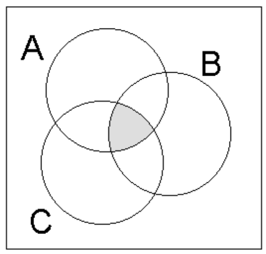
1. Übung zur Einführung in die Stochastik (Musterlösung)

Prof. Dr. H. H. Bock - Volker Schmitz - SS 1999

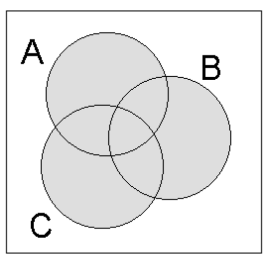
Aufgabe 1 (8 Punkte)
Gegeben seien ein Ereignisraum Ω für ein Zufallsexperiment und drei Ereignisse $A, B, C \subset \Omega$. Geben Sie mengentheoretische Ausdrücke für die folgenden Aussagen an, und zeichnen Sie jeweils ein zugehöriges Venn-Diagramm:

a) Alle drei Ereignisse A, B, C treten ein.



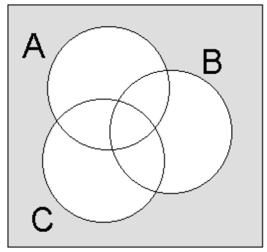
$A \cap B \cap C$

b) Mindestens eines der Ereignisse A, B, C tritt ein.



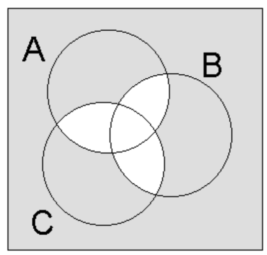
$A \cup B \cup C$

c) Keines der drei Ereignisse A, B, C tritt ein.



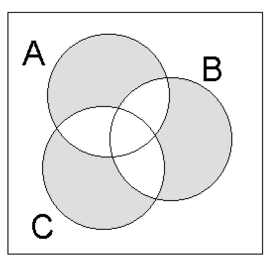
$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

d) Höchstens eines der Ereignisse A, B, C tritt ein.



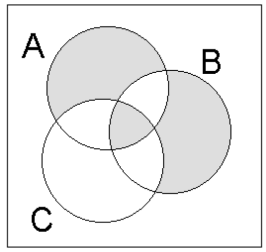
$$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$$

e) Genau eines der Ereignisse A, B, C tritt ein.



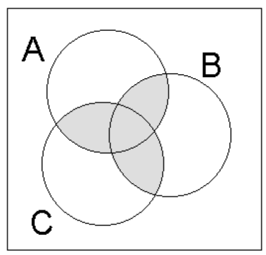
$$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B})$$
$$= (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))$$

f) Genau eines der Ereignisse $\overline{A}, \overline{B}, C$ tritt ein.



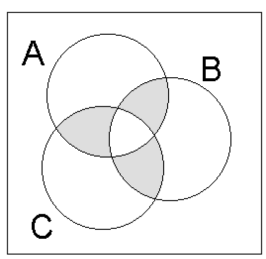
$$\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cup A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cup A \cap B \cap C$$

g) Mindestens zwei der Ereignisse A, B, C treten ein.



$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$$

h) Genau zwei der Ereignisse A, B, C treten ein.



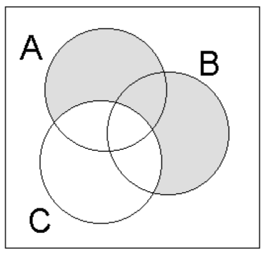
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

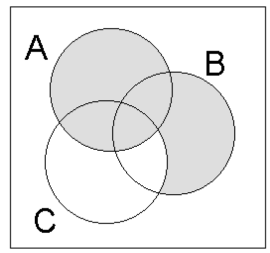
Aufgabe 2 (6 Punkte)
Seien Ω eine nichtleere Menge und $A, B, C, A_j \subset \Omega, j \in J$ ($J \neq \emptyset$ Indexmenge). Die *Differenzmenge* $A \setminus B$ ist definiert durch

$$A \setminus B := A \cap \overline{B}.$$

a) Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

(i) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$





Die Behauptung ist also falsch.

Gegenbeispiel:
$A = \{1, 2\}, B = \{3\}, C = \{2\}$
Dann ist $(A \cup B) \setminus C = \{1, 3\}$, aber $A \cup (B \setminus C) = \{1, 2, 3\}$

Bemerkung:
Man sieht (vgl. auch Diagramme), daß die Behauptung richtig ist, falls $A \cap C = \emptyset$. Denn:

$$(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap \overline{C} = \underbrace{(A \cap \overline{A})}_{=A} \cup (B \cap \overline{C}) = A \cap (B \setminus C)$$

(ii) $A \cup B \cup C = A \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (A \cap B))$

Wir zeigen zunächst eine Hilfsbehauptung.
Es gilt: $B \setminus (A \cap B) = B \setminus A$, denn:

$$B \setminus (A \cap B) = B \cap \overline{A \cap B} = B \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (B \cap \overline{A}) \cup \underbrace{(B \cap \overline{B})}_{=\emptyset} = B \setminus A$$

Nun zum Beweis von (ii).

Es ist oft sinnvoll, mit dem komplizierteren Ausdruck zu beginnen. Mit der Hilfsbehauptung ist dann:

$$A \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (A \cap B)) = A \cup (B \setminus A) \cap (C \setminus (A \cup B))$$

$$= A \cup (B \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{(A \cap B)}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \cup (C \cap (\overline{A} \cup \overline{B}))$$

$$= A \cup B \cup (C \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{B}) = (A \cup B \cup C) \cap \underbrace{(A \cup B \cup \overline{A})}_{=\Omega = A \cup \overline{A}} \cup (C \cap \overline{B})$$

$$= A \cup B \cup C \cup (C \cap \overline{B}) = (A \cup B \cup C) \cap \underbrace{(A \cup B \cup C \cup \overline{B})}_{=\Omega = B \cup \overline{B}} = A \cup B \cup C$$

(iii) $\overline{A \cup B} \cap C = C \setminus (C \cap (A \cup B))$

Mit der Hilfsbehauptung aus (ii) folgt direkt:

$$\overline{A \cup B} \cap C = C \setminus (A \cup B) = C \setminus (C \cap (A \cup B))$$

(iv) $\overline{A \cap B} \cap C = (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C)$

Durch Anwenden der *Regeln von de Morgan* erhalten wir:

$$\overline{A \cap B} \cap C = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap C = (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C)$$

b) Zeigen Sie die *Regeln von de Morgan*:

(i)

$$\overline{\bigcup_{j \in J} A_j} = \bigcap_{j \in J} \overline{A_j}$$

Bemerkung:
Allgemein kann man die Gleichheit zweier Mengen A und B dadurch zeigen, daß man für ein $x \in A$ zeigt, daß dann auch $x \in B$ gilt und umgekehrt für ein $x \in B$ folgt, daß $x \in A$.

Sei $\omega \in \overline{\bigcup_{j\in J} A_j} \Leftrightarrow \omega \notin \bigcup_{j\in J} A_j$
$\Leftrightarrow \omega \notin A_j$ für alle $j \in J \Leftrightarrow \omega \in \overline{A_j}$ für alle $j \in J$
$\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{j\in J} \overline{A_j}$

(ii)

$$\overline{\bigcap_{j\in J} A_j} = \bigcup_{j\in J} \overline{A_j}$$

Setzt man in (i) $A_j = \overline{A_j}$ ein, so folgt wegen $\overline{\overline{A}} = A$:

$\bigcup_{j\in J} \overline{A_j} = \overline{\overline{\bigcup_{j\in J} \overline{A_j}}} = \overline{\bigcap_{j\in J} \overline{\overline{A_j}}} = \overline{\bigcap_{j\in J} A_j}$

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Sei $A \subset \Omega$. Dann ist die *Indikatorfunktion* $\mathbb{I}_A : \Omega \to \{0,1\}$ *von* A definiert durch

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

Zeigen Sie für $A, A_1, A_2, ..., A_n, B \in \Omega, n \in \mathbb{N}$, die folgenden Aussagen:

a) $\mathbb{I}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{I}_A$

$$\mathbb{I}_{\overline{A}}(\omega) = \begin{cases} 0, \omega \notin \overline{A} \\ 1, \omega \in \overline{A} \end{cases} = \begin{cases} 0, \omega \in A \\ 1, \omega \notin A \end{cases} = 1 - \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases}$$

b) $\mathbb{I}_{A\cap B} = \mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B$

1. Fall: $\omega \in A \cap B \Rightarrow \omega \in A$ und $\omega \in B$, also $\mathbb{I}_{A\cap B}(\omega) = 1$ und $\mathbb{I}_A(\omega) \cdot \mathbb{I}_B(\omega) = 1 \cdot 1 = 1$

2. Fall: $\omega \notin A\cap B \Rightarrow \omega \in \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, also $\mathbb{I}_{A\cap B}(\omega) = 0, \mathbb{I}_A(\omega) \cdot \mathbb{I}_B(\omega) = 0$, da $\omega \notin A$ oder $\omega \notin B$

c) ${\mathbb{1}_A}^2 = \mathbb{1}_A$

$$
{\mathbb{1}_A}^2(\omega) = \begin{cases} 1^2, \omega \in A \\ 0^2, \omega \notin A \end{cases} = \mathbb{1}_A(\omega), \omega \in \Omega
$$

d) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$

Ist $\omega \in A$, so auch $\omega \in B \Rightarrow \mathbb{1}_A(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega) = 1$

