Prof. Dr. R. Mathar
Jaakob Kind

Musterlösung zur 1. Zusatzübung zur Stochastik für Informatiker

Aufgabe 1

a) Wahrscheinlichkeitsraum zur Modellierung: $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^3$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$, und P definiert durch $P(\{\omega\} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ für alle $\omega \in \Omega$.
Es gilt

$$A_{ij} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_i = \omega_j\} = \bigcup_{k=1}^{6} \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = \omega_j = k\}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} P(A_{ij}) &= \sum_{k=1}^{6} P(\{\omega \in \Omega \mid \omega_i = \omega_j = k\}) \\ &= \sum_{k=1}^{6} P(\{\omega \in \Omega \mid \omega_i = k, \omega_j = k\}) = \sum_{k=1}^{6} 6 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

b) Für $i \neq j$ und $k \neq l$ mit $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ gilt $A_{ij} \cap A_{kl} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_i = \omega_j, \omega_k = \omega_l\}$. Wegen $|\{i, j\} \cap \{k, l\}| = 1$ folgt $A_{ij} \cap A_{kl} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = \omega_2 = \omega_3\}$, also

$$\begin{aligned} P(A_{ij} \cap A_{kl}) &= \sum_{m=1}^{6} P(\omega \in \Omega \mid \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = m\} \\ &= \sum_{m=1}^{6} \frac{1}{6^3} = \frac{1}{36} = P(A_{ij})P(A_{kl}) \end{aligned}$$

Weiter gilt $A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23} = \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = \omega_2 = \omega_3\} = A_{12} \cap A_{23}$, also $P(A_{12} \cap A_{13} \cap A_{23}) = \frac{1}{36} \neq \left(\frac{1}{6}\right)^3 = P(A_{12})P(A_{13})P(A_{23})$.

Aufgabe 2

Es seien $K_1^o, K_1^u, K_2^o, K_2^u$ die Ereignisse, daß im ersten bzw. zweiten Wurf ein „Kopf" oben bzw. unten liegt. M_i $(i = 1, \ldots, 5)$ bezeichne das Ereignis, daß Münze i gewählt wurde.

a) $P(K_1^o) = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} P(K_1^o \mid M_i)P(M_i) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$

b) $P(K_1^u \mid K_1^o) = \dfrac{P(K_1^u \cap K_1^o)}{P(K_1^o)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} P(K_1^u \cap K_1^o \mid M_i)P(M_i)}{\frac{3}{5}} = \dfrac{1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{3}{5}}{\frac{3}{5}}$
$= \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{2}{3}.$

c) $P(K_2^u \mid K_1^o) = \dfrac{P(K_2^u \cap K_1^o)}{P(K_1^o)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} P(K_2^u \cap K_1^o \mid M_i)P(M_i)}{\frac{3}{5}}$
$= \dfrac{1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{6}.$

d) $P(K_2^u \mid K_1^o \cap K_2^o) = \dfrac{P(K_2^u \cap K_1^o \cap K_2^o)}{P(K_1^o \cap K_2^o)} = \dfrac{P(K_2^u \cap K_2^o)}{\sum_{i=1}^{5} P(K_1^o \cap K_2^o \mid M_i)P(M_i)}$
$= \dfrac{P(M_1 \cup M_2)}{1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}} = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{10}{5} = \dfrac{4}{5}.$

Aufgabe 3

Die Anzahl der Fluggäste, die am Check-in der Fluggesellschaft A erscheinen, ist $\mathrm{Bin}(10, 9/10)$-verteilt, die Anzahl der Fluggäste, die am Check-in der Gesellschaft B erscheinen, ist $\mathrm{Bin}(20, 9/10)$-verteilt. Es sei X die Anzahl der Fluggäste, die bei Gesellschaft A erscheinen, und Y die Anzahl der Fluggäste, die bei Gesellschaft B erscheinen. Die Überbuchungswahrscheinlichkeit von Gesellschaft A ist folglich $P(X > 9)$, und die Überbuchungswahrscheinlichkleit von Gesellschaft B ist $P(Y > 18)$.
Nun gilt:

$$P(X > 9) = P(X = 10) = \binom{10}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{0} = \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \sim 0,349$$

und

$$\begin{aligned} P(Y > 18) = P(Y = 19) + P(Y = 20) &= \binom{20}{19}\left(\frac{9}{10}\right)^{19}\frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \\ &= 20\left(\frac{9}{10}\right)^{19}\frac{1}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^{20} \sim 0,392. \end{aligned}$$

Also ist Gesellschaft B mit höherer Wahrscheinlichkeit überbucht.

Aufgabe 4

Es sei X die Anzahl der Münzen, die beim ersten Wurf „Kopf“ zeigen, und Y die Anzahl der Münzen, die beim zweiten Wurf „Kopf“ zeigen. Dann gilt mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(Y = k) = \sum_{l=0}^{n} P(Y = k \mid X = l)P(X = l).$$

X ist $\mathrm{Bin}(n, p)$-verteilt, und Y ist unter der Bedingung $X = l$ $\mathrm{Bin}(l, p)$-verteilt. Folglich gilt

$$P(Y = k) = \sum_{l=0}^{n} \binom{l}{k} p^k (1-p)^{l-k} \binom{n}{l} p^l (1-p)^{n-l}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=0}^{n} \frac{l!n!(n-k)!}{k!(l-k)!l!(n-l)!(n-k)!} p^{k+l}(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}\sum_{l=k}^{n}\binom{n-k}{n-l} p^{k+l}(1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{n-l-k} p^{2k+l}(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l} p^{2k+l}(1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^{2k}(1-p)^{n-k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l} p^l 1^{n-k-l} = \binom{n}{k} p^{2k}(1-p)^{n-k}(1+p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^{2k}(1-p^2)^{n-k}. \end{aligned}$$

Folglich ist Y $\mathrm{Bin}(n, p^2)$-verteilt. Intuitiv kann man sich das so vorstellen: Man wirft alle n Münzen zweimal und zählt nur die, die zweimal „Kopf“ zeigen. Die Wahrscheinlichkeit für zweimal „Kopf“ ist aber gerade p^2.

Aufgabe 5

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(\mu)$, X, Y stochastisch unabhängig.

•Fall 1: $\lambda = \mu \overset{\text{A 31 a)}}{\Rightarrow} X + Y \sim \Gamma(2, \lambda) = \mathrm{Erl}(2, \lambda)$. Also wird durch

$$f_{X+Y}(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(z)$$

eine Dichte von $X + Y$ definiert.

•Fall 2: $\lambda \neq \mu$: Für $z \leq 0$ gilt $P(X + Y \leq z) = 0$, also $f_{X+Y}(z) = 0$. Sei nun $z > 0$:

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(z-t) dt = \int_0^z \lambda e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu(z-t)} dt \\ &= \lambda \mu e^{-\mu z} \int_0^z e^{(\mu-\lambda)t} dt = \lambda \mu e^{-\mu z} \frac{1}{\mu - \lambda} e^{(\mu-\lambda)t} \Big|_0^z \\ &= \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda} e^{-\mu z} \left(e^{(\mu-\lambda)z} - 1 \right) = \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda} \left(e^{-\lambda z} - e^{-\mu z} \right). \end{aligned}$$

Für $z \in \mathbb{R}$ ergibt sich also

$$f_{X+Y}(z) = \frac{\lambda\mu}{\mu - \lambda} \left(e^{-\lambda z} - e^{-\mu z} \right) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(z).$$