Musterlösungen zur Zusatzübung

13. Juni 2002

Aufgabe 1

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)P(A)}{P(A)P(B)} = P(B|A)\frac{P(A)}{P(B)}$$

$$P(A) > 0 \Rightarrow \quad \frac{P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B|A)}{P(B)}$$

$$P(A|B) > P(A) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P(A|B)}{P(A)} > 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P(B|A)}{P(B)} > 1 \quad \Rightarrow P(B|A) > P(B)$$

Aufgabe 2

Definiere die Ereignisse

$H \equiv$ Heilwirkung,
$N \equiv$ Nebenwirkung,
$F \equiv$ falsche Dosierung.

Gegeben sind $P(F) = 0.01$, $P(H|F^C) = 0.8$, $P(N|F^C) = 0.3$, $P(H|F) = 0.3$ und $P(N|F) = 0.8$. Gesucht wird

$$P(H|N) = \frac{P(H \cap N)}{P(N)},$$

wobei nach Aufgabenstellung $P(H|F)$ und $P(N|F)$, bzw. $P(H|F^C)$ und $P(N|F^C)$ stochastisch unabhängig sind, also $P(H \cap N|F) = P(H|F) \cdot P(N|F)$ und $P(H \cap N|F^C) = P(H|F^C) \cdot P(N|F^C)$ gilt. (Daraus folgt i. a. nicht, dass auch $P(H)$ und $P(N)$ stochastisch unabhängig sind.)

$$P(N) = P(N|F)P(F) + P(N|F^C)P(F^C) = 0.8 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.99 = 0.305$$

$$\begin{aligned} P(H \cap N) &= P(H \cap N|F)P(F) + P(H \cap N|F^C)P(F^C) \\ &= P(H|F)P(N|F)P(F) + P(H|F^C)P(N|F^C)P(F^C) \\ &= 0.3 \cdot 0.8 \cdot 0.01 + 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.99 = 0.24 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(H|N) = \frac{0.24}{0.305} = 0.79$$

Aufgabe 3

Der Gewinn im i-ten Wurf beträgt i^2 mit Wahrscheinlichkeit p. Mit $X_i \sim \text{Bin}(1,p)$ gilt für den Gesamtgewinn G_n in n Würfen

$$G_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 X_i - I_n,$$

wobei I_n den Einsatz für ein Spiel der Länge n angibt. Damit das Spiel fair ist, muss $E[G_n] = 0$ gelten.

$$\begin{aligned}
E[G_n] &= E\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 X_i - I_n\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 E[X_i] - I_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2 p - I_n \\
&= p\sum_{i=1}^{n} i^2 - I_n \\
&= p\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - I_n
\end{aligned}$$

Somit muss gelten

$$\begin{aligned}
&0 = p\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - I_n \\
&\Rightarrow I_n = p\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},
\end{aligned}$$

damit das Spiel fair ist.

Aufgabe 4

Es sei X die Anzahl der Münzen, die beim ersten Wurf „Kopf“ zeigen, und Y die Anzahl der Münzen, die beim zweiten Wurf „Kopf“ zeigen. Dann gilt mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und $P(Y = k \mid X = l) = 0$ für $l < k$

$$P(Y = k) = \sum_{l=0}^{n} P(Y = k \mid X = l)P(X = l) = \sum_{l=k}^{n} P(Y = k \mid X = l)P(X = l).$$

X ist $\mathrm{Bin}(n,p)$-verteilt, und Y ist unter der Bedingung $X=l$ $\mathrm{Bin}(l,p)$-verteilt. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{l=k}^{n}\binom{l}{k}p^k(1-p)^{l-k}\binom{n}{l}p^l(1-p)^{n-l}\\
&= \sum_{l=k}^{n}\frac{l!n!(n-k)!}{k!(l-k)!l!(n-l)!(n-k)!}p^{k+l}(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}\sum_{l=k}^{n}\binom{n-k}{n-l}p^{k+l}(1-p)^{n-k}\\
&= \binom{n}{k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{n-l-k}p^{2k+l}(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}p^{2k+l}(1-p)^{n-k}\\
&= \binom{n}{k}p^{2k}(1-p)^{n-k}\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-k}{l}p^l 1^{n-k-l} = \binom{n}{k}p^{2k}(1-p)^{n-k}(1+p)^{n-k}\\
&= \binom{n}{k}p^{2k}(1-p^2)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Folglich ist Y $\mathrm{Bin}(n,p^2)$-verteilt. Intuitiv kann man sich das so vorstellen: Man wirft alle n Münzen zweimal und zählt nur die, die zweimal „Kopf“ zeigen. Die Wahrscheinlichkeit für zweimal „Kopf“ ist aber gerade p^2.

Aufgabe 5

$$\mathbf{X} := (S_1,S_2,S_3)^t$$

Die S_1,S_2,S_3 sind s.u. jeweils $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilt

$$\Rightarrow f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2,x_3) = \lambda^3 e^{-\lambda(x_1+x_2+x_3)}\mathbb{1}_{(0,\infty)^3}(x_1,x_2,x_3)$$

Definiere $T:(\mathbb{R}^3,\mathcal{L}^3) \;\to\; (\mathbb{R}^3,\mathcal{L}^3)$,

$$\mathbf{Y} = T((x_1,x_2,x_3)^t) = (x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_1)^t$$

$$\Rightarrow T((x_1,x_2,x_3)^t) = \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}}_{=:\mathbf{A}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$\det(A) = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$, T ist injektiv auf $\mathbb{R}^3$ und stetig diffbar.

Invertieren von A liefert

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left|\det\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le 3}\right| = |\det A| = 2$$

Mit $T^{-1}(y_1,y_2,y_3) = \frac{1}{2}(y_1-y_2+y_3, y_1+y_2-y_3, -y_1+y_2+y_3)$ und dem

Transformationssatz, dessen Voraussetzungen erfüllt sind, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2, y_3) &= \frac{f_{\mathbf{X}}\left(T^{-1}(y_1, y_2, y_3)\right)}{\left|\det\left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq 3}\Big|_{T^{-1}(y_1,y_2,y_3)}\right|} \mathbb{1}_{T((0,\infty)^3)}(y_1, y_2, y_3) \\
&= \frac{1}{2} f_{\mathbf{X}}\left(A^{-1}\mathbf{Y}\right) \mathbb{1}_{(0,\infty)^3}(T^{-1}(y_1, y_2, y_3)) \\
&= \frac{\lambda^3}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}((y_1-y_2+y_3)+(y_1+y_2-y_3)+(-y_1+y_2+y_3))} \cdot \\
&\quad \mathbb{1}_{(0,\infty)^3}\left(\frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3), \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3), \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3)\right) \\
&= \frac{\lambda^3}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}(y_1+y_2+y_3)} \mathbb{1}_{(0,\infty)^3}(y_1 - y_2 + y_3, y_1 + y_2 - y_3, -y_1 + y_2 + y_3).
\end{aligned}
$$

Zu beachten ist hier die Transformation der Indikatorfunktion. Aufgrund der Grenzen $(0, \infty)$ des Indikators und der linearität der Funktionen im Indikator kann dort der Faktor $\frac{1}{2}$ herausfallen.