Ist $\omega \notin A$, so ist $\mathbb{1}_A(\omega) \leq \mathbb{1}_B(\omega)$ nach Def., da $\mathbb{1}_B \geq 0$

Sei umgekehrt $\omega \in A$ und $\mathbb{1}_A(\omega) = 1 \leq \mathbb{1}_B(\omega) = 1 \Rightarrow \omega \in B \Rightarrow A \subseteq B$

e) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$

Sei $\omega \in A \cup B \Rightarrow \omega \in A \setminus B$ oder $\omega \in B \setminus A$, da $A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow \mathbb{1}_A(\omega) = 1$ oder $\mathbb{1}_B(\omega) = 1 \Rightarrow \mathbb{1}_{A \cup B}(\omega) = 1 = \mathbb{1}_A(\omega) + \mathbb{1}_B(\omega)$

Ist $\omega \notin A \cup B$, ist also $\omega \in \overline{A} \cap \overline{B}$, d.h. $\mathbb{1}_A(\omega) = \mathbb{1}_B(\omega) = \mathbb{1}_{A \cup B}(\omega) = 0$

Nehmen wir umgekehrt an, $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow$ es gibt ein $\omega_0 \in A \cap B$, insbesondere $\omega_0 \in A \cup B$.
Dann wäre also $\mathbb{1}_{A \cup B}(\omega_0) = 1 \neq \mathbb{1}_A(\omega_0) + \mathbb{1}_B(\omega_0) = 1 + 1 = 2$,
im Widerspruch zur Voraussetzung folgt $A \cap B = \emptyset$

f) $\mathbb{1}_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$ (vgl. Serienschaltung)

Zum Beweis führen wir eine Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ durch.

Für $n = 1$ ist die Aussage trivialerweise erfüllt. Den Fall $n = 2$ haben wir in Teil b) behandelt.

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$
Dann ergibt sich für $n \to n + 1$:
$\mathbb{1}_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1}} = \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} \cdot \mathbb{1}_{A_{n+1}}$
$= \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathbb{1}_{A_{n+1}} = \prod_{i=1}^{n+1} \mathbb{1}_{A_i} \Rightarrow$ Behauptung

g) $\mathbb{1}_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbb{1}_{A_i})$ (vgl. Parallelschaltung)

Zum Beweis ziehen wir die Aufgabenteile a) und b) bzw. f) heran.

$\mathbb{1}_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)}} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}}$
$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\overline{A_i}} = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbb{1}_{A_i})$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Nehmen wir an, an einer Universität würden alle Studienbewerber einem Eignungstest unterzogen, sie würden jedoch alle zugelassen. Erfahrungswerte zeigen, daß 30% der Studierenden nicht das Studienziel erreichen, darunter 68% mit negativem Testergebnis. Von den Studierenden, die das Studienziel erreichen, hatten nur 18% ein negatives Testergebnis. Welcher Anteil der Studierenden mit negativem Testergebnis erreicht das Studienziel nicht? Welcher Anteil der Studierenden mit positivem Testergebnis erreicht es?

Sei A : ,,Studienziel erreicht", $\overline{A}$: ,,Studienziel nicht erreicht",
B : ,,Eingangstest positiv", $\overline{B}$: ,,Eingangstest negativ".
Genauer:
Ω : Menge aller Studierenden, $A, B \subseteq \Omega$, also z.B. A : ,,Menge aller Studierenden, die das Studienziel erreichen"

Bezeichne $H : \wp ot(\Omega) \to [0,1], H(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, die relative Häufigkeit der Ereignisse, so gilt:

$$H(\Omega) = 1, H(\overline{A}) = 0.3 \Rightarrow H(A) = 0.7$$
$$H(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.3 \cdot 0.68 = 0.204$$

Damit haben wir $H(\overline{A} \cap \overline{B})$ berechnet. Bestimmen wir nun $H(A \cap B)$:

$$H(A \cap \overline{B}) = 0.7 \cdot 0.18 = 0.126$$

Dann gilt:

$H(A) = H(A \cap B) + H(A \cap \overline{B}) \Leftrightarrow 0.7 = H(A \cap B) + 0.126 \Leftrightarrow H(A \cap B) = 0.574$

Betrachten wir dazu auch die folgende Abbildung:

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	0.574	0.096	0.67
$\overline{B}$	0.126	0.204	0.33
$\sum$	0.7	0.3	1.0

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Es werde ein Würfel zweimal hintereinander geworfen. Ist die Summe der beiden gewürfelten Augenzahlen größer als 10, so wird ein drittes Mal gewürfelt und das Ergebnis notiert.

a) Geben Sie einen Ergebnisraum Ω dieses Experiments an.
Die Menge der möglichen Würfelergebnisse ist gegeben mit

$$\Omega_1 = \{1, ..., 6\}$$

Die Summe der Augenzahlen ≤ 10 nach zwei Würfen wird beschrieben von

$$\Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \in {\Omega_1}^2 = \Omega_1 \times \Omega_1 | \omega_1 + \omega_2 \leq 10\}$$

Dann ist der dritte Wurf festgelegt durch

$$\Omega_3 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in {\Omega_1}^3 | \omega_1 + \omega_2 > 10\}$$

Der Ergebnisraum ist dann $\Omega = \Omega_2 \cup \Omega_3$

b) Schreiben Sie zu diesem Experiment formal das zur Aussage ,,die Summe der Augenzahlen ist größer als 15“ gehörige Ereignis als Teilmenge A von Ω auf.

Wir halten zunächst fest, daß

$$A \cap \Omega_2 = \emptyset \tag{1}$$

Dann folgt:

$A \cap \Omega_3 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in {\Omega_1}^3 | \sum_{i=1}^{3} \omega_i > 15, \omega_1 + \omega_2 > 10\}$
$= \{(6,5,5),(6,5,6),(5,6,5),(5,6,6),(6,6,4),(6,6,5),(6,6,6)\}$
$= A \cap \Omega$ wegen (1)

c) Berechnen Sie $P(A)$.

Es handelt sich bei $({\Omega_1}^3, P)$ mit $P(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ um einen *Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsraum*, so daß

$$P(A) = \frac{|A|}{|{\Omega_1}^3|} = \frac{7}{216} \approx 0.032$$

2. Übung zur Einführung in die Stochastik (Musterlösung)

Prof. Dr. H. H. Bock - Volker Schmitz - SS 1999

Aufgabe 6 (4 Punkte)

a) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$.
Zeigen Sie:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} P(A_i \cap A_j) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Fasse $(A_1 \cup A_2)$ zunächst als eine Menge auf, wende bekannte Regeln an:
$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3)$
$= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3))$
$= \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

b) An drei Personen wurden jeweils ein Brief und der zugehörige Umschlag geschrieben. Eine Aushilfskraft steckt die Briefe zufällig in die Umschläge, ohne auf die Adresse zu achten.

(i) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Zufallsexperiment an.

Sei $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) | \omega_i \in \{1, 2, 3\}, \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3\}$
Ω beschreibt also die Menge der 3-Permutationen ohne Wiederholungen.
Für die Ereignismenge $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A} = \wp ot(\Omega)$
$P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ sei die *Laplace-Verteilung*, d.h. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \forall A \in \mathcal{A}$
Insbesondere ist $|\Omega| = 3! = 6$ ($= P(3, 3)$ nach Vorlesung)

Interpretation: $\omega_i = k$: „Person i erhält Brief k"
Damit ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein geeigneter Wahrscheinlichkeitsraum.

(ii) Berechnen Sie mit Teil a) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens ein Brief in den zugehörigen Umschlag gelangt.

A_j sei das Ereignis „Person j erhält Brief j", $1 \leq j \leq 3$, also:

$$A_j = \{\omega \in \Omega | \omega_j = j\}, 1 \leq j \leq 3$$

Dann ist $A := A_1 \cup A_2 \cup A_3$ das gesuchte Ereignis.
Für die Anwendung der Formel aus Teil a) benötigen wir folgende Wahrscheinlichkeiten:

1) $P(A_1) = P(\{(1,2,3),(1,3,2)\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (analog für $A_2, A_3 : P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$)
2) $P(A_1 \cap A_2) = P(\{(1,2,3)\}) = \frac{1}{6}$ (analog für die anderen Schnitte, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ folgt zwangsläufig, denn sind zwei Briefe richtig adressiert, ist es der dritte natürlich auch)

Mit a) gilt dann:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{N}_0, \wp ot(\mathbb{N}_0), P)$ mit der Zähldichte

$$p_n := P(\{n\}) := c \cdot (1-p)^n, n \in \mathbb{N}_0,$$

mit Parameter $p \in (0,1)$.

a) Bestimmen Sie die Konstante c.

