Diskrete Strukturen Lösungen

Anonymous

25. Februar 2016

Aufgabe 1
Handelt es sich um eine mathematische Aussage?

- Es ist neblig.

  Solution: Nein

- Alle eingeschriebenen Studenten erschienen zur ersten Vorlesung.

  Solution: Ja

Aufgabe 2
Handelt es sich um eine Verneinung von *Das Glas ist voll*?

- Das Glas ist nicht voll.

  Solution: Ja

- Es gilt nicht, dass das Glas nicht leer ist.

  Solution: Nein

- Es gilt nicht, dass das Glas voll ist.

  Solution: Ja

- Das Glas ist leer.

  Solution: Nein

Aufgabe 3
Ergänzen Sie die folgende Wahrheitstabelle. Einzugeben ist für jede Zeile der Tabelle eine Zeichenkette aus f's und w's ohne Leerzeichen (z.B. fwf).

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \vee \neg A) \rightarrow B$	$B \rightarrow (A \vee \neg A)$
w	w	f		f	w	w		
w	f	f	w	w	f		f	w
f	w	w	f		w		w	w
f	f	w	w	f		w	f	

- 3. Zeile

  Solution: ff

- 4. Zeile

  Solution: ww

- 2. Zeile

  Solution: w

- 1. Zeile

  Solution: fww

Aufgabe 4

Hängt der Wahrheitswert der folgenden Aussageformen von der Belegung der Variablen ab?

- *Das Glas x ist voll* $\vee$ *Das Glas x ist nicht voll*

  Solution: Nein

- *Das Glas x ist voll* $\vee$ *Das Glas x ist leer*

  Solution: Ja

Aufgabe 5

Handelt es sich bei den folgenden logischen Formeln um Tautologien?
(w steht für wahr)

- $(\mathrm{f} xor A) \Leftrightarrow A$

  Solution: Ja

- $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$

  Solution: Ja

- $(\mathrm{f} \vee A) \Leftrightarrow \neg A$

  Solution: Nein

- $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$

  Solution: Ja

Aufgabe 6

Sind die Mengen gleich?

- $\{\frac{a}{b}|a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ und $\{\frac{a}{b}|a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$

Solution: Ja

- {Teller, Tasse, Glas, Tee} und {Teetasse, Teller, Glas}

Solution: Nein

- $\{1, 2, 2, 1\}$ und $\{2 \cdot 1, 2 \cdot 2\}$

Solution: Nein

- $\mathbb{N}$ und $\{z \in \mathbb{Z}|z > 0\}$

Solution: Ja

- $\{1, 2, 3, 4\}$ und $\{4, 4, 3, 2, 4, 2, 1\}$

Solution: Ja

- $\{\frac{a}{b}|a, b \in \mathbb{N}\}$ und $\mathbb{Q}$

Solution: Nein

Aufgabe 7

Ist die Aussage eine Verneinung von *Jede reelle Zahl ist ein Quadrat einer reellen Zahl.*?

- *Nicht jede reelle Zahl ist ein Quadrat einer reellen Zahl.*

Solution: Ja

- *Jede reelle Zahl ist das Quadrat einer nicht-reellen Zahl.*

Solution: Nein

- *Jede reelle Zahl ist nicht das Quadrat einer reellen Zahl.*

Solution: Nein

- *Keine reelle Zahl ist ein Quadrat einer reellen Zahl.*

Solution: Nein

- *Es gibt eine reelle Zahl, die nicht das Quadrat einer reellen Zahl ist.*

Solution: Ja

- *Es gibt eine reelle Zahl, die das Quadrat einer reellen Zahl ist.*

Solution: Nein

Aufgabe 8

Ist die Aussage eine Verneinung von *Es gibt eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich ihrem Doppelten ist.*?

- *Es gibt eine reelle Zahl, deren Quadrat ungleich ihrem Doppelten ist.*

Solution: Nein

- *Für alle reellen Zahlen gilt, dass ihr Quadrat gleich ihrem Doppelten ist.*

Solution: Nein

- *Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat gleich ihrem Doppelten ist.*

Solution: Ja

- *Für alle reellen Zahlen gilt, dass ihr Quadrat ungleich ihrem Doppelten ist.*

Solution: Ja

Aufgabe 9

Wie lautet die Mächtigkeit der folgenden Mengen? Einzugeben ist eine natürliche Zahl oder 0.

