= \sum_{i=1}^{6} \frac{6}{7-i} = 1 + \frac{6}{5} + \frac{3}{2} + 2 + 3 + 6 \\ &= 14.7. \end{aligned}$$

Für die Varianz von T_6 erhält man analog

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[T_6] &= \sum_{i=1}^{6} \mathrm{Var}[N_i], \quad \text{da die } N_i \text{ stoch. unabh.} \\ &= \sum_{i=1}^{6} \frac{1-p_i}{{p_i}^2} = \sum_{i=1}^{6} \frac{(1-\frac{7-i}{6})6^2}{(7-i)^2} = \sum_{i=1}^{6} \frac{6^2 - 6(7-i)}{(7-i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^{6} \frac{6(6-7+i)}{(7-i)^2} = \sum_{i=1}^{6} \frac{6(i-1)}{(7-i)^2} = \frac{0}{36} + \frac{6}{25} + \frac{12}{16} + \frac{18}{9} + \frac{24}{4} + \frac{30}{1} \\ &= 38.99. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

Wir setzen $g(x) := x^k f(x)$. Es folgt $g(-x) = (-x)^k f(-x) = -x^k f(x) = -g(x)$ und

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{\infty} g(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} g(-x)dx + \int_{0}^{\infty} g(x)dx$$

$$= \int_0^{-\infty} g(-x)dx + \int_0^{\infty} g(x)dx = -\int_0^{\infty} g(x)dx + \int_0^{\infty} g(x)dx = 0.$$

Aufgabe 5

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(aX+b, cY+d) &= E[(aX+b)(cY+d)] - E(aX+b)E(cY+d)\\
&= E(acXY + adX + bcY + bd) - (aE(X)+b)(cE(Y)+d)\\
&= acE(XY) + adE(X) + bcE(Y) + bd - acE(X)E(Y) - adE(X) - bcE(Y) - bd\\
&= ac(E(XY) - E(X)E(Y)) = ac\operatorname{Cov}(X,Y).
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Da zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen immer unkorreliert sind, ist nur zu zeigen, daß aus der Unkorreliertheit die stochastische Unabhängigkeit folgt.

Wir betrachten zuerst den Fall, daß X und Y beide den Träger $\{0,1\}$ haben. Da X und Y unkorreliert sind, folgt

$$0 = \operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = P(X=1, Y=1) - P(X=1)P(Y=1),$$

also

$$P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1).$$

Folglich sind die Ereignisse $\{X=1\}$ und $\{Y=1\}$ stochastisch unabhängig. Mit Lemma 2.17 folgt:

- Die Ereignisse $\{X=1\}^C$ und $\{Y=1\}$ sind stochastisch unabhängig,
- Die Ereignisse $\{X=1\}$ und $\{Y=1\}^C$ sind stochastisch unabhängig,
- Die Ereignisse $\{X=1\}^C$ und $\{Y=1\}^C$ sind stochastisch unabhängig.

Mit Lemma 4.10 folgt, daß X und Y stochastisch unabhängig sind.

Im allgemeinen Fall sei $\{x_1, x_2\}$ der Träger von X und $\{y_1, y_2\}$ der Träger von Y. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $x_1 \neq x_2$ und $y_1 \neq y_2$, da eine Zufallsvariable X mit nur einem Trägerpunkt x stochastisch unabhängig von jeder Zufallsvariablen Y ist. (Es sei $B \in \mathfrak{B}^1$:

$$P(X=x, Y\in B) = P(Y \in B) = P(X=x)P(Y\in A)$$

und

$$P(X=x', Y\in A) = P(\emptyset) = 0 = P(X=x')P(Y\in A)$$

für alle $x' \neq x$.)

Wir setzen $a := \frac{1}{x_2-x_1}$, $b := \frac{-x_1}{x_2-x_1}$, $c := \frac{1}{y_2-y_1}$ und $d := \frac{-y_1}{y_2-y_1}$. Die Zufallsvariablen $X' := aX+b$ und $Y' := cY+d$ haben beide den Träger $\{0,1\}$, denn:

$$X(\omega) = x_1 \Rightarrow X'(\omega) = \frac{x_1}{x_2-x_1} - \frac{x_1}{x_2-x_1} = 0$$

und

$$X(\omega) = x_2 \Rightarrow X'(\omega) = \frac{x_2}{x_2-x_1} - \frac{x_1}{x_2-x_1} = 1.$$

(Y' wird analog behandelt.)

Sind X und Y unkorreliert, so folgt also

$$0 = \operatorname{Cov}(X, Y) = \operatorname{Cov}(aX + b, cY + d) = \operatorname{Cov}(X', Y').$$

Also sind X' un d Y' unkorreliert und nach der Vorüberlegung auch stochastisch unabhängig. Da die Zufallsvariablen X und Y meßbare Funktionen von X' und Y' sind ($X = (x_2 - x_1)X' + x_1$, $Y = (y_2 - y_1)Y' + y_1$), sind sie nach Satz 4.16 stochastisch unabhängig.

Aufgabe 7

Es sei X gleichverteilt auf $\{-1, 0, 1\}$. Dann folgt

$$E(X) = (-1 + 0 + 1)\frac{1}{3} = 0$$

und (beachte $X^3 = X$)

$$\operatorname{Cov}(X, X^2) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = E(X) - E(X)E(X^2) = 0 - 0E(X^2) = 0,$$

also sind X und X^2 unkorreliert.
Es gilt aber

$$P(X^2 = 1, X = 0) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = P(X^2 = 1)P(X = 0),$$

X und X^2 sind also nicht stochastisch unabhängig.