Wegen $\Omega = \mathbb{N}_0, P(\Omega) = 1$ muß gelten:

$$1 = P(\Omega) = \underbrace{P(\sum_{i=0}^{\infty}\{i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} P(\{i\})}_{\text{vgl. Analysis}} = c \cdot \sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i$$

Da $p \in (0,1)$ gilt dann weiter:

$$c \cdot \sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i = c \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{c}{p}$$

$1 = \frac{c}{p}$ ist also genau dann erfüllt, wenn $c = p$.
Insbesondere ist dann $P_n = p \cdot (1-p)^n > 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

(i) $A_1 = \{0, 1, ..., k\}, k \in \mathbb{N}$

$P(A_1) = P(\{0,1,...,k\}) = \sum_{i=0}^{k} P(\{i\}) = \sum_{i=0}^{k} p_i$
$= \sum i = 0^k p \cdot (1-p)^i = p \cdot \frac{1-(1-p)^{k+1}}{1-(1-p)} = 1 - (1-p)^{k+1}$

(ii) $A_2 = \{m \in I\!N_0 | m \bmod n = 0\}, n \in I\!N$

folgt aus (iii) für $r = 0 (r \in I\!N_0!) : P(A_2) = \frac{p}{1-(1-p)^n}$

(iii) $A_3 = \{m \in I\!N_0 | m \bmod n = r\}, r \in I\!N_0, n \in I\!N, r < n$

$A_3 = \{m \in I\!N_0 | m \bmod n = r\} = \{m \in I\!N_0 | m = j \cdot n + r, j \in I\!N_0\}$
$= \{r, r+n, r+2n, ...\}$

$$P(A_3) = \sum_{j=0}^{\infty} P(\{r + j \cdot n\}) = \sum_{j=0}^{\infty} p \cdot (1-p)^{r+j \cdot n}$$

Unser Ziel ist es, die geometrische Reihe zu bestimmen. Dazu:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p \cdot (1-p)^{r+j \cdot n} = p \cdot (1-p)^r \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^{j \cdot n} = p \cdot (1-p)^r \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (\underbrace{(1-p)^n}_{\in (0,1)})^j$$

$$= p \cdot (1-p)^r \cdot \frac{1}{1-(1-p)^n}$$

Für $r = 0$ ergibt sich also genau (ii).

Hinweis: Sind $a, b \in I\!N, r \in I\!N_0$, so heißt „$a \bmod b = r$“, daß es ein $z \in \mathbb{Z}$ gibt mit $a = z \cdot b + r$.

Aufgabe 8 (5 Punkte)
Für zwei Mengen $A, B \subseteq \Omega$ definiert man durch

$$A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

die „symmetrische Differenz von A und B“.

a) Zeigen Sie für $A, B, C \subseteq \Omega$:

(i) $A \triangle B = B \triangle A$

Gilt aufgrund der Kommutativität der Vereinigung:

$$A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (B \backslash A) \cup (A \backslash B) = B \triangle A$$

(ii) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$

$$\begin{aligned}
& (A\triangle B)\triangle C \\
= \;& (B\backslash A \cup A\backslash B)\triangle C \\
= \;& ((B\cap\overline{A})\cup(A\cap\bar{(}B))\triangle C \\
= \;& ((B\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\cap C)\cup(C\cap(\overline{(B\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})})) \\
= \;& (B\cap\overline{A}\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(C\cap((\overline{B}\cup A)\cap(\overline{A}\cup B))) \\
= \;& (B\cap\overline{A}\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(C\cap((\overline{B}\cap\overline{A})\cup(A\cap B))) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ab hier rechnet man geschickterweise vom erwarteten Ergebnis sozusagen rückwärts bis zu dieser Stelle. Mit (1) kann außerdem Aufgabenteil b) abgekürzt werden.

$$\begin{aligned}
= \;& (\overline{A}\cap((B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B})))\cup A\cap((B\cap C)\cup(\overline{B}\cap\overline{C})) \\
= \;& \overline{A}\cap(B\triangle C)\cup A\cap(\overline{(\overline{B}\cup\overline{C})\cap(B\cup C)}) \\
= \;& \overline{A}\cap(B\triangle C)\cup A\cap(\underbrace{\overline{(\overline{B}\cap C)\cup(B\cap\overline{C})}}_{B\triangle C}) \\
= \;& A\triangle(B\triangle C)
\end{aligned}$$

(iii) $A\triangle B = \overline{A}\triangle\overline{B}$

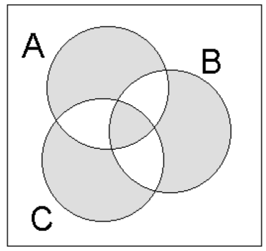
$$\begin{aligned}
\overline{A}\triangle\overline{B} &= (\overline{A}\backslash\overline{B})\cup(\overline{B}\backslash\overline{A}) = (\overline{A}\cap\overline{\overline{B}})\cup(\overline{B}\cap\overline{\overline{A}}) \\
&= (\overline{A}\cap B)\cup(\overline{B}\cap A) = A\triangle B
\end{aligned}$$

b) Bedeutet $A\triangle B\triangle C := (A\triangle B)\triangle C$, daß genau eines der Ereignisse A, B, C eintritt?

Nach (1) gilt:

$$A\triangle B\triangle C = (B\cap\overline{A}\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B}\cap\overline{A})\cup(C\cap A\cap B),$$

sodaß also $A\triangle B\triangle C$ bedeutet, daß genau eines der drei Ereignisse A, B, C eintritt *oder alle drei zusammen.*



Aufgabe 9 (5 Punkte)
Gegeben seien ein Parallelrechner mit fünf Prozessoren und drei verschiedene Jobs.

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Jobs auf die fünf Prozessoren zu verteilen, wenn jedem Prozessor höchstens ein Job zugeteilt werden darf und

(i) die Jobs (z.B. durch Jobtitel oder Prozeßnummern) unterschieden werden, oder

(ii) die Jobs als nicht unterscheidbar angesehen werden?

(i) $\Omega_1 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) | \omega_i \in \{1, ..., 5\}, \omega_i \neq \omega_j, i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3\}$
Interpretation: $\omega_i = k$: Prozeß i wird Prozessor k zugewiesen
$\mathcal{A}_1 = \wp ot(\Omega_1)$
Ω_1 ist also die Menge der 3-Permutationen aus 5 Elementen *ohne* Wiederholungen, also $|\Omega_1| = P(5,3) = (5)_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
Hier gibt es also 60 Möglichkeiten, die Jobs auf die Prozessoren zu verteilen.

(ii) $\Omega_2 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} | \omega_i \in \{1, ..., 5\}, \omega_i \neq \omega_j, i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3\}$
Interpretation: $\omega_i = k$: Prozessor k wird benutzt, d.h. $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ entspricht den benutzten Prozessoren.
$\mathcal{A}_2 = \wp ot(\Omega_2)$
Ω_2 ist also die Menge der 3-Kombinationen aus 5 Dingen *ohne* Wiederholungen, also $|\Omega_2| = C(5,2) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$
Hier gibt es also 10 Möglichkeiten, die Jobs auf die Prozessoren zu verteilen. Dieses Ergebnis war zu erwarten: 3 Elemente lassen sich auf genau $3! = 6$ verschiedene Weisen permutieren. Da wir hier jedoch Permutationen nicht unterscheiden, erhalten wir $60 : 6 = 10$ Möglichkeiten.

b) Wieviele Möglichkeiten gibt es bei (i) bzw. (ii) dafür, daß die ersten drei

Prozessoren bei der obigen Zuteilung insgesamt zwei Jobs und die restlichen beiden einen Job erhalten?

Sei $A \hat{=}$,,die ersten 3 Prozessoren erhalten 2 Jobs, die letzten beiden insgesamt einen".
Für Fall (i):

$$\begin{aligned} A &= \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega_1 | |\{\omega_i | \omega_i \in \{1,2,3\}\}| = 2 \text{und} |\{\omega_i | \omega_i \in \{4,5\}\}| = 1\} \\ &= \{(1,2,4),(1,4,2),(2,4,1),(2,1,4),(4,1,2),(4,2,1), \\ &\quad (1,2,5),(1,5,2),... \\ &\quad (1,3,4),... \\ &\quad (1,3,5),... \\ &\quad (2,3,4),... \\ &\quad \underbrace{(2,3,5)}_{\text{tritt ein}}, \underbrace{(2,5,3),(3,5,2),(3,2,5),(5,2,3),(5,3,2)}_{\text{alle Permutationen davon}}\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow |A| = 6 \cdot 6 = 36$

Zu (ii):

$$\begin{aligned} A &= \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \in \Omega_2 | |\{\omega_i | \omega_i \in \{1,2,3\}\}| = 2und |\{\omega_i | \omega_i \in \{4,5\}\}| = 1\} \\ &= \{\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{2,3,4\},\{2,3,5\}\} \end{aligned}$$

Das sind genau die Elemente aus (i), nur ohne deren Permutationen.
$\Rightarrow |A| = 6$

c) Bestimmen Sie (unter (i) bzw. (ii)) die Wahrscheinlichkeit, daß das in b) beschriebene Ereignis bei einer ,,zufälligen Verteilung der Jobs" (Laplace-Modell) auftritt.

Bei zugrundeliegendem Laplace-Modell ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten zu:

(i) $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega_1|} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5} = 0,6$

(ii) $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega_2|} = \frac{6}{10} = 0,6$

Anmerkung: Welches der beiden Modelle (i) oder (ii) erscheint Ihnen das ,,realistischere"?

Dazu nur: Beide Modelle kommen vor, je nach Anwendungszweck.