- $\mathfrak{P}(\emptyset)$

Solution: 1

- $\{n \in \mathbb{N} | n \leq 1000\}$

Solution: 1000

- $\{0, 1\}^3$

Solution: 8

- $\mathfrak{P}(\{0, 1\})$

Solution: 4

- $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{Q}$

Solution: 0

- $\{0, 1\} \times \underline{3}$

Solution: 6

Aufgabe 10

Wie lautet der Wahrheitswert der folgenden Aussagen? Kreuzen Sie das

Fragezeichen an, wenn der Wahrheitswert von der Aussageform $A(x)$ anhängt.

- Für alle $x \in \emptyset$ gilt $A(x)$.

Solution: w

- Es gibt ein $x \in \emptyset$ mit $A(x)$.

Solution: f

Aufgabe 1

Es sei M eine Menge mit m Elementen und es sei $n \in \mathbb{N}$. Kreuzen Sie die richtige Antwort an.

- Die Anzahl der Elemente von M^n beträgt
  A.m^n **B.**n^m **C.**$n \cdot m$ **D.**$n + m$

Solution: A

- Gilt $M^n = M \times \underline{n}$?

Solution: Nein

Aufgabe 2

Gelten die folgenden Aussagen?

- $\{n \in \mathbb{N} | n \text{ gerade}\}, \{n \in \mathbb{N} | n \text{ ungerade}\}$ ist eine Partition von $\mathbb{Z}$.

Solution: Nein

- Für je zwei beliebige Mengen A, B gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Solution: Nein

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{<0}, \mathbb{Q}$ ist eine Partition von $\mathbb{R}$.

Solution: Nein

- $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5\}$ ist eine Partition von $\underline{5}$.

Solution: Ja

- Jeder kommutative Ring ist nullteilerfrei.

Solution: Nein

- Jeder Ring ist eine Gruppe bezüglich der Addition des Rings.

Solution: Ja

Aufgabe 3

Geben Sie die korrekte Anzahl ein.

- Wieviele verschiedene Partitionen besitzt $\{a, b, c\}$? Beachten Sie, dass die Teile einer Partition nicht leer sein dürfen (vgl. Skript).

  Solution: 5

- Wieviele verschiedene 2-elementige Teilmengen besitzt $\{a, b, c, d\}$?

  Solution: 6

Aufgabe 4

Beantworten Sie die Fragen bzw. vervollständigen Sie die mit ... gekennzeichnete Lücke.

- Sind die Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto (x-1)(x+1)$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x^2 - 1$ gleich?

  Solution: Ja

- Eine Abbildung ordnet jedem Element des Definitionsbereiches ... ein Element des Zielbereiches zu.

  Solution: genau

- Wieviele Abbildungen von $\emptyset$ nach $\emptyset$ gibt es?

  Solution: 1

- Kreuzen Sie alle Möglichkeiten an, für die sich eine Abbildung ergibt.

$$f : \mathbb{N} \to \ldots, \quad n \mapsto \frac{1}{2}n$$

  A.$\mathbb{R}$ **B.**$\mathbb{N}$ **C.**$\mathbb{N}_0$ **D.**$\mathbb{Z}$

  Solution: A

- Kreuzen Sie alle Möglichkeiten an, für die sich eine Abbildung ergibt.

$$f : \ldots \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto |-x|$$

  A.$\mathbb{R}_{\geq 0}$ **B.**$\mathbb{N}$ **C.**$\mathbb{N}_0$ **D.**$\mathbb{Z}$

  Solution: B

- Beschreibt folgendes Pfeildiagram eine Abbildung?

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, mapsto] & \bullet \\
\bullet \arrow[r, mapsto] \arrow[ur, mapsto] & \bullet
\end{tikzcd}$$

  Solution: Nein

- Mit M^N bezeichnet man die Menge aller Abbildungen von

  Solution: N nach M

- Lässt sich jede Folge (in einer beliebigen Menge) als eine Abbildung auffassen?

  Solution: Ja

Aufgabe 5

Beantworten Sie die Fragen.

- Können Fasern leer sein?

  Solution: Ja

- Die Fasern einer Abbildung $f : N \to M$ sind Teilmengen von ...

  Solution: N

- Das Bild einer Abbildung $f : N \to M$ ist eine Teilmenge von ...

  Solution: M

- Sei $f : N \to M$ eine Abbildung. Die Menge $\{f(x)|x \in N\}$ heisst ... von f.

  Solution: Bild

- Welche Ungleichungen gelten für alle Abbildungen $f : N \to M$? (alle ankreuzen!) **A.**$|f(N)| \leq |N|$ **B.**$|f(N)| \geq |N|$ **C.**$|f(N)| \leq |M|$ **D.**$|f(N)| \geq |M|$

  Solution: A,C

Aufgabe 6

Beantworten Sie die Fragen bzw. vervollständigen Sie die mit ... gekennzeichnete Lücke.

