Diskrete Strukturen Lösungen

Anonymous

27. Februar 2014

Aufgabe 1

Wir betrachten die folgende Aussage:

$$\text{A: } \textit{Alle Personen im Hörsaal haben ihr Handy aus.} \tag{1}$$

Geben Sie an, wie sich A und die jeweils unten angegebene Aussage B zueinander verhalten. Kreuzen Sie *Neg* an wenn B die Verneinung von A ist, *Äq* wenn A und B äquivalent sind, und *keins* wenn keines der beiden zutrifft. Annahmen: Der Hörsaal ist nicht leer und jede Person darin besitzt genau ein Handy, dessen Zustand entweder an oder aus ist. *Hinweis:* Es ist gemeint, ob A und B allgemein, d.h. in jeder möglichen im Hörsaal herrschenden Situation, äquivalent zueinander bzw. Negationen voneinander sind. Etwas präziser kann man A und B als Aussageformen A(S) und B(S) auffassen, deren Wahrheitswert von der Situation S im Hörsaal abhängen. In diesem Sinne ist dann anzukreuzen: *Äq* wenn *A(S)* $\Leftrightarrow$ *B(S)* für jede Situation S gilt, *Neg* wenn *A(S)* $\Leftrightarrow \neg$ *B(S)* für jede Situation S gilt, und *keins* anderenfalls.

- B: *Wenn eine Person ihr Handy an hat, ist sie nicht im Hörsaal.*

  Solution: Äq

- B: *Keine Person im Hörsaal hat ihr Handy aus.*

  Solution: keins

- B: *Wenn alle Personen im Hörsaal ihr Handy aus haben, folgt dass der Hörsaal leer ist.*

  Solution: Neg

- B: *Es gibt eine Person im Hörsaal, die ihr Handy nicht an hat.*

  Solution: keins

- B: *Es gibt mindestens eine Person im Hörsaal, die ihr Handy an hat.*

Solution: Neg

- B: *Keine Person im Hörsaal hat ihr Handy an.*

Solution: Äq

- B: *Es gibt eine Person im Hörsaal, die ihr Handy aus hat.*

Solution: keins

- B: *Alle Personen im Hörsaal haben ihr Handy an.*

Solution: keins

- B: *Nicht alle Personen im Hörsaal haben ihr Handy aus.*

Solution: Neg

Aufgabe 2

Handelt es sich um Tautologien?

- $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

Solution: Nein

- $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

Solution: Ja

- $(A xor B) \wedge \neg(A \wedge \neg B)$

Solution: Nein

- $((\neg A \wedge B) \vee \neg(A \vee B)) \rightarrow \neg A$

Solution: Ja

- $(A \Leftrightarrow B) \vee ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

Solution: Nein

- $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \wedge B)$

Solution: Nein

- $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

Solution: Ja

- $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee C)$

Solution: Nein

- $((\neg A \land B) \lor \neg(A \land B)) \to \neg A$

Solution: Nein

Aufgabe 3

Es seien A, B und C beliebige Mengen. Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!

- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

  Solution: Ja

- $(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

  Solution: Nein

- Wenn $A \cup B \subseteq C$ gilt, dann gilt sowohl $A \subseteq C$ als auch $B \subseteq C$.

  Solution: Ja

- $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

  Solution: Nein

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

  Solution: Ja

- Ist $A \subseteq B$, dann ist $C \cap A \subseteq C \cap B$.

  Solution: Ja

- $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

  Solution: Nein

- Ist $A \subseteq B$, dann ist $C \cup A \subseteq C \cup B$.

  Solution: Ja

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

  Solution: Ja

Aufgabe 5

Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!

- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist durch 3 teilbar}\}$

  Solution: Nein

- Die Menge $\{(x, y) \in \{1, 2, 3\} \times \{2, 3\} \mid x \cdot y \text{ ist ungerade}\}$ hat genau 2 Elemente.

  Solution: Ja

- Die Menge $\mathrm{Pot}(\{1, \{2, 3\}, 3\})$ hat 8 Elemente.

  Solution: Ja

- $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5\}\}$ ist eine Partition von $\underline{5}$.

  Solution: Ja

- $\{\{n \in \mathbb{N}\}n \text{ gerade}, \{n \in \mathbb{N}\}n \text{ ungerade}, \{-n\}n \in \mathbb{N}, n \text{ gerade}, \{-n\}n \in \mathbb{N}, n \text{ ungerade}\}$ ist eine Partition von $\mathbb{Z}$.