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Der Glücksspieler und Schriftsteller Chevalier de Méré (1607–1684) wunderte sich einmal, daß beim Werfen von drei (unverfälschten) Würfeln die Augensumme 11 häufiger auftrat als die Augensumme 12, obwohl doch 11 durch die Kombinationen 6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3 und 4-4-3 und die Augensumme 12 durch genau ebensoviele Kombinationen (welche?) erzeugt wird.
Steckt in der Argumentation de Mérés ein logischer Fehler, und war das Ergebnis seiner Beobachtung von vornherein zu erwarten, oder hat er nur „zufällig" beim Würfeln ein ungewöhnliches Ergebnis erhalten?

Seien $\Omega = \{1, ..., 6\}^3 = \{1, ..., 6\} \times \{1, ..., 6\} \times \{1, ..., 6\}$ der Ereignisraum, $\wp ot(\Omega) = \mathcal{A}$ und P die Laplace-Verteilung auf Ω. Dann ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein geeigneter Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Experiment ($|\Omega| = 6^3 = 216$).

Sei $A_{11} \hat{=}$ „Augensumme = 11", $A_{12} \hat{=}$ „Augensumme = 12"

Dann gilt:

$$\begin{aligned} A_{11} = \{ & (6,4,1),(6,1,4),(4,6,1),(4,1,6),(1,6,4),(1,4,6), \\ & (6,3,2),(6,2,3),...,(3,2,6), \\ & (5,5,1),(5,1,5),(1,5,5), \\ & (5,4,2),(5,2,4),...,(4,2,5), \\ & (5,3,3),(3,5,3),(3,3,5), \\ & (4,4,3),(4,3,4),(3,4,4)\} \end{aligned}$$

Man beachte, daß $(5,5,1), (5,3,3)$ und $(4,4,3)$ nur jeweils drei Permutationen besitzen.

$\Rightarrow |A_{11}| = 27$

Für A_{12} erhält man jedoch:

$$\begin{aligned} A_{12} = \{ & (6,5,1),(6,1,5),(5,6,1),(5,1,6),(1,6,5),(1,5,6), \\ & (6,4,2),...,(2,4,6), \\ & (6,3,3),(3,6,3),(3,3,6), \end{aligned}$$

$$(5,4,3),...,(3,4,5),$$
$$(4,4,4)\}$$

Wegen $(4,4,4)$ erhält man für A_{12} also zwei Permutationen weniger als für A_{11}.

$\Rightarrow |A_{12}| = |A_{11}| - 2 = 25$

$$\Rightarrow P(A_{11}) = \frac{27}{216} \approx 0,125, P(A_{12}) = \frac{25}{216} \approx 0,1157$$

Die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme 11 zu erzielen, ist also um ca. 1% größer als die, die Augensumme 12 zu würfeln.

3. Übung zur Einführung in die Stochastik (Musterlösung)

Prof. Dr. H. H. Bock - Volker Schmitz - SS 1999

Aufgabe 11 (8 Punkte)
In einer Urne befinden sich $n \in I\!N$ Kugeln mit den Nummern $1, ..., n$. Davon werden m Kugeln zufällig

(i) mit Zurücklegen ($m \in I\!N$) bzw.

(ii) ohne Zurücklegen ($m \leq n$)

gezogen.

a) Geben Sie für diese beiden Zufallsexperimente geeignete Wahrscheinlichkeitsräume an.

Modell (i):
$\Omega_{(i)} = \{1, ..., n\}^m$
$\mathcal{A}_{(i)} = \wp ot(\Omega_{(i)})$
$P_{(i)}$: Laplace-Verteilung auf $\Omega_{(i)}, |\Omega_{(i)}| = m$

Modell (ii):
$\Omega_{(ii)} = \{(\omega_1, ..., \omega_m) | \omega_i \in \{1, ..., n\}, \omega_i \neq \omega_j$ für $i \neq j, 1 \leq i, j \leq m\}$
$\mathcal{A}_{(ii)} = \wp ot(\Omega_{(ii)})$
$P_{(ii)}$: Laplace-Verteilung auf $\Omega_{(ii)}, |\Omega_{(ii)}| = \frac{n!}{(n-m)!} = (n)_m$

b) Zeigen Sie:
Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die größte gezogene Nummer den Wert k besitzt ($1 \leq k \leq n$), beträgt

- im Modell (i): $\frac{k^m - (k-1)^m}{n^m}$,
- im Modell (ii): $\frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}$.

Strategie: Wie läßt sich das gesuchte Ereignis am einfachsten aus anderen „zusammenbauen"?

Seien dazu:
$A_k \mathrel{\hat{=}}$ „größte gezogene Nummer ist $\leq k$", $1 \leq k \leq n$

$B_k \hat{=}$ „größte gezogene Nummer ist $= k$“, $1 \leq k \leq n$

Dann gilt (in beiden Modellen):
$B_k = A_k \backslash A_{k-1}, 1 \leq k \leq n$ (mit $A_0 = \emptyset$)

Modell (i):

$$\begin{aligned} A_k &= \{\omega \in \Omega_{(i)} | \omega_j \leq k, 1 \leq k \leq m\} \\ &= \{1, ..., k\}^m, 1 \leq k \leq m \\ &\Rightarrow |A_k| = k^m \\ &\Rightarrow P(B_k) = P(A_k \backslash A_{k-1}) = P(A_k) - P(A_{k-1}) \\ &= \frac{k^m}{n^m} - \frac{(k-1)^m}{n^m} = \frac{k^m - (k-1)^m}{n^m} \end{aligned}$$

(gilt auch für $k = 1$, da $P(\emptyset) = 0$)

Modell (ii):

$$\begin{aligned} A_k &= \{\omega \in \Omega_{(ii)} | \omega_j \leq k, 1 \leq j \leq m\} \\ &= \{\omega \in \Omega_{(ii)} | \omega_j \in \{1, ..., k\}, \omega_i \neq \omega_j, i \neq j, 1 \leq i, j \leq m\} \end{aligned}$$

1. Fall: $k \leq m$
Dann ist $A_k = \emptyset \Rightarrow P(A_k) = 0$ (es werden ja *mehr* als k Kugeln gezogen)

2. Fall: $k = m$
$A_k = A_m = \{\omega \in \Omega_{(ii)} | \omega_j \in \{1, ..., m\}, \omega_i \neq \omega_j, i \neq j, 1 \leq i, j \leq m\}$
Daher ist $|A_k| = |A_m| = \frac{m!}{(m-m)!} = m! = (m)_m$
Somit ist $P(B_k) = P(A_k) - \underbrace{P(A_{k-1})}_{=0} = \frac{|A_k|}{|\Omega_{(ii)}|} = \frac{m!}{(n)_m} = \frac{1}{\binom{n}{m}}$
Wegen $k = m$ folgt dann die Gleichheit von $\frac{1}{\binom{n}{m}} = \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}$

3. Fall: $k > m$

$$\begin{aligned} A_k &= \{\omega \in \Omega_{(ii)} | \omega_j \in \{1, ..., k\}, \omega_i \neq \omega_j, 1 \leq i, j \leq m\} \\ &\Rightarrow |A_k| = (k)_m = \frac{k!}{(k-m)!} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad P(B_k) = P(A_k) - P(A_{k-1}) = \frac{(k)_m}{(n)_m} - \frac{(k-1)_m}{(n)_m}$$

$$= \quad \frac{\binom{k}{m} - \binom{k-1}{m}}{\binom{n}{m}} = \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}$$

Man beachte, daß im letzten Umformungsschritt die *Regel von Pascal* angewandt wurde: $\binom{k-1}{m} + \binom{k-1}{m-1} = \binom{k}{m}$

Insgesamt erhält man also mit der Setzung $\binom{r}{s} = 0, r < s, r, s \in I\!N$

$$P(B_k) = \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}, \text{ für } 1 \leq k \leq n$$

$$\text{Speziell für } k = n : P(B_n) = \frac{\binom{n-1}{m-1}}{\binom{n}{m}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}}{\frac{n!}{m!(n-m)!}} = \frac{m}{n}$$

Aufgabe 12 (4 Punkte)

a) Gegeben sei eine Menge Ω mit $m := |\Omega| \in I\!N$ und Zahlen $k \in I\!N, m_1, ..., m_k \in I\!N_0$ mit $\sum_{i=1}^k m_i = m$. Zeigen Sie:
Die Anzahl der k-Tupel von disjunkten Mengen $(A_1, ..., A_k)$ mit $|A_i| = m_i, A_i \subseteq \Omega, 1 \leq i \leq k$, ist gegeben durch

$$\binom{m}{m_1, ..., m_k} := \frac{m!}{m_1! \cdot ... \cdot m_k!}$$

Bem.: $\binom{m}{m_1,...,m_k}$ heißt *Poly- oder Multinomialkoeffizient.*

$$\text{Sei } M = \{(A_1, ..., A_k) | \underbrace{|A_i| = m_i, \sum_{i=1}^{k} m_i = m = |\Omega|, A_i \subseteq \Omega\}}_{\text{hieraus folgt } \Omega = \sum_{i=1}^k A_i}$$

gesucht: $|M|$

$$\begin{aligned} M = \{(A_1, ..., A_k) | \, & A_1 \subseteq \Omega, |A_1| = m_1, A_2 \subseteq (\Omega \backslash A_1), |A_2| = m_2, ..., \\ & A_k = (\Omega \backslash \{A_1 + A_2 + ... + A_{k-1}\}), |A_k| = m_k\} \end{aligned}$$