- Gibt es Abbildungen die injektiv und surjektiv sind?

  Solution: Ja

- Ist jede Abbildung injektiv oder surjektiv?

  Solution: Nein

- Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Abbildung hat.

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto |x|$$

  Solution: injektiv,surjektiv

- Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Abbildung hat.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto |x|$$

Solution: surjektiv

- Eine Abbildung ist genau dann injektiv, wenn jedes Element des Zielbereiches ... ein Urbild hat.

Solution: höchstens

- Eine Abbildung ist genau dann surjektiv, wenn jedes Element des Zielbereiches ... ein Urbild hat.

Solution: mindestens

Aufgabe 7

Beantworten Sie die Fragen bzw. vervollständigen Sie die mit ... gekennzeichnete Lücke.

- Wenn f injektiv ist, so existiert stets eine ...-seitige Umkehrabbildung.

Solution: links

- Hat jede Abbildung eine links- oder rechtsseitige Umkehrabbildung?

Solution: Nein

- Gilt $f \circ g = \mathrm{id}$, so heisst g eine ...-seitige Umkehrabbildung von f.

Solution: rechts

Aufgabe 8

Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. ergänzen Sie die Lücke auf alle möglichen (korrekten) Weisen.

- Wenn f und g bijektive Abbildungen sind und $g \circ f$ definiert ist, gilt dann $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$?

Solution: NEIN

- Jede Abbildung lässt sich durch Einschränkung des Definitionsbereiches ... machen.

Solution: injektiv

- Wenn f eine links-seitige und eine rechts-seitige Umkehrabbildung besitzt, besitzt f dann auch eine beidseitige Umkehrabbildung?

  Solution: JA

- Für alle surjektiven Abbildungen $f : N \to M$ gilt .... **A.**$|f(N)| \leq |N|$ **B.**$|f(N)| \geq |N|$
  C.$|f(N)| \leq |M|$ **D.**$|f(N)| \geq |M|$

  Solution: A,C,D

- Jede Abbildung lässt sich durch Einschränkung des Zielbereiches ... machen.

  Solution: surjektiv

- f surjektiv ... $|N| \geq |M|$ **A.**$\Leftarrow$ **B.**$\Rightarrow$

  Solution: B

- f injektiv ... $|N| \leq |M|$ **A.**$\Leftarrow$ **B.**$\Rightarrow$

  Solution: B

- Wenn eine Abbildung eine ...-seitige Umkehrabbildung besitzt, so ist diese eindeutig.

  Solution: beid

- Für alle injektiven Abbildungen $f : N \to M$ gilt .... **A.**$|f(N)| \leq |N|$ **B.**$|f(N)| \geq |N|$
  C.$|f(N)| \leq |M|$ **D.**$|f(N)| \geq |M|$

  Solution: A,B,C

- Sollte decrypt eine links- oder rechts-seitige Umkehrabbildung von crypt sein?

  Solution: links

Aufgabe 1

Es seien f, g, h Abbildungen. Ja oder Nein?

- Es gilt stets $f \circ g = g \circ f$ falls beide Seiten der Gleichung definiert sind.

  Solution: Nein

- Zu zwei beliebigen Abbildungen f und g existiert stets eine der Kompositionen $f \circ g$ oder $g \circ f$.

  Solution: Nein

- Es gilt stets $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ falls beide Seiten der Gleichung definiert sind.

  Solution: Ja

Aufgabe 2

Beantworten Sie die Fragen bzw. vervollständigen Sie die mit ... gekennzeichnete Lücke.

- Eine Abbildung ist genau dann injektiv, wenn jedes Element des Zielbereiches ... ein Urbild hat.

  Solution: höchstens

- Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Abbildung hat.

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto |x|$$

  Solution: injektiv

- Eine Abbildung ist genau dann surjektiv, wenn jedes Element des Zielbereiches ... ein Urbild hat.

  Solution: mindestens

- Gibt es Abbildungen die injektiv und surjektiv sind?

  Solution: Ja

- Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Abbildung hat.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto |x|$$

  Solution:

- Ist jede Abbildung injektiv oder surjektiv?

  Solution: Nein

Aufgabe 3

Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Relation R auf N erfüllt. Es steht (R) für reflexiv, (S) für symmetrisch, (A) für antisymmetrisch, (T) für transitiv.

- Jede partielle Ordnung R auf N.

  Solution: A,R,T

- $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und
  $R = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.

Solution: S,T

- $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$.

Solution: A,T

- Jede Äquivalenzrelation R auf N.

Solution: R,S,T

- $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5)\}$.

Solution: A,R

Aufgabe 1

Wir betrachten die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{Z}$. Kreuzen Sie alle maximalen Elemente der Menge an.