  Solution: Nein

- $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 = 0\} \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 0\}$

  Solution: Ja

- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

  Solution: Nein

- $\{\{n \in \mathbb{N}\}n \text{ gerade}, \{n \in \mathbb{N}\}n \text{ ungerade}\}$ ist eine Partition von $\mathbb{Z}$.

  Solution: Nein

- $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 0\} \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = 0\}$

  Solution: Nein

- $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist durch 6 teilbar}\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\}$

  Solution: Ja

- Die Menge $\{(x, y) \in \{1, 2, 3\} \times \{2, 3\} \mid x \cdot y \text{ ist gerade}\}$ hat genau 3 Elemente.

  Solution: Nein

Aufgabe 6

Kreuzen Sie alle Eigenschaften der gegebenen Abbildung an.

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x, x^3)$.

  Solution: injektiv

- $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$.

  Solution: injektiv

- $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 + 2y$.

Solution: surjektiv

- $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$.

Solution: surjektiv

- $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, x - y)$.

Solution:

- $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto (x^2, x - y)$.

Solution:

- $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 - y$.

Solution: surjektiv

- $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 - 2y$.

Solution: surjektiv

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x^2, x^3)$.

Solution: injektiv

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Anzahlen.

- Anzahl der injektiven Abbildungen $\underline{3} \to \underline{7}$.

Solution: 210

- Anzahl der Abbildungen $\underline{5} \to \underline{5}$.

Solution: 3125

- Anzahl der surjektiven Abbildungen $\underline{5} \to \underline{5}$.

Solution: 120

- Anzahl der bijektiven Abbildungen $\underline{4} \to \underline{4}$.

Solution: 24

- Anzahl der surjektiven Abbildungen $\underline{9} \to \underline{2}$.

Solution: 510

- Anzahl der surjektiven Abbildungen $\underline{10} \to \underline{2}$.

Solution: 1022

- Anzahl der Abbildungen $\underline{4} \to \underline{6}$.

Solution: 1296

- Anzahl der bijektiven Abbildungen $\underline{6} \to \underline{6}$.

Solution: 720

- Anzahl der surjektiven Abbildungen $\underline{6} \to \underline{6}$.

Solution: 720

- Anzahl der Abbildungen $\underline{6} \to \underline{4}$.

Solution: 4096

Aufgabe 10

Es seien die folgenden Mengen gegeben: $A := \{n \in \mathbb{Z} \mid \ 0 \leq n \leq 10\}$ und $C := \{5, 6, 7, 8\}$. Außerdem seien die folgenden Abbildungen gegeben: $i : A \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$; $f : C \to A$, $n \mapsto n/2$ falls n gerade ist und $n \mapsto (n-1)/2$ falls n ungerade ist; $g : \mathbb{Z} \to A$, $z \mapsto r$, wobei $z = 11q+r$ mit $q, r \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r < 11$. Bei den Fragen nach Anzahlen geben Sie entweder eine Zahl oder das Wort `unendlich` ein.

- Wieviele Elemente hat das Urbild von $\{3, 4\}$ unter f?

Solution: 3

- Welche Kompositionen sind definiert? (Alle ankreuzen!) **A.**$i \circ f$ **B.**$f \circ i$ **C.**$i \circ g$ **D.**$g \circ i$ **E.**$f \circ g$ **F.**$g \circ f$

Solution: A,C,D,F

- Sei $h = g \circ i \circ f$. Wieviele Elemente hat die Faser $h^{-1}(\{3\})$

Solution: 2

- Wieviele nicht-leere Fasern hat f?

Solution: 3

- Wieviele Elemente hat das Bild von $g \circ i$?

Solution: 11

- Sei $h = g \circ i \circ f$. Wieviele Elemente hat die Faser $h^{-1}(\{1\})$

Solution: 0

- Wieviele Elemente hat das Urbild von $\{3, 5\}$ unter f?

Solution: 2

- Wieviele Elemente hat das Bild von $i \circ g$?

Solution: 11

- Wieviele Elemente hat das Urbild von $\{2, 3\}$ unter f?