Auswahl der Menge $A_i \hat{=}$ ungeordneter Stichprobe vom Umfang m_i ohne Wiederholung aus $\Omega \backslash (A_1 + ... + A_{i-1}), 1 \leq i \leq k, A_0 := \emptyset, m_0 = 0$
Es ist (A_i disjunkt): $|\Omega \backslash (A_1 + ... + A_{i-1})| = |\Omega| = \sum_{j=0}^{i-1} |A_j| = m - \sum_{j=0}^{i-1} m_j$,
daher gibt es $\binom{m - \sum_{j=0}^{i-1} m_j}{m_i}$ Möglichkeiten, A_i zu wählen $(i = 1, ..., k)$

(m_i-Kombination aus $m - \sum_{j=0}^{i-1} m_j$ Elementen)

$$\begin{aligned} \Rightarrow |M| &= \binom{m}{m_1} \cdot \binom{m-m_1}{m_2} \cdot \ldots \cdot \binom{m - \sum_{i=0}^{k-1} m_i}{m_k} \\ &= \frac{m!}{m_1!(m-m_1)!} \cdot \frac{(m-m_1)!}{m_2!(m-m_1-m_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(m - \sum_{i=0}^{k-1} m_i)!}{m_k! \underbrace{(m - \sum_{i=0}^{k} m_i)!}_{=0!=1}} \\ &= \frac{m!}{m_1! m_2! \ldots m_k!} =: \binom{m}{m_1, m_2, \ldots, m_k} \end{aligned}$$

b) Bei der Einteilung in Übungsgruppen müssen 69 Studenten auf vier Übungsgruppen (A, B, C und D) mit 24, 16, 15 und 14 freien Plätzen aufgeteilt werden. Auf wieviele verschiedene Arten ist dies möglich?

$m = 69, m_1 = 24, m_2 = 16, m_3 = 15, m_4 = 14$, also gibt es für die Einteilung

$$\binom{69}{24, 16, 15, 14} = \frac{69!}{24!16!15!14!} = 1,1563 \cdot 10^{38} \text{ Möglichkeiten}$$

In der Praxis werden die Ergebnisse solcher Rechnungen wegen des hohen Aufwandes meist approximativ mittels *Stirling-Formel* bestimmt.

Aufgabe 13 (5 Punkte)
Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln ($r, s \in I\!N$) wird nacheinander je eine Kugel zufällig gezogen (Laplace-Experiment). Die gezogene Kugel wird nach jedem Zug zurückgelegt. Sei $k \in I\!N$ fest gewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, im m-ten Zug die k-te rote Kugel zu ziehen.

Die Kugeln seien in der folgenden Weise nummeriert:

- rote Kugeln: $1, \ldots, r$
- schwarze Kugeln: $r+1, \ldots, r+s$

Seien $\Omega = \{1, \ldots, r+s\}^m, \mathcal{A} = \wp ot(\Omega), P$: Laplace-Verteilung auf $\Omega, A_k \;\hat{=}$ „k-te rote Kugel im m-ten Zug“.

$\boxed{k > m}$
$\Rightarrow A_k = \emptyset$, d.h. $P(A_k) = 0$ (zu wenig Züge durchgeführt)

$\boxed{1 \leq k \leq m}$

$$A_k = \Big\{\omega \in \Omega | \underbrace{\omega_m \in \{1, ..., r\}}_{\substack{\text{rote Kugel} \\ \text{im } m\text{-ten Zug}}}, \underbrace{\exists 1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_{k-1} \leq m-1 : \omega_j \in \{1, ..., r\}}_{k-1 \text{ rote Kugeln vorher}},$$

$$i = 1, ..., k-1, \underbrace{\omega_j \in \{r+1, ..., r+s\}, j \in \{1, ..., m\} \backslash \{j_1, ..., j_{k-1}, m\}}_{m-k \text{ schwarze Kugeln}}\Big\}$$

$$= \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, m-1\} \\ |J| = k-1}} \Big\{\omega \in \Omega | \omega_j \in \{1, ..., r\}, j \in J \cup \{m\}, \omega_j \in \{r+1, ..., r+s\}, j \in \{1, ..., m-1\} \backslash J\Big\}$$

$$=: \sum_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, m-1\} \\ |J| = k-1}} B_j$$

Es ist $|B_j| = \underbrace{r^{k-1+1}}_{\substack{k-1+1 \\ \text{rote Kugeln}}} \cdot \underbrace{s^{m-k}}_{\substack{m-k \\ \text{schwarze Kugeln}}}$

Weiter gibt es $\binom{m-1}{k-1}$ Möglichkeiten, eine Menge der Mächtigkeit $k-1$ aus einer Menge der Mächtigkeit $m-1$ auszuwählen.

$$\Rightarrow |A_k| = \binom{m-1}{k-1} \cdot r^k \cdot s^{m-k}$$

Wegen $|\Omega| = (r+s)^m$ ist daher

$$P(A_k) = \binom{m-1}{k-1} \left(\frac{r}{r+s}\right)^k \left(\frac{s}{r+s}\right)^{m-k}$$

$$= \binom{m-1}{k-1} \left(\frac{r}{r+s}\right)^k (1 - \frac{r}{r+s})^{m-k}, 1 \leq k \leq m$$

Mit der Setzung $\binom{n}{j} := 0, j > n$, gilt allgemein:

$$P(A_k) = \binom{m-1}{k-1} \cdot p^k \cdot (1-p)^{m-k}, p = \frac{r}{r+s}, k \in I\!N$$

Aufgabe 14 (9 Punkte)
Für $n, k \in I\!N, k \leq n$, wird der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ bekanntlich durch

$$\binom{n}{k} := \frac{1}{k!} \cdot n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

definiert, zusätzlich setzt man $\binom{n}{0} := 1$ für $n \in I\!N_0$.

a) Zeigen Sie durch Rechnung:

(i) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ für $k, n \in I\!N_0, 0 \leq k \leq n$

(ii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ für $n \in I\!N_0$

(iii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ für $n \in I\!N$

(iv) $\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}, r, s, n \in I\!N_0$

Hinweis zu (iv): Man benutze $(1+x)^r(1+x)^s = (1+x)^{r+s}, r, s \in I\!N_0, x \in I\!R$

(i) Für $k = 0$ ist $\binom{n}{0} := 1 = \frac{n!}{\underbrace{0!}_{=1} n!} = \binom{n}{n}$

für $0 < k < n$ gilt $\binom{n}{k} := \frac{1}{k!} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$
$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$

Es gilt (binomische Formel):

$$(a+b)^n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \forall n \in I\!N, a, b \in I\!R \tag{1}$$

(ii) Setze in (1) $a = b = 1$

$$\Rightarrow 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \forall n \in I\!N_0$$

(iii) Setze in (1) $a = -1, b = 1$

$$\Rightarrow 0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \forall n \in I\!N$$

(falsch für $n = 0 : 0^0 = 1 = \binom{0}{0}$)
(iv) Setze in (1) $a = 1, b = x$

$$\Rightarrow (1+x)^r = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} x^i, r \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow (1+x)^{r+s} = \sum_{n=0}^{r+s} \binom{r+s}{n} x^n, x \in \mathbb{R}$$

Andererseits ist

$$(1+x)^{r+s} = (1+x)^r \cdot (1+x)^s = (\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} x^i)(\sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} x^j)$$

$$\underbrace{=}_{\text{Cauchy-Produkt}} \sum_{n=0}^{r+s} (\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}) \cdot x^n, n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \text{(Identitätssatz für Potenzreihen)} \binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}, n \in \mathbb{N}_0$$

Bemerkung

Setzt man speziell $r = s = n$, so folgt:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} \underbrace{=}_{\text{(i)}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

b) Geben Sie zu den in Teil a) hergeleiteten Formeln jeweils mengentheoretische/kombinatorische Interpretationen an. Beachten Sie, daß $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge der Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$ angibt $(0 \leq k \leq n)$.

(i)

Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge A mit n Elementen ist gleich der Anzahl der $(n-k)$-elementigen Teilmengen dieser Menge.

(ii)

Die Summe der Anzahl aller Teilmengen einer Menge, also die Mächtigkeit der Potenzmenge, beträgt 2^n. (Daher auch oft die Bezeichnung 2^Ω für die Potenzmenge von Ω)

(iii)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$$

bedeutet: Anzahl der Teilmengen mit einer geraden Anzahl von Elementen (inkl. der leeren Menge) ist gleich der Anzahl derer mit einer ungeraden Anzahl von Elementen.

(iv)

Die Anzahl der n-elementigen Teilmengen einer $(r+s)$-elementigen Menge ist darstellbar als die Summe der Anzahl aller Teilmengen, die durch die Auswahl von k-elementigen Teilmengen von r-elementigen, in Kombination mit der Auswahl von $(n-k)$-elementigen Teilmengen aus den restlichen s Elementen entsteht.

Aufgabe 15 (3 Punkte)

Ein Betrunkener hat $n \in \mathbb{N}$ verschiedene Schlüssel in seinen Taschen, von denen nur einer seine Wohnungstür öffnet. Er wählt zufällig einen Schlüssel aus, probiert diesen, und wirft ihn weg, falls dieser nicht der passende Wohnungsschlüssel ist. Auf diese Art probiert er solange, bis er den Wohnungsschlüssel gefunden hat. Zeigen Sie, daß die Wahrscheinlichkeit, den richtigen Schlüssel erst beim k-ten Versuch zu finden, $\frac{1}{n}$ beträgt $(1 \leq k \leq n)$.