- $\{2, 3, 4, 6, 12\}$

Solution: 12

- $\{2, 3, 5\}$

Solution: 2,3,5

- $\{2, 3, 4, 6\}$

Solution: 4,6

- $\{2, 3, 5\}$

Solution: 2,3,5

- $\{2, 4, 6\}$

Solution: 4,6

Aufgabe 2

Ist R eine Äquivalenzrelation auf N? Falls ja geben Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen ein, falls nein schreiben Sie -.

- $N = \{x, y, z\}$ und $R = \{(x, x), (x, y), (y, y), (y, x), (z, z)\}$.

Solution: 2

- $N = \{x, y, z\}$ und
  $R = \{(x,x),(x,y),(x,z),(y,y),(y,x),(y,z),(z,x),(z,y),(z,z)\}$.

Solution: 1

- $N = \{x, y, z\}$ und $R = \{(x,y),(x,z),(y,x),(y,z),(z,x),(z,y)\}$.

Solution: -

Aufgabe 3

Seien π, ψ beliebige Elemente aus S_n. Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. ergänzen Sie die Lücke auf alle möglichen (korrekten) Weisen.

- $sgn(\pi) \in \ldots$ **A.**$\{0,1\}$ **B.**$\underline{2}$ **C.**$\underline{1}$

Solution:

- Es sei $k \in \mathbb{N}$. Welche Abbildungen sind definiert und liegen in S_n?
  A.π^{-1} **B.**π^k **C.**π^{-k}
  D.π^0 **E.**$\psi \circ \pi$ **F.**$\pi \circ \psi$

Solution: A,B,C,D,E,F

- Gilt $\sigma^{-l} = \sigma^{k-l}$ für jeden k-Zykel $\sigma \in S_n$ und alle $l \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq l \leq k-1$?

Solution: JA

- Welche Aussagen gelten allgemein? **A.**π ist injektiv **B.**π ist surjektiv
  C.$\pi \circ \psi = \psi \circ \pi$ **D.**$T_\pi \subseteq S_n$

Solution: A,B

- $sgn(\pi \circ \psi) = sgn(\pi) \ldots sgn(\psi)$ **A.**$+$ **B.**$\cdot$ **C.**$-$

Solution: B

- Gilt $\sigma^{-k} = \mathrm{id}$ für jeden k-Zykel $\sigma \in S_n$?

Solution: JA

- Falls π ein k-Zykel ist und k ungerade, so ist $sgn(\pi) = \ldots$.

Solution: 1

- π lässt sich eindeutig (bis auf Reihenfolge und bis auf Erwähnung von 1-Zykeln) als Produkt von ... schreiben. **A.**Zykeln **B.**disjunkten Zykeln **C.**Transpositionen

Solution: B

- π lässt sich als Produkt von ... schreiben. **A.**Zykeln **B.**disjunkten Zykeln **C.**Transpositionen

  Solution: A,B,C

- An $sgn(\pi)$ lässt sich die Anzahl der ... von π erkennen. **A.**Inversionen **B.**Transpositionen **C.**disjunkten Zykel

  Solution:

Aufgabe 1

Gelten die folgenden Aussagen?

- Jede Untergruppe ist selbst eine Gruppe.

  Solution: Ja

- Die leere Menge bildet eine Gruppe.

  Solution: Nein

- Jede Gruppe besitzt mindestens ein neutrales Element.

  Solution: Ja

- In einer Gruppe hat jede Gleichung $ax = b$ (mit a, b gegeben) höchstens eine Lösung.

  Solution: Ja

- In einer Gruppe besitzt jedes Element genau ein Inverses.

  Solution: Ja

- S_n ist eine abelsche Gruppe.

  Solution: Nein

- $\{\pi \in S_n | \pi(1) = 1\}$ ist eine Untergruppe von $(S_n, \circ)$.

  Solution: Ja

Aufgabe 2

Kreuzen Sie alle Gruppenaxiome an, die in der angegebenen Struktur gelten.

- $(\mathbb{N}_0, +)$

  Solution: G1,G2,G4

- $(\{f : \underline{n} \to \underline{n} | f \text{ surjektiv}\}, \circ)$

  Solution: G1,G2,G3

- $(\{f : \underline{n} \to \underline{n} | f \text{ injektiv}\}, \circ)$

Solution: G1,G2,G3

- $(\mathbb{N}_0, \cdot)$

Solution: G1,G2,G4

- $(\{\text{w,f}\}, \wedge)$

Solution: G1,G2,G4

- $(\mathbb{N}, +)$

Solution: G1,G4

- $(\mathbb{N}, \cdot)$

Solution: G1,G2,G4

- $(\mathbb{R}, \cdot)$

Solution: G1,G2,G4

- $(\{\text{w,f}\}, \vee)$

Solution: G1,G2,G4

- $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$

Solution: G1,G2,G4

Aufgabe 3

Gelten die folgenden Aussagen?