Solution: 3

Aufgabe 11

Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ beliebige Abbildungen zwischen den Mengen A, B und C. Sind die folgenden Aussagen für alle solchen Abbildungen richtig?

- Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

Solution: Ja

- Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.

Solution: Nein

- Sind f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.

Solution: Ja

- Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

Solution: Ja

- Ist $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.

Solution: Nein

- Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

Solution: Ja

Aufgabe 12

Welche der folgenden Aussagen über Relationen sind wahr?

- Auf einer Menge mit drei Elementen gibt es genau 64 verschiedene symmetrische Relationen.

Solution: Ja

- Auf einer dreielementigen Menge gibt es genau 81 verschiedene Relationen.

Solution: Nein

- Auf einer Menge mit vier Elementen gibt es genau 12^2 verschiedene reflexive Relationen.

Solution: Nein

- Auf einer Menge mit drei Elementen gibt es genau 3 verschiedene Äquivalenzrelationen.

Solution: Nein

- Auf einer Menge mit drei Elementen gibt es genau 5 verschiedene Äquivalenzrelationen.

Solution: Ja

- Auf einer Menge mit vier Elementen gibt es genau 2^{12} verschiedene reflexive Relationen.

Solution: Ja

- Auf einer Menge mit vier Elementen gibt es genau 64 verschiedene symmetrische Relationen.

Solution: Nein

Aufgabe 13

Diese Fragen beziehen sich auf die untenstehende schriftliche Aufgabe. Bestimmen Sie zuerst die Formeln aus der schriftlichen Aufgabe und berechnen Sie dann damit die geforderten Anzahlen.

- Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{11}$, die symmetrisch und antisymmetrisch sind.

Solution: 2048

- Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{5}$, die reflexiv und antisymmetrisch sind.

Solution: 59049

- Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\{a, b, c, d, e\}$, die reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch sind.

Solution: 1

- Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{6}$, die antisymmetrisch sind.

Solution: 918330048

- Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{5}$, die eine Totalordnung sind.

Solution: 120

- Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\{t, u, v\}$, die reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch sind.

Solution: 1

- Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{4}$, die eine Totalordnung sind.

Solution: 24

- Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\{x, y, w, z\}$, die reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch sind.

Solution: 1

- Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{5}$, die antisymmetrisch sind.

Solution: 1889568

- Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{12}$, die symmetrisch und antisymmetrisch sind.

Solution: 4096

Aufgabe 15

Kreuzen Sie alle Zyklenschreibweisen an, die die gegebene Permutation beschreiben. Hierbei seien

$$\begin{array}{llll} a &= (1,2,5)(3,4,6) & b &= (2,5,1)(3,4,6) \\ c &= (1,5,2)(3,4,6) & d &= (5,2,1)(3,4,6) \\ e &= (4,6,3)(5,2,1) & & \end{array}$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solution: a,b

Aufgabe 16

Gegeben seien die folgenden Permutationen in Zyklenschreibweise:

$$\begin{aligned} h &= (1,4,7,10,3,8)(2,6,9,5) \\ k &= (1,3,10,7)(2,6,4)(5,8,9) \\ \ell &= (1,10,7,8,9)(2,3,6,5,4) \\ m &= (1,2,8,10,3,4)(5,9,7,6) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} a &= (1,6,2)(3,7,9,10,8) & b &= (2,5,8)(3,10,4,6,7) \\ c &= (1,6,8,7,4,3,2,9) & d &= (1,4,8,7,2,5,10,6) \\ e &= (1,3,2,9,8,7,5)(4,10,6) & f &= (1,3,5)(2,4,8,7,10,6,9) \\ g &= (1,6,2,5,9,4,3,7,10,8) & & \end{array}$$

Kreuzen sie die richtige Antwort an:

- $\ell \circ k =$

  Solution: g

- $m \circ k =$

  Solution: d

- $m \circ h =$

  Solution: b

- $m \circ \ell =$

  Solution: f

- $\ell \circ m =$

  Solution: e

- $h \circ m =$

  Solution: a

Aufgabe 17

Es sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$. Tragen Sie in das Antwortfeld die Ziffer ein, die man für i einsetzen muss, damit die angegebene Gleichung von Abbildungen gilt.