Die Schlüssel seien durchnummeriert mit $1, ..., n$ und Schlüssel Nr. n sei der passende Wohnungsschlüssel.

$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_n) | \omega_i \in \{1, ..., n\}, \omega_i \neq \omega_j, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$
$\mathcal{A} = \wp ot(\Omega), P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{P(n,n)} = \frac{1}{n!}$ (Laplace-Verteilung auf Ω)

Sei $B_j \mathrel{\hat{=}}$ „Erfolg im j-ten Versuch“, $1 \leq j \leq n$, also:

$$B_j = \{\omega \in \Omega | \omega_j = n\} \Rightarrow |B_j| = (n-1)! = P(n-1, n-1)$$

(verteile restliche $n-1$ Schlüssel auf verbleibende $n-1$ Positionen)

$$\Rightarrow P(B_j) = \frac{|B_j|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

5. Übung zur Einführung in die Stochastik (Musterlösung)

Prof. Dr. H. H. Bock - Volker Schmitz - SS 1999

Aufgabe 21 (7 Punkte)

Sei Ω eine nichtleere Menge. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{B} := \{A \subseteq \Omega | A$ abzählbar oder $\overline{A}$ abzählbar $\}$ eine σ-Algebra.

b) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω und $\Omega' \subseteq \Omega$, so ist

$$\Omega' \cap \mathcal{A} := \{\Omega' \cap A | A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra.

Bem.: Die so definierte σ-Algebra heißt *Spur von Ω' in $\mathcal{A}$*.

c) Ist $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ (mit einer beliebigen Indexmenge $I \neq \emptyset$) eine Familie von σ-Algebren über Ω, so ist das System $\cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ der zu *allen* $\mathcal{A}_\rangle$ gehörigen Teilmengen von Ω wieder eine σ-Algebra über Ω.

d) Ist $\mathcal{E} \subseteq \wp ot(\Omega)$ ein Mengensystem über Ω und $\Sigma := \{\mathcal{A} \subseteq \wp ot(\Omega) | \mathcal{A}$ ist σ-Algebra über Ω und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$ das System aller σ-Algebren über Ω, die $\mathcal{E}$ enthalten, dann ist

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{A}\in\Sigma} \mathcal{A}$$

eine σ-Algebra. Außerdem ist $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste $\mathcal{E}$ enthaltende σ-Algebra, d.h.

$$\begin{array}{ll} (i) & \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \text{ und} \\ (ii) & \mathcal{E} \subseteq \tilde{\mathcal{A}},\ \tilde{\mathcal{A}}\ \sigma\text{-Algebra über } \Omega \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \tilde{\mathcal{A}}. \end{array}$$

Bem.: Man nennt $\sigma(\mathcal{E})$ *die von $\mathcal{E}$ (in Ω) erzeugte σ-Algebra* und $\mathcal{E}$ einen *Erzeuger* von $\sigma(\mathcal{E})$.

Lösungen zu Aufgabe 21

a) $\mathcal{B} := \{A \subseteq \Omega | A$ abzählbar oder $\overline{A}$ abzählbar $\}$

- $\emptyset \in \mathcal{B}$, da $|\emptyset| = 0$, insbesondere abzählbar

- ist $A \in \mathcal{B}$, so auch $\overline{A}$ aufgrund der Symmetrie in der Definition genauer:
  A abzählbar $\Rightarrow \overline{(\overline{A})}$ abzählbar $\Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{B}$
  $\overline{A}$ abzählbar $\Rightarrow \overline{A}$ abzählbar $\Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{B}$

- Sei $(A_n)_{n\in N} \subseteq \mathcal{B}$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{B}$. Sind alle Mengen A_n abzählbar, so ist $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ abzählbar; ist (mindestens) ein A_{n_0} nicht abzählbar für ein $n_0 \in I\!N$, so ist

$$\overline{(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)} = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \subseteq \overline{A_{n_0}} \text{ abzählbar}$$

$$\text{also insgesamt } \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}$$

b) $\Omega' \subseteq \Omega$, $\Omega' \cap \Omega := \{\Omega' \cap A | A \in \mathcal{A}\}$

- $\emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega' \cap \emptyset = \emptyset \in \Omega' \cap \mathcal{A}$

- Sei $A' \in \Omega' \cap \mathcal{A}$, d.h. $A' = \Omega' \cap A$ für ein $A \in \mathcal{A}$ und $A' \subseteq \Omega', A' \subseteq A$
  Bilde nun Komplement bzgl. Ω' (nicht bzgl. ganz Ω):
  $\Rightarrow \overline{A'} = \overline{\Omega' \cap A'} = \Omega' \cap \overline{(\Omega' \cap A)} = \Omega' \cap (\overline{\Omega'} \cup \overline{A}) = \underbrace{(\Omega' \cap \overline{\Omega'})}_{=\emptyset} \cup (\Omega' \cap \overline{A}) =$

  $(\Omega' \cap \overline{A}) \in \Omega' \cap \mathcal{A}$, da $\overline{A} \in \mathcal{A}$.

- Sei $(A'_n)_{n\in N} \subseteq \Omega' \cap \mathcal{A}$, dann existiert $(A_n)_{n\in N} \subseteq \mathcal{A}$
  mit $A'_n = \Omega' \cap A_n, n \in I\!N$, so daß $\cup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap \Omega') = \Omega' \cap \underbrace{\cup_{n=1}^{\infty} A_n}_{\in \mathcal{A}, \text{ da } \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}} \in$

  $\Omega' \cap \mathcal{A}$
  $\Rightarrow \Omega' \cap \mathcal{A}$ ist σ-Algebra.

c)

- $\emptyset \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \Rightarrow \emptyset \in \cap_{i\in I} \mathcal{A}_i$

- Sei $A \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i \Rightarrow A \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \Rightarrow \overline{A} \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$

- Sei $(A_n)_{n\in N} \subseteq \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i \Rightarrow A_n \in \mathcal{A}_i \forall n \in I\!N, i \in I \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i \Rightarrow \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ ist σ-Algebra.

d)

Trivialerweise ist $\wp ot(\Omega)$ immer eine σ-Algebra und $\mathcal{E} \subseteq \wp ot(\Omega)$, so daß $\wp ot(\Omega) \in \Sigma$, also $\Sigma \neq \emptyset$. Benutzt man daher Σ als Indexmenge, so folgt mit Teil c), daß $\cap_{\mathcal{A}\in\Sigma}\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist.

$\sigma(\mathcal{E})$ ist auch die kleinste $\mathcal{E}$ enthaltende σ-Algebra, da $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, nach Definition von Σ trivialerweise erfüllt ist und mit $\mathcal{E} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{A}}$ σ-Algebra über Ω, so folgt $\tilde{\mathcal{A}} \in \Sigma$, also $\cap_{\mathcal{A}\in\Sigma}\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$

Aufgabe 22 (6 Punkte)
a) Es seien $\Omega = I\!N, \mathcal{E}_n := \{\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}\}, n \in I\!N$, das System der einelementigen Teilmengen und $\mathcal{A}_n := \sigma(\mathcal{E}_n)$ die von $\mathcal{E}_n$ erzeugte σ-Algebra (vgl. Aufgabe 21 d)). Zeigen Sie:

a) $\mathcal{A}_n$ besteht aus allen Mengen $A \subseteq I\!N$, für die entweder „$A \subseteq \{1, ..., n\}$" oder „$m \in A$ für alle $m \geq n + 1$" gilt.

b) $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}, n \in I\!N$

c) $\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}_n$ ist **keine** σ-Algebra.

Lösungen zu Aufgabe 22

a) Behauptung:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_n &= \{A \subseteq I\!N | A \subseteq \{1, ..., n\} \text{ oder } m \in A \forall m \geq n + 1\} \\ &= \{A \subseteq I\!N | A \subseteq \{1, ..., n\} \text{ oder } \{n + 1, n + 2, ...\} \subseteq A\} \\ &= \{A \subseteq I\!N | A \subseteq \{1, ..., n\} \text{ oder } \overline{A} \subseteq \{1, ..., n\}\} =: \mathcal{A}_n{}'\end{aligned}$$

Beweis:
„$\subseteq$" :

$$\mathcal{A}_n = \sigma(\mathcal{E}_n) = (21\text{ d)}) \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra} \\ \{\{1\},\{2\},...,\{n\}\}\in\mathcal{A}}} \mathcal{A}$$

Zeige also:
(1) $\mathcal{A}_n{}'$ ist σ-Algebra
(2) $\{\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}\} \subseteq \mathcal{A}_n{}'$

zu (1) :

- $\emptyset \subseteq \{1, ..., n\}$, also $\emptyset \in \mathcal{A}_n{}'$

- Sei $A \in \mathcal{A}_n{}' \Rightarrow A \subseteq \{1, ..., n\}$ oder $\overline{A} \subseteq \{1, ..., n\} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}_n{}'$
- Sei $(A_n)_{n \in N} \subseteq \mathcal{A}_n{}' \Rightarrow A_i \subseteq \{1, ..., n\}$ oder $\overline{A_i} \subseteq \{1, ..., n\}, i \in I\!N$

  1.Fall:
  $A_i \subseteq \{1, ..., n\} \forall i \in I\!N$
  $\Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \{1, ..., n\} \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_n{}'$