- In einem Ring $(R, +, \cdot)$ besitzt jedes Element bzgl. $\cdot$ ein Inverses.

Solution: Nein

- In einem Ring $(R, +, \cdot)$ besitzt jedes Element bzgl. $+$ ein Inverses.

Solution: Ja

- Der triviale Ring ist nullteilerfrei.

Solution: Ja

- Jeder Ring ist ein Körper.

Solution: Nein

- Jeder Körper ist ein nullteilerfreier Ring.

Solution: Ja

- Jeder Körper ist ein kommutativer Ring.

  Solution: Ja

- In einem Ring $(R, +, \cdot)$ hat jede Gleichung $a + x = b$ (mit a, b gegeben) eine Lösung.

  Solution: Ja

- In einem Ring $(R, +, \cdot)$ hat jede Gleichung $a \cdot x = b$ (mit a, b gegeben) eine Lösung.

  Solution: Nein

Aufgabe 4

Gelten die folgenden Rechengesetze in jedem kommutativen Ring?

- $c \cdot ((a + d) \cdot e + b) = c \cdot a + c \cdot d \cdot e + b + c$

  Solution: Nein

- $c \cdot ((a + d) \cdot e + b) = c \cdot a + c \cdot d \cdot e + b \cdot c$

  Solution: Nein

- $a \cdot b + c \cdot a = a \cdot (b + c)$

  Solution: Ja

- $ab - ba = 0$

  Solution: Ja

- $c \cdot ((a + d) \cdot e + b) = a \cdot c \cdot e + c \cdot d \cdot e + b \cdot c$

  Solution: Ja

- $a \cdot b + c \cdot a = a \cdot (b + c) \cdot a$

  Solution: Nein

Aufgabe 1

Ergänzen Sie die Lücke auf alle möglichen Weisen, auf die sich eine korrekte Aussage ergibt.

- Die Teilbarkeitsrelation in jedem kommutativen Ring ist …

  Solution: reflexiv,transitiv

- Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Für jedes $a \in R$ gilt: a Einheit … $ax = b$ ist für jedes $b \in R$ eindeutig lösbar. **A.**$\Leftarrow$ **B.**$\Rightarrow$

  Solution: A,B

Aufgabe 2

Gelten die folgenden Aussagen?

- Jeder kommutative Ring ist nullteilerfrei.

  Solution: Nein

- Jeder Ring ist eine Gruppe bezüglich der Addition des Rings.

  Solution: Ja

Aufgabe 3

Wir betrachten den Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Gelten die folgenden Aussagen?

- Zur Berechnung von $\mathrm{ggT}(a, b)$ ist die Primfaktorzerlegung von a und b nötig.

  Solution: Nein

- $\mathbb{Z}$ ist nullteilerfrei.

  Solution: Ja

- 12 und 13 sind teilerfremd.

  Solution: Ja

- Der ggT ist für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ definiert, eindeutig und > 0.

  Solution: Nein

- Jedes von 0 verschiedene Element aus $\mathbb{Z}$ ist Einheit.

  Solution: Nein

- Für alle $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ so, dass $\mathrm{ggT}(a, b) = \lambda a + \mu b$.

  Solution: Nein

- Sind $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dann bricht der Eukldische Algorithmus (durchgeführt für a, b) ab.

  Solution: Ja

- 12 und 14 sind teilerfremd.

  Solution: Nein

Aufgabe 4

Gelten die folgenden Aussagen?

- $37 \equiv -1 \pmod 6$

  Solution: Nein

- Die Relation *kongruent modulo* n ist eine Äquivalenzrelation.

Solution: Ja

- $\mathbb{Z}_n$ hat genau $n+1$ Elemente.

Solution: Nein

- $a \equiv b \pmod{n}$ genau dann, wenn a bei Division durch n den Rest b lässt.

Solution: Nein

- Jedes $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ hat genau n Elemente.

Solution: Nein

- $\overline{6} \in \mathbb{Z}_5$

Solution: Ja

- $4321 \equiv 1 \pmod{3}$

Solution: Ja

Aufgabe 5

Gelten die folgenden Aussagen?

- Wie lautet der kleinste nicht-negative Repräsentant von $\overline{35}$ in $\mathbb{Z}_9$?

Solution: 8

- $\overline{2}^{1000} = \overline{2}$ in $\mathbb{Z}_7$.

Solution: Ja

- $\mathbb{Z}_{10}$ hat genau 4 Einheiten.

