Prof. Dr. R. Mathar
Jaakob Kind

RWTH Aachen, SS 2000
Ausgabe: 28.06.2000

2. Zusatzübung zur Einführung in die Stochastik

Aufgabe 1

Ist durch $f_{\mu,\sigma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_{\mu,\sigma}(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-\mu)^2}$$

eine Dichte gegeben?

Aufgabe 2

Das Intervall $[0,1]$ werde durch eine $R(0,1)$-verteilte Zufallsvariable in zwei Teile geteilt. Berechnen Sie den Erwartungswert der Länge

a) des linken Teilstücks

b) und des kürzeren Teilstücks.

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable N beschreibe die Anzahl der unabhängigen Würfe mit einem fairen Würfel, bis alle sechs Ziffern gefallen sind. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von N.

Aufgabe 4

Es sei X eine absolut-stetige Zufallsvariable mit der Dichte f_X und $k \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl, für die $E(X^k)$ existiert. Zeigen Sie:

$$(\forall x \in \mathbb{R} : f_X(x) = f_X(-x)) \Rightarrow E(X^k) = 0.$$

Aufgabe 5

Es seien X, Y Zufallsvariablen und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Aufgabe 6

Es seien X, Y diskrete Zufallsvariablen mit jeweils zwei Trägerpunkten. Zeigen Sie, daß X und Y genau dann unkorreliert sind, wenn sie stochastisch unabhängig sind.

Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Fall, daß X und Y den Träger $\{0, 1\}$ haben.

Aufgabe 7

Geben Sie ein Beispiel für zwei unkorrelierte Zufallsvariablen an, die nicht stochastisch unabhängig sind.

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete diskrete Zufallsvariable X und $Y := X^2$.