  2.Fall:
  Es gibt ein $i_0 \in I\!N$ mit $A_{i_0} \notin \{1, ..., n\}$
  $\Rightarrow \overline{A_{i_0}} \subseteq \{1, ..., n\} \Rightarrow \overline{(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)} = \cap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \subseteq \overline{A_{i_0}} \subseteq \{1, ..., n\} \Rightarrow \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_n{}'$

zu (2) : Offensichtlich, nach Definition der $\mathcal{A}_n{}'$

„$\supseteq$“ :
Sei $A \in \mathcal{A}_n{}'$ beliebig $\Rightarrow A \subseteq \{1, ..., n\}$ oder $\overline{A} \subseteq \{1, ..., n\} \Rightarrow A \in \underbrace{\wp ot(\{1, ..., n\})}_{\subseteq \mathcal{A}_n}$

oder $\overline{A} \in \underbrace{\wp ot(\{1, ..., n\})}_{\subseteq \mathcal{A}_n} \Rightarrow A \in \mathcal{A}_n$ oder $\underbrace{\overline{A} \in \mathcal{A}_n}_{\Rightarrow A \in \mathcal{A}_n,\text{ da } \mathcal{A}_n \sigma\text{-Algebra}}$

b) Sei $A \in \mathcal{A}_n$
1. Fall
$A \subseteq \{1, ..., n\} \Rightarrow A \subseteq \{1, ..., n+1\} \Rightarrow A \in \mathcal{A}_{n+1}$

2. Fall
$m \in A \forall m \geq n+1 \Rightarrow m \in A \forall m \geq (n+1)+1 \Rightarrow A \in \mathcal{A}_{n+1}$

Insgesamt folgt $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}, n \in I\!N$

c) Sei $A_n := \{2n\}, n \in I\!N \Rightarrow A_n \in \mathcal{A}_{2n}, n \in I\!N$, also
$A_n \in \cup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i \forall n \in I\!N$. Sei $A := \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{2, 4, 6, ...\} = \{n \in I\!N | n \text{ gerade }\}$

Annahme:

$$\begin{array}{ll} & \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \text{ ist } \sigma\text{-Algebra} \\ \Rightarrow & A \in \cup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i \Rightarrow \exists i_0 \in I\!N \text{ mit } A \in \mathcal{A}_{i_0} \\ \overset{a)}{\Rightarrow} & A \subseteq \{1, ..., i_0\} \text{ oder } \overline{A} \subseteq \{1, ..., i_0\} \\ \Leftrightarrow & \{2, 4, 6, ...\} \subseteq \{1, ..., i_0\} \text{ oder } \{1, 3, 5, ...\} \subseteq \{1, ..., i_0\} \end{array}$$

Da beide Möglichkeiten zum Widerspruch führen, folgt also:
$A \notin \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ ist keine σ-Algebra.

Aufgabe 23 (3 Punkte)
Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit der Eigenschaft $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ für alle $\omega \in \Omega$, und es sei $E := \{\omega \in \Omega | P(\{\omega\}) > 0\}$. Zeigen Sie, daß E höchstens abzählbar ist.

Lösungen zu Aufgabe 23

Sei $I_n := (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], n \in I\!N \Rightarrow [0,1] = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$:
Sei $\omega \in E$ beliebig $\Rightarrow$ es gibt ein eindeutig bestimmtes $n_0(\omega) \in I\!N$ mit $\frac{1}{n_0+1} < P(\{\omega\}) \leq \frac{1}{n_0}$, da $0 < P(\{\omega\}) \leq 1$, d.h. es gibt ein $n_0(\omega)$ mit $P(\{\omega\}) \in I_{n_0}$.

Annahme: Es gibt unendlich viele $\omega \in E$ mit $P(\{\omega\}) \in I_n$ für ein festes $n \in I\!N$
$\Rightarrow P(\{\omega\}) > \frac{1}{n+1}$ für endlich viele $\omega \in E \Rightarrow P(E) = \infty$ (Widerspruch!)

Also gilt:
Für alle $n \in I\!N$ ist $\{\omega \in E | P(\{\omega\}) \in I_n\} =: A_n$ eine Menge.
Daher folgt aus $E = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$, daß E höchstens abzählbar ist (evtl. abzählbar unendlich).

Aufgabe 24 (6 Punkte)
Die durch die Dichtefunktion

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$$

mit festen $\alpha, \beta > 0$ festgelegte Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf $(I\!R^1, \mathcal{B}^1)$ heißt *Gammaverteilung* $\Gamma(\alpha, \beta)$ mit Parametern α und β. Dabei sei $\mathcal{B}^1$ eine geeignete σ-Algebra über $I\!R^1$. Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{\alpha-1} dt, \alpha > 0$$

a) Zeigen Sie, daß $f_{\alpha,\beta}$ für beliebige $\alpha, \beta > 0$ tatsächlich eine Dichtefunktion ist.

b) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Gammafunktion:

$$\begin{array}{ll} (i) & \Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha), \alpha > 0, \\ (ii) & \Gamma(n+1) = n!, n \in I\!N_0 \end{array}$$

c) Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\alpha,\beta}(x)dx$.

d) Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung erhält man im Spezialfall $\alpha = 1$?

Lösungen zu Aufgabe 24

a) Offenbar ist $P(\alpha) = 0, \alpha = 0$, und somit auch $f_{\alpha,\beta}(x) > 0$ für $x > 0$.
Weiter ist $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\alpha,\beta}(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^{\infty} (\beta x)^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x} \cdot \beta dx$

Substituiere: $[t]_0^{\infty} = [\beta x]_0^{\infty}, dt = \beta dx$

$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} \frac{\beta}{\beta} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = 1$

b)

$$\begin{aligned} (i) P(\alpha+1) &= \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-t}}_{u'} \underbrace{t^{\alpha}}_{v} dt = [-e^{-t} t^{\alpha}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-t}) \alpha t^{\alpha-1} dt \\ &= \underbrace{lim_{t\to\infty}[e^{-t}t^{\alpha}]}_{0} + \alpha \cdot \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \\ (ii)\Gamma(1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\infty} = 1 = 0! \\ \Gamma(n+1) &= n \cdot \Gamma(n) = n(n-1) \cdot \Gamma(n-1) = ... = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n! \end{aligned}$$

c)

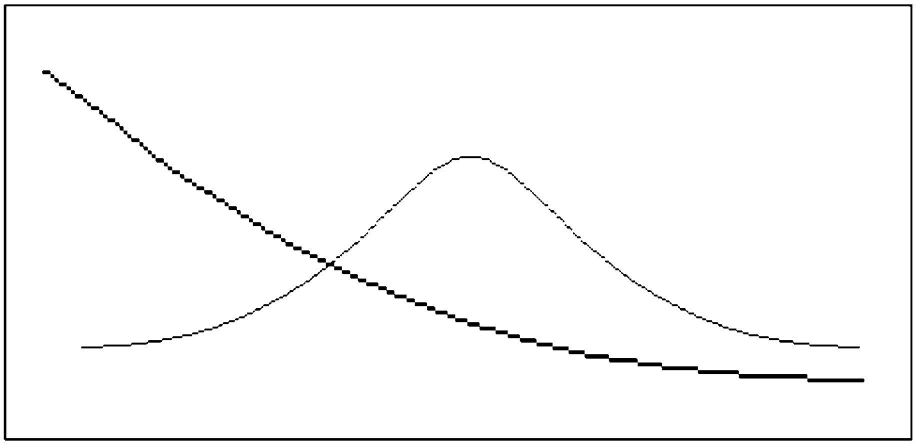
$$\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\alpha,\beta}(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^{\infty} (\beta x)^{\alpha} \cdot e^{-\beta x} dx$$

Substitution: $t = \beta x, dt = \beta dt$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} \frac{1}{\beta} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta} \cdot \Gamma(\alpha+1)$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta\Gamma(\alpha)} \overset{b)(i)}{=} \frac{\alpha}{\beta}$$

d) $f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \beta \cdot e^{-\beta x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \Gamma(1,\beta) = Exp(\beta)$ (Exponentialverteilung mit Parameter β)



Exponentialverteilung (z.B. Lebensdauer von Systemen)

Aufgabe 25 (4 Punkte)
Die Firma FONOTON nimmt an, daß sich die (zufällige) Dauer eines Ferngesprächs (in Minuten) durch die folgende Dichtefunktion beschreiben läßt:

$$f(x) = \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{x}{5}} \text{ für } x > 0$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Gesprächsdauer

a) mehr als 5 Minuten beträgt,

b) zwischen 5 und 6 Minuten liegt,

c) weniger als 3 Minuten beträgt,

d) weniger als 6 Minuten beträgt, wenn bereits 3 Minuten telefoniert wird.

Lösungen zu Aufgabe 25

a) Der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum ist $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1, P)$, wobei $\mathcal{B}^1$ eine „geeignete" σ-Algebra über $\mathbb{R}^1$, und die Wahrscheinlichkeitsverteilung durch die Dichte f gegeben ist.