Solution: Ja

- Der Restklassenring $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ist kommutativ und nullteilerfrei.

Solution: Nein

- Die Gleichung $\overline{a} \cdot x = \overline{b}$ in $\mathbb{Z}_n$ (mit $\overline{a}, \overline{b}$ gegeben) ist genau dann lösbar, wenn $n | \mathrm{ggT}(a, b)$.

Solution: Nein

- $\mathbb{Z}_8$ ist ein Körper.

Solution: Nein

- $\mathbb{Z}_1$ ist ein kommutativer Ring.

Solution: Ja

- $(\{\text{w,f}\}, xor, \wedge)$ ist ein Körper.

Solution: Ja

- $(\overline{16})^{-1} = \overline{16}$ in $\mathbb{Z}_{51}$.

Solution: Ja

- $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ ist genau dann eine Einheit, wenn a und n teilerfremd sind.

Solution: Ja

Aufgabe 1

Wir rechnen in $\mathbb{Z}_9$.

- Wie lautet das kleinste $k \in \mathbb{N}$ für das $\overline{5}^k = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_9$ gilt?

Solution: 6

- Wie lautet das kleinste $k \in \mathbb{N}$ für das $\overline{4}^k = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_9$ gilt?

Solution: 3

- Für welches $a \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ gilt $7^{12121} \equiv a \pmod 9$?

Solution: 7

- Für welches $a \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ gilt $4^{24242} \equiv a \pmod 9$?

Solution: 7

Aufgabe 2

Berechnen Sie jeweils mit dem Euklidischen Algorithmus für Polynome den größten, gemeinsamen Teiler der beiden gegebenen Polynome. Der ggT zweier Polynome sei stets ein normiertes Polynom. Geben Sie als Antwort nur die Koeffizienten des Polynoms in absteigender Reihenfolge und durch Komma getrennt ein. Beispiel: für $X^4 + 2X^3 - X^2 + 3$ ist '1,2,-1,0,3' einzugeben. Hinweis: alle Koeffizienten in den Lösungen sind ganzzahlig.

- Wie lautet der ggT von $X^5 - X^4 + X^3 - X - 2$ und $2X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 2X$?

Solution: 1,-1,2

Aufgabe 3

Sei $f = X^5 + 2X^4 + X^2 + X - 2$ und $g = X^4 + 2X^3$. Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus für Polynome den größten, gemeinsamen Teiler d der Polynome f und g. Berechnen Sie weiterhin Polynome

λ und μ mit $d = \lambda f + \mu g$. Geben Sie Polynome ein, wie oben angegeben. Hinweis: alle Koeffizienten in den Lösungen sind ganzzahlig.

- Wie lautet λ?

Solution: -1,-1,-1

- Wie lautet der ggT d von f und g?

Solution: 1,2

- Wie lautet μ?

Solution: 1,1,1,1

Aufgabe 1

Sind die folgenden Elemente paarweise verschieden?

- 1,2,4,1

Solution: Nein

Aufgabe 2

Handelt es sich um eine Permutation oder ein Tupel? Falls beide Auffassungen möglich sind, sind zwei Kreuze zu machen.

- $(1, 2, \frac{1}{2})$

Solution: Permutation,Tupel

- $(0, 0, 7)$

Solution: Tupel

Aufgabe 3

Wieviele verschiedene k-Permutationen lassen sich durch Anordnung aus der angegebenen k-Kombination gewinnen?

- $\{0\}$

Solution: 1

- $\{2, 4, 5\}$

Solution: 6

Aufgabe 4

Schreiben Sie die angegebene Teilmenge von $\underline{5}$ als ein Tupel über $\{0, 1\}$

wie in Beispiel III(1.3a). Geben Sie das Tupel als Zeichenfolge von Nullen und Einsen ohne Komma oder Leerzeichen und ohne umschliessende Klammern ein (z.B. 011 . . .).

- $\underline{5}$

Solution: 11111

- $\{\}$

Solution: 00000

- $\{2, 4, 5\}$

Solution: 01011

Aufgabe 5

Geben sie zu folgenden k-Kombinationen, k-Tupeln, k-Multimengen, bzw. k-Permutationen das k an!

- $(\cos(-\frac{\pi}{2}), \cos(0), \cos(-\pi), \cos(0), \cos(0))$

Solution: 5

- $(1, 2, 4, 5, 6)$

Solution: 5

- $\{1, 3, 4, 2, 1\}$

Solution: 4

- $\{999, 432, 975, 875, 975, 432, 924, 37\}$

Solution: 8

Aufgabe 6

Sind die angegebenen Objekte gleich?