- $(1\ 2) \circ (2\ 5) \circ (3\ 9) \circ (i\ 6) \circ (7\ 8) \circ (9\ 6) \circ (1\ 6) = \sigma$

  Solution: 8

- $(4\ 5) \circ (1\ 5) \circ (9\ 8) \circ (3\ 8) \circ (i\ 2) \circ (8\ 7) \circ (2\ 4) \circ (7\ 4) \circ (1\ 4) = \sigma$

  Solution: 6

- $(1\ i) \circ (1\ 3) \circ (2\ 5) \circ (9\ 8) \circ (8\ 7) \circ (7\ 6) \circ (3\ 6) = \sigma$

  Solution: 2

- $(9\ 8) \circ (2\ 5) \circ (3\ 8) \circ (1\ 8) \circ (8\ 7) \circ (5\ 7) \circ (6\ i) = \sigma$

  Solution: 7

- $(2\ i) \circ (3\ 7) \circ (2\ 5) \circ (1\ 6) \circ (1\ 7) \circ (3\ 9) \circ (8\ 9) = \sigma$

  Solution: 1

Aufgabe 18

Berechnen Sie das Signum der folgenden Permutationen aus S_{12}. (Hinweis: Die Sätze im Skript 1.5.5 sind dabei hilfreich).

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 2 & 4 & 10 & 7 & 1 & 3 & 8 & 12 & 9 & 11 & 6 \end{pmatrix}$

Solution: +1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 7 & 5 & 11 & 1 & 8 & 12 & 6 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Solution: -1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 6 & 11 & 10 & 8 & 9 & 1 & 7 & 12 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Solution: -1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 2 & 10 & 3 & 12 & 1 & 5 & 8 & 7 & 9 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

Solution: -1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 10 & 2 & 3 & 11 & 12 & 8 & 6 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

Solution: -1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 6 & 10 & 3 & 12 & 4 & 5 & 2 & 9 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Solution: -1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 10 & 11 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}$

Solution: +1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 11 & 9 & 1 & 10 & 8 & 2 & 12 & 7 \end{pmatrix}$

Solution: +1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 10 & 6 & 11 & 1 & 9 & 8 & 5 & 4 & 12 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Solution: -1

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 11 & 8 & 5 & 12 & 3 & 6 & 1 & 7 & 9 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Solution: +1

Aufgabe 20

Wir ziehen aus einem Vorrat an eindeutig nummerierten Kugeln (z.B. Lottokugeln) nach dem angegebenen Modus. Durch welche mathematische Struktur wird das Ergebnis dieses Vorgangs beschrieben?

- Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge.

  Solution: Tupel

- Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge.

  Solution: Permutation

- Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

  Solution: Multimenge

- Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

  Solution: Kombination

- Abweichend von der bisherigen Aufgabenstellung sind die Kugeln nun nicht mehr eindeutig nummeriert, sondern sind in einer von endlich vielen möglichen Farben gefärbt. Es wird angenommen, dass der Vorrat an Kugeln in jeder Farbe gross ist im Vergleich zur Anzahl der Ziehungen. Wir ziehen mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge.

  Solution: Tupel

- Abweichend von der bisherigen Aufgabenstellung sind die Kugeln nun nicht mehr eindeutig nummeriert, sondern sind in einer von endlich vielen möglichen Farben gefärbt. Es wird angenommen, dass der Vorrat an Kugeln in jeder Farbe gross ist im Vergleich zur Anzahl der Ziehungen. Wir ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

  Solution: Multimenge

Aufgabe 21

Mehr oder weniger? Es sei A eine endliche Menge mit mindestens zwei Elementen.

- Gibt es mehr k-Permutationen aus A als k-Kombinationen, oder weniger?

  Solution: mehr

- Gibt es mehr k-Multimengen aus A als k-Kombinationen, oder weniger?

Solution: mehr

- Gibt es mehr k-Permutationen aus A als k-Tupel, oder weniger?

Solution: weniger

- Gibt es mehr k-Multimengen aus A als k-Tupel, oder weniger?

Solution: weniger

Aufgabe 22

Bitte tragen Sie ganze Zahlen als Ergebnisse ein. Es empfiehlt sich, einen Taschenrechner zu benutzen.

- Wieviele Wörter lassen sich aus den vier Buchstaben `R,W,T,H` bilden? (Jeder der aufgelisteten Buchstaben soll genau einmal im Wort vorkommen.)