Seien dann die Ereignisse
$A_x \hat{=}$,,Gesprächsdauer beträgt mehr als x Minuten", $x > 0$
$B \hat{=}$,,Gesprächsdauer zwischen 5 und 6 Minuten" $\hat{=} A_5 \backslash A_6 = A_5 \cap \overline{A_6}$
$C \hat{=}$,,Gesprächsdauer weniger als 3 Minuten" $\hat{=} \overline{A_3}$
$D \hat{=}$,,Gesprächsdauer weniger als 6 min., wenn bereits 3 min. telefoniert"
$\hat{=} \overline{A_6}|A_3$

Dann gilt:
a)

$$P(A_5) = \int_5^\infty f(x)dx = \int_5^\infty \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{x}{5}} dx = [-e^{-\frac{x}{5}}]_5^\infty = e^{-1} \approx 0.363$$

b)

$$P(B) = P(A_5 \backslash A_6) = P(A_5) - P(A_6) = \int_5^\infty f(x)dx - \int_6^\infty f(x)dx = \int_5^6 f(x)dx = [-e^{-\frac{x}{5}}]_5^6 = -e^{-\frac{6}{5}} + e^{-1} \approx 0.067$$

c)

$$P(C) = P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = \int_0^\infty f(x)dx - \int_3^\infty f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx = [-e^{-\frac{x}{5}}]_0^3 = -e^{-\frac{3}{5}} + 1 \approx 0.451$$

d)

$$P(D) = P(\overline{A_6}|A_3) = \frac{P(\overline{A_6} \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{\int_3^6 f(x)dx}{\int_3^\infty f(x)dx} = \frac{[-e^{-\frac{x}{5}}]_3^6}{[-e^{-\frac{x}{5}}]_3^\infty} = \frac{-e^{-\frac{6}{5}} + e^{-\frac{3}{5}}}{e^{-\frac{3}{5}}} \approx 0.451 = P(C)$$

Dieses Dokument ist auch erhältlich unter http://www-users.rwth-aachen.de/Christoph.Andres

Keine Gewähr für die Richtigkeit der Inhalte dieses Dokuments.

Aufgabe 32 (5 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $B_1, ..., B_n, n \in I\!N$, eine Zerlegung von Ω (d.h. $B_j \in \mathcal{A}, B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$ und $\sum_{i=1}^n B_i = \Omega$) mit $P(B_j) > 0, 1 \leq j \leq n$. Weiter seien $A, A_1, A_2, C_1, C_2 \in \mathcal{A}$ beliebige Ereignisse.

a) Zeigen oder widerlegen Sie:
(i) Aus $P(A_1|B_j) < P(A_2|B_j)$ für $1 \leq j \leq n$ folgt $P(A_1) < P(A_2)$
(ii) Gilt $P(A|B_j \cap C_1) < P(A|B_j \cap C_2)$ für $1 \leq j \leq n$ (mit $P(B_j \cap C_i) > 0$ für $i = 1, 2$), so folgt $P(A|C_1) < P(A|C_2)$

b) Veranschaulichen Sie das Resultat aus a)(ii) am Beispiel einer Stadt mit 43.000 Einwohnern (26.000 Männern (B), 17.000 Frauen $(\overline{B})$), die jeweils gegen Grippe geimpft (C) bzw. nicht geimpft $(\overline{C})$ sind und im Winter an Grippe erkranken (A) bzw. davon verschont bleiben $(\overline{A})$, wobei die zugehörigen Anzahlen (der Schnittereignisse) in folgenden 22-Tafeln enthalten sind:

...

Lösungen zu Aufgabe 32

a)
(i) Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(A_1) = \sum_{j=1}^{n} P(A_1|B_j) \cdot P(B_j) < \sum_{j=1}^{n} P(A_2|B_j) \cdot P(B_j) = P(A_2)$$

(ii) Die Behauptung ist im allgemeinen falsch (Gegenbeispiel siehe Teil b))
Motivation: $P(A|C_1) = \frac{P(A \cap C_1)}{P(C_1)} = \sum_{j=1}^n \underbrace{P(A|B_j \cap C_1)}_{< P(A|B_j \cap C_2)} \cdot P(B_j|C_1)$

Über $P(B_j|C_1)$ läßt sich jedoch keine allgemeine Aussage treffen!

b) Man erhält für die Schnittereignisse $\Omega =$ (Männer + Frauen)

Dann gilt:
$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{5000}{7000} = \frac{5}{7} = \frac{15}{21} > \frac{14}{21} = \frac{24000}{36000} = P(A|\overline{C})$

aber:
$P(A|C \cap B) = \frac{1000}{2000} = \frac{1}{2} < \frac{7}{12} = \frac{14000}{24000} = P(A|\overline{C} \cap B)$
$P(A|C \cap \overline{B}) = \frac{4000}{5000} = \frac{4}{5} < \frac{5}{6} = \frac{10000}{12000} = P(A|\overline{C} \cap \overline{B})$
Bem.: Das Phänomen heißt **Simpsons Paradoxon**.

Aufgabe 33 (7 Punkte)

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Das Ereignissystem $\mathcal{C} := \{A_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{A}$ sei stochastisch unabhängig (bei P), wobei I eine abzählbare Indexmenge sei. Zeigen Sie:

a) Ist $\mathcal{C} = \{A_1, ..., A_4\}$, so sind
(i) $\{A_1 \cap A_2, A_3, A_4\}$ stochastisch unabhängig (bei P)
(ii) $\{A_1 \cup A_2, A_3, A_4\}$ stochastisch unabhängig (bei P)

b) Sei $I = I_1 + I_2, I_j \neq \emptyset$ für $i = 1, 2$, eine Zerlegung von I. Dann sind auch $\cup_{i \in I_1} A_i, \cup_{i \in I_2} A_i$ stochastisch unabhängig (bei P).

c) Wie lautet die Verallgemeinerung von b) auf eine Zerlegung von I in mehrere nichtleere Teilmengen $I_j, 1 \leq j \leq n$, also $I = \sum_{j=1}^{n} I_j, n \in I\!N$?

Lösungen zu Aufgabe 33

a)
(i) Seien $B_i := A_1 \cap A_2, B_2 := A_3, B_3 := A_4$ und $\emptyset \subset I \subseteq \{1, 2, 3\}$
1. Fall: $1 \notin I$. Dann gilt:

$$P(\cap_{i \in I} B_i) = P(\cap_{i \in I} A_{i+1}) = \prod_{i \in I} P(A_{i+1}) = \prod_{i \in I} P(B_i)$$

2. Fall: $1 \in I, I_1 := I \backslash \{1\}$, o.B.d.A. $|I_1| \neq 0$. Dann gilt:

$$P()$$

Aufgabe 34 (6 Punkte)

Eine faire Münze werde n-mal unabhängig geworfen ($n \geq 2$). Sind die Ereignisse
$A \hat{=}$,,Es erscheinen mindestens je einmal Kopf und Zahl“ und
$B \hat{=}$,,Es erscheint höchstens zweimal Kopf“
stochastisch unabhängig ?

Lösungen zu Aufgabe 34

Aufgabe 35 (4 Punkte)

Die Anzahlverteilung der während eines Zeitintervalls der Länge τ in einer Telefonzentrale ankommenden Telefonate sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda\tau(\lambda > 0)$, d.h. mit Dichtefunktion $p_k = e^{-\lambda\tau} \cdot \frac{(\lambda\tau)^k}{k!}, k \in \mathbb{N}_0$. Die Anzahlverteilungen in je zwei disjunkten Zeitintervallen seien stochastisch unabhängig.
Bis zum Zeitpunkt $T > 0$ seien n Gespräche eingegangen. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß bis zum Zeitpunkt $t(0 < t < T)$ genau $k(k \in \mathbb{N})$ Telefongespräche angekommen sind? Welche bekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt sich?

Lösungen zu Aufgabe 35

Sei $0 < t < T$, X bezeichne die Anzahl der während $(0, T$ ankommenden Gespräche, Y bezeichne die Anzahl der während $(0, t$ ankommenden Gespräche, Z bezeichne die Anzahl der während $(t, T$ ankommenden Gespräche.
Nach Vorlesung gilt dann:
$X \ po(\lambda T), Y \ po(\lambda t), Z \ po(\lambda(T-t))$
$\Rightarrow P(Y = k | X = n) = 0, \forall k > n$
Sei $0 \leq k \leq n$.

$$
\begin{aligned}
P(Y = k | X = n) &= \frac{P(X = k; X = n)}{P(X = n)} = \frac{P(Y = k; Z = n-k)}{P(X = n)} (\text{wegen } X = Y + Z) \\
&= \frac{P(Y = k) \cdot P(Z = n-k)}{P(X = n)} (\text{stetig unabhängig}) \\
&= \frac{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda(T-t)} \frac{(\lambda(T-t))^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-\lambda t} \lambda T^k}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{t^k (T-k)^{n-k}}{T^n} \\
&= \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^k \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{n-k} = b\left(k; n; \frac{t}{T}\right) (\text{Binomialverteilung})
\end{aligned}
$$

Aufgabe 36 (5 Punkte)

a) Die diskrete Zufallsvariable Y (definiert auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$) besitze folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

....

Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 von Y.

b) Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsgröße mit Parameter $p \in (0, 1)$, d.h.

$P(X = j) = p \cdot (1-p)^j \in I\!N_0$. Berechnen Sie:
(i) $\varphi_X(t) := E(t^X)$ für $0 < t < \frac{1}{1-p}$
(ii) Wie erhält man aus (i) $E(X)$ und $Var(X)$?
Hinweis zu (ii): Differenzieren.

Lösungen zu Aufgabe 36: siehe Kleingruppenübung