- Die k-Tupel $(1, 2, 3, 4, 4, 4, 1, 5)$ und $(1, 2, 4, 3, 4, 1, 4, 5)$.

Solution: Nein

- Die k-Multimengen $\{1, 3, 4, 2, 1\}$ und $\{3, 2, 4, 1\}$.

Solution: Nein

- Die k-Kombinationen $\{1, 2, 4\}$ und $\{4, 2, 1\}$.

Solution: Ja

- Die k-Permutationen $(1, 2, 4)$ und $(4, 2, \sin\frac{\pi}{2})$.

  Solution: Nein

Aufgabe 7

Ein Wurf mit 5 Würfeln gleichzeitig ergibt ⚂ ,⚂ ,⚁ ,⚅ ,⚂ . Wir fassen diesen Wurf wie in Beispiel III(1.3) als eine k-Multimenge M auf und schreiben diese anschliessend als ein l-Tupel T.

- Wie lautet das Tupel T? Geben Sie das Tupel als Zeichenkette ohne Komma oder Leerzeichen und ohne umschliessende Klammern ein.

  Solution: 013001

- Wie lautet l?

  Solution: 6

- M ist eine k-Multimenge über **A.**$\underline{5}$ **B.**$\underline{6}$ **C.**$\mathbb{N}$ **D.**$\mathbb{N}_0$

  Solution: B

- T ist ein k-Tupel über **A.**$\underline{5}$ **B.**$\underline{6}$ **C.**$\mathbb{N}$ **D.**$\mathbb{N}_0$ **E.**{⚀ ,⚁ ,⚂ ,⚃ ,⚄ ,⚅ } **F.**

  Solution: D

- Wie lautet k?

  Solution: 5

- Wir kodieren das Tupel T als ein Wort über $\{0, 1\}$ wie im Beweis von Satz III(1.3). Geben Sie das Wort ein.

  Solution: 0101110001

Aufgabe 8

Berechne die folgenden Anzahlen

- Die Anzahl der 3-Kombinationen aus $\underline{7}$

  Solution: 35

- Die Anzahl der 3-Permutationen aus $\underline{7}$

  Solution: 210

- Die Anzahl der 4-Tupel aus $\underline{6}$

  Solution: 1296

- Die Anzahl der 5-Multimengen aus $\underline{5}$

Solution: 126

Aufgabe 9

Gelten die folgenden Gleichungen für alle n und k? Es wird angenommen, dass n und k in einem Bereich liegen, dass alle auftretenden Binomialkoeffizienten definiert sind (also von der Form $\binom{a}{b}$ mit $0 \leq b \leq a$).

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$

Solution: Nein

- $\binom{n}{k} = \binom{n-k}{k}$

Solution: Nein

- $\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k+1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Solution: Nein

- $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{n} + \binom{n}{k-1}$

Solution: Nein

Aufgabe 1

Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. ergänzen Sie die Lücke auf alle möglichen (korrekten) Weisen.

- Bei $S_{n,k}$ steht das k für eine Anzahl von ....

Solution: keins davon

- Die Binomialkoeffizienten zählen bestimmte ....

Solution: Kombinationen

- Werden bei der Zykelzahl die 1-Zykeln mitgezählt?

Solution: Ja

- Die Stirling-Zahlen erster Art zählen bestimmte ....

Solution: Permutationen

- Die Stirling-Zahlen zweiter Art zählen bestimmte ....

Solution: Partitionen

- Bei $s_{n,k}$ steht das k für eine Anzahl von ....

Solution: Zykeln

Aufgabe 2

Welche Art von Zählkoeffizient erfüllt die angegebene Rekursionsgleichung?

- $c_{n,k} = c_{n-1,k} + kc_{n-1,k-1}$

  Solution: keins davon

- $c_{n,k} = c_{n-1,k} + (n-k)c_{n-1,k-1}$

  Solution: keins davon

- $c_{n,k} = c_{n-1,k} + (n-1)c_{n-1,k-1}$

  Solution: keins davon

- $c_{n,k} = c_{n-1,k} + c_{n-1,k-1}$

  Solution: Binomial

Aufgabe 3

Geben Sie die Stirling-Zahlen ein. Hier steht $S_{n,k}$ für die Stirling-Zahlen zweiter Art und $s_{n,k}$ für die Stirling-Zahlen erster Art.

- $s_{5,1}$

  Solution: 24

- $S_{6,5}$

  Solution: 15

Aufgabe 1

Ergänzen Sie die Lücke mit allen Wörtern, so dass sich eine korrekte Aussage ergibt.

- Zur Bestimmung der Zusammenhangskomponente eines Knotens kann die ... benutzt werden.