Solution: 24

- Bei einer Tagung sollen 10 verschiedene Leute jeweils einmal vortragen. Wieviele mögliche Vortragsprogramme gibt es noch, wenn der erste und letzte Vortrag bereits fest besetzt sind?

Solution: 40320

- Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es beim gleichzeitigen Wurf von 5 Würfeln?

Solution: 252

- Wieviele 7-stellige Dezimalzahlen gibt es, in denen jede Ziffer höchstens einmal vorkommt?

Solution: 544320

- Wieviele Passwörter der Länge 5 lassen sich aus den 52 Gross- und Kleinbuchstaben bilden?

Solution: 380204032

- Wieviele 8-stellige Dezimalzahlen gibt es, in denen jede Ziffer höchstens einmal vorkommt?

Solution: 1632960

- Wieviele Wörter lassen sich aus den fünf Buchstaben `M,A,T,H,E` bilden? (Jeder der aufgelisteten Buchstaben soll genau einmal im

Wort vorkommen.)

Solution: 120

- Wieviele Passwörter der Länge 4 lassen sich aus den 95 druckbaren ASCII-Zeichen bilden?

Solution: 81450625

Aufgabe 23

Bitte tragen Sie ganze Zahlen als Ergebnisse ein. Es empfiehlt sich, einen Taschenrechner zu benutzen.

- Wieviele Dezimalzahlen mit bis zu zehn Ziffern enthalten die Ziffer 3?

Solution: 6513215599

- Wieviele Bitfolgen der Länge 24 gibt es, bei denen irgendwo ein Bit zweimal hintereinander vorkommt?

Solution: 16777214

- Von 90 Packungen Eiern enthalten 7 ein beschädigtes Ei. Wieviele Stichproben von 10 Packungen gibt es, von denen keine ein beschädigtes Ei enthält?

Solution: 2432332329570

- Wieviele Passwörter der Länge 4 lassen sich aus den 52 Gross- und Kleinbuchstaben bilden, die ein A und kein Zeichen doppelt enthalten?

Solution: 499800

- Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es beim gleichzeitigen Wurf von 6 Würfeln, in denen eine

$$1 Augen$$

oder eine

$$2 Augen$$

vorkommt?

Solution: 378

- Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es beim gleichzeitigen Wurf von 5 Würfeln, in denen eine 6 Augen vorkommt?

Solution: 126

- Von 90 Packungen Eiern enthalten 7 ein beschädigtes Ei. Wieviele Stichproben von 10 Packungen gibt es, von denen mindestens eine ein beschädigtes Ei enthält?

Solution: 3288313152333

- Wieviele Passwörter der Länge 4 lassen sich aus den 52 Gross- und Kleinbuchstaben bilden, die ein X und kein Zeichen doppelt enthalten?

Solution: 499800

- Wieviele Bitfolgen der Länge 32 gibt es, bei denen irgendwo ein Bit zweimal hintereinander vorkommt?

Solution: 4294967294

Aufgabe 24

Bitte tragen Sie ganze Zahlen als Ergebnisse ein. Es empfiehlt sich, einen Taschenrechner zu benutzen.

- Wieviele Wörter lassen sich durch Anordnung der Buchstaben `H,O,C,H,S,C,H,U,L,E` bilden? (Es ist gemeint, dass die Buchstaben genau in der angegebenen Häufigkeit verwendet werden, die Wörter somit insbesondere die Länge 10 haben.)

Solution: 302400

- Wieviele Wörter lassen sich durch Anordnung der Buchstaben `R,E,C,H,N,E,R` bilden? (Es ist gemeint, dass die Buchstaben genau in der angegebenen Häufigkeit verwendet werden, die Wörter somit insbesondere die Länge 7 haben.)

Solution: 1260

- Wieviele Möglichkeiten gibt es, 40 Studierende 2 Tutoren zuzuordnen, wenn die Tutoren gleichviele Studierende betreuen sollen?

Solution: 137846528820

- Bei einem Seminar sollen 6 Studierende jeweils zwei Vorträge halten. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Vortragenden?

Solution: 7484400

- Wieviele Wörter lassen sich durch Anordnung der Buchstaben `K,L,A,U,S,U,R` bilden? (Es ist gemeint, dass die Buchstaben genau in der angegebenen Häufigkeit verwendet werden, die Wörter somit insbesondere die Länge 7 haben.)

Solution: 2520

- Bei einem Seminar sollen 4 Studierende jeweils drei Vorträge halten. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Vortragenden?

Solution: 369600

- Wieviele Wörter lassen sich durch Anordnung der Buchstaben `E,X,Z,E,L,L,E,N,Z` bilden? (Es ist gemeint, dass die Buchstaben genau in der angegebenen Häufigkeit verwendet werden, die Wörter somit insbesondere die Länge 9 haben.)

Solution: 15120

- Wieviele Möglichkeiten gibt es, 30 Studierende 3 Tutoren zuzuordnen, wenn die Tutoren gleichviele Studierende betreuen sollen?

Solution: 5550996791340

Aufgabe 27

Bitte tragen Sie ganze Zahlen als Ergebnisse ein. Es empfielt sich, einen Taschenrechner zu benutzen. Bei allen Passwortaufgaben werden die Passwörter aus den 95 druckbaren ASCII-Zeichen gebildet. Wir teilen diese ASCII-Zeichen auf in 26 Grossbuchstaben, 26 Kleinbuchstaben, 10 arabische Ziffern und 33 Sonderzeichen.

- Wieviele Passwörter der Länge 5, in denen mindestens ein Kleinbuchstabe und ein Sonderzeichen vorkommt, sind möglich?

Solution: 5318111370

- Wieviele Passwörter der Länge 5, die eine Ziffer und ansonsten nur Buchstaben enthalten, sind möglich?

Solution: 365580800

- Wieviele Passwörter mit höchstens 5 Zeichen aus paarweise verschiedenen Buchstaben sind möglich?

Solution: 318507905

- Wieviele Passwörter der Länge 5, in denen mindestens ein Groß- und ein Kleinbuchstabe, sowie mindestens eine Ziffer und ein Sonderzeichen vorkommen, sind möglich?

Solution: 1271556000

- Wieviele Teilmengen mit höchstens 5 Elementen hat die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \le i \le 9\}$?

Solution: 382

- Bei einer Quizshow dürfen 3 Personen mitspielen. Sie werden aus 161 Zuschauerinnen und 119 Zuschauern ausgesucht. Wieviele Möglichkeiten gibt es, eine Zuschauerin und zwei Zuschauer auszusuchen?

Solution: 1130381

- Wieviele Passwörter der Länge 5, in denen mindestens ein Grossbuchstabe und eine Ziffer vorkommt, sind möglich?

Solution: 2451649200

- Wieviele Passwörter der Länge 5, die ein Sonderzeichen und ansonsten nur Buchstaben enthalten, sind möglich?

Solution: 1206416640

- Wieviele Teilmengen mit höchstens 4 Elementen hat die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \le i \le 10\}$?

Solution: 386

- Bei einer Quizshow dürfen 3 Personen mitspielen. Sie werden aus 161 Zuschauerinnen und 119 Zuschauern ausgesucht. Wieviele Möglichkeiten gibt es, zwei Zuschauerinnen und einen Zuschauer auszusuchen?

Solution: 1532720

- Wieviele Passwörter der Länge 5, in denen mindestens ein Gross- und ein Kleinbuchstabe vorkommt, sind möglich?

Solution: 4756755120

Aufgabe 28

Berechnen Sie die gefragten Anzahlen.

- Wieviele Permutationen auf 4 Elementen haben genau 3 Zykel?

Solution: 6

- Wieviele Permutationen auf 6 Elementen haben genau einen Zykel?

Solution: 120

- Wieviele Möglichkeiten gibt es, 5 Studenten auf 4 (nicht-leere) Tutoriengruppen aufzuteilen? Die Gruppen sind nicht nummeriert.

Solution: 10

- Wieviele surjektive Abbildungen gibt es von $\underline{6}$ nach $\{u, w, x, y, z\}$?

Solution: 1800

- Es teilen sich 4 Philosophen in 2 Diskussionsgruppen auf, und jede Gruppe setzt sich jeweils im Kreis hin (Gruppen mit nur einer Person sind möglich). Wieviele mögliche Sitzordnungen gibt es? Weder die Gruppen noch die Plätze sind nummeriert.

Solution: 11

- Wieviele Möglichkeiten gibt es, 4 Studenten auf 2 (nicht-leere) Tutoriengruppen aufzuteilen? Die Gruppen sind nicht nummeriert.