  Solution: Breitensuche,Tiefensuche

- Zur Bestimmung eines kürzesten Kantenzuges zwischen zwei Knoten kann die ... benutzt werden.

  Solution: Breitensuche

- Jede Relation auf der endlichen Menge V kann als Graph mit folgenden Eigenschaften aufgefasst werden: ...

  Solution: gerichtet,mit Schlingen

- Jeder ungerichtete Graph ohne Schlingen kann als eine Relation auf der Knotenmenge mit folgenden Eigenschaften aufgefasst werden: ...

  Solution: antireflexiv,symmetrisch

Aufgabe 2

Es sei $G = G(V, E)$ der folgende Graph: (Die Gesamtheit des Clubs der Denker hat sich noch nicht die Mühe gemacht Grafiken einzubinden. Sorry! Bezeichnung des Bildes: "../../exercises/G2a")

- Was ist die Distanz von 5 zu 9?

  Solution: 3

- Zu wievielen Kanten ist die Kante $\{6, 8\}$ inzident?

  Solution: 6,7

- Wieviele Zusammenhangskomponenten hat der auf $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ induzierte Teilgraph?

  Solution: 2

- Wieviele Kanten hat der auf $\{6, 7, 8, 9\}$ induzierte Teilgraph?

  Solution: 4

- Was ist die Summe der Grade aller Knoten?

  Solution: 28

- Wieviele kürzeste Kantenzüge von 7 nach 2 gibt es?

  Solution: 3

- Ist $(6, 4, 3, 2, 4)$ ein Pfad? Wenn ja, geben Sie die Länge ein, sonst '-' (Minus).

  Solution: -

- Wieviele Zusammenhangskomponenten hat G?

  Solution: 1

- Ist $(1, 9, 8, 6, 9, 2)$ ein Kantenzug? Wenn ja, geben Sie die Länge ein, sonst '-' (Minus).

  Solution: -

- Zu wievielen Knoten ist die Kante $\{4, 6\}$ inzident?

  Solution: 2

- Wieviele Einträge der Adjazenzmatrix von G sind gleich 0?

Solution: 53

- Ist $(2, 3, 4, 2, 1, 9, 2)$ ein Kreis? Wenn ja, geben Sie die Länge ein, sonst '-' (Minus).

Solution: -

- Wieviele Nachbarn hat der Knoten 1?

Solution: 3

- Welche Länge hat die Adjazenzliste von G?

Solution: 9

- Wieviele Elemente hat V?

Solution: 9

- Wieviele Elemente hat E?

Solution: 14

- Was ist der Grad des Knotens 4?

Solution: 4

- Wieviele Spalten hat die Adjazenzmatrix von G?

Solution: 9

Aufgabe 3

Es sei $G = G(V, E)$ der folgende Graph: (Die Gesamtheit des Clubs der Denker hat sich noch nicht die Mühe gemacht Grafiken einzubinden. Sorry! Bezeichnung des Bildes: "../../exercises/G2a")

- Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 12?

Solution: 0

- Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 45?

Solution: 1

- Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 68?

Solution: 0

Aufgabe 4

Es seien $G = (V, E)$ ein Graph und $e = uv \in E$. Ist die Aussage äquivalent dazu, dass $e = uv$ keine Brücke ist?

- $\deg u > 1$

Solution: Nein

- Es existiert ein Kantenzug von u nach v, der e nicht durchläuft.

Solution: Ja

- $(V, E \setminus \{e\})$ hat weniger Komponenten als (V, E).

Solution: Nein

- Es existiert ein Kreis, der u und v durchläuft.

Solution: Ja

- Es existiert ein Pfad von u nach v, der e nicht durchläuft.

Solution: Ja

Aufgabe 5

Stimmt die Aussage?

- Jeder Teilgraph eines Graphen G hat weniger oder gleich viele Komponenten wie G.

Solution: Nein

- In jedem Graph ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Solution: Ja

- Jede Brücke ist zu einem Knoten vom Grad 1 inzident.

Solution: Nein

- Jede Eulertour ist ein Kreis.

Solution: Nein

- Es gibt Graphen, die eine Eulertour aber keinen Hamiltonkreis besitzen.

Solution: Ja

- Jeder Kreis ist eine Tour.

Solution: Ja

- In jedem Graph ist die Anzahl der Knoten mit geradem Grad ungerade.

Solution: Nein

- Jeder Knoten vom Grad 1 ist zu einer Brücke inzident.

  Solution: Ja

- Jeder Hamiltonkreis ist eine Eulertour.

  Solution: Nein

- Jeder Teilgraph eines Graphen G hat gleich viele oder mehr Komponenten als G.

  Solution: Nein