Solution: 7

- Wieviele Möglichkeiten gibt es, 6 Studenten auf 3 (nicht-leere) Tutoriengruppen aufzuteilen? Die Gruppen sind nicht nummeriert.

Solution: 90

- Wieviele Permutationen auf 5 Elementen haben genau 4 Zykel?

Solution: 10

- Es teilen sich 5 Philosophen in 2 Diskussionsgruppen auf, und jede Gruppe setzt sich jeweils im Kreis hin (Gruppen mit nur einer Person sind möglich). Wieviele mögliche Sitzordnungen gibt es? Weder die Gruppen noch die Plätze sind nummeriert.

Solution: 50

- Wieviele Permutationen auf 5 Elementen haben genau einen Zykel?

Solution: 24

Aufgabe 29

Entscheiden Sie, ob die angegebenen Gleichungen/Aussagen richtig sind.

- Gilt $S_{n+1,k} = S_{n-1,k-2} + kS_{n-1,k-1} + kS_{n,k}$ für $2 \leq k \leq n-1$?

Solution: nein

- Gilt $s_{n+1,k} = s_{n,k-1} + ns_{n-1,k-1} + n(n-1)s_{n-1,k}$ für $2 \leq k \leq n-1$?

Solution: ja

- Es gibt mehr Partitionen von $\underline{100}$ in genau 97 Teile als es Permutationen von $\underline{100}$ mit genau 97 disjunkten Zykeln gibt.

Solution: nein

- Gilt $S_{n+1,k} = S_{n,k-1} + kS_{n-1,k-1} + k^2 S_{n-1,k}$ für $2 \leq k \leq n-1$?

Solution: ja

- Es gibt mehr Permutationen von $\underline{100}$ mit genau 97 disjunkten Zykeln als es Partitionen von $\underline{100}$ in genau 97 Teile gibt.

Solution: ja

Aufgabe 30

Sei $G = G(V, E)$ der folgende Graph: (Die Gesamtheit des Clubs der Denker hat sich noch nicht die Mühe gemacht Grafiken einzubinden. Sorry! Bezeichnung des Bildes: "G2a")

- Wieviele Kanten hat der auf $\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ induzierte Teilgraph?

Solution: 3

- Wieviele Pfade der Länge 3 gibt es von 1 nach 4?

Solution: 3

- Was ist die größte Länge einer Tour in G?

Solution: 13

- Was ist die größte Länge eines Kreises in G?

Solution: 9

- Wieviele Knoten mit geradem Grad hat G?

Solution: 7

- Wieviele Kantenzüge der Länge 3 gibt es von 1 nach 4?

Solution: 3

- Wieviele Knoten mit ungeradem Grad hat G?

Solution: 2

- Wieviele Kanten hat der auf $\{1, 3, 5, 8, 9\}$ induzierte Teilgraph?

Solution: 3

Aufgabe 32

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten, m Kanten und r Zusammenhangskomponenten. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Wir nennen einen Graph *kreisfrei*, wenn er keine Kreise besitzt.

- Wenn G kreisfrei und zusammenhängend ist, dann hat, für jedes $v \in V$, der auf $V \setminus \{v\}$ induzierte Teilgraph von G ein oder zwei

Komponenten.

Solution: Nein

- Fügt man m' neue Kanten zu G hinzu und der so entstandene Graph G' ist kreisfrei, so hat G' genau $r - m'$ Komponenten.

Solution: Ja

- In einem kreisfreien Graphen ist jede Kante eine Brücke.

Solution: Ja

- Entfernt man m' Kanten aus G, so hat der entstandene Graph $\leq r - m'$ Komponenten.

Solution: Nein

- Wenn G kreisfrei und zusammenhängend ist, dann hat $(V, E \setminus \{e\})$ für jedes $e \in E$ zwei Komponenten.

Solution: Ja

- Fügt man m' neue Kanten zu G hinzu, so hat der entstandene Graph mindestens $r - m'$ Komponenten.

Solution: Ja

- Ist G kreisfrei und man entfernt m' Kanten aus G, so hat der entstandene Graph genau $r - m'$ Komponenten.

Solution: Nein

Aufgabe 33

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen für beliebige Graphen $G = (V, E)$ richtig sind.

- Ist G kreisfrei, so ist die Komponentenzahl von G gleich $|V| - |E|$.

Solution: Ja

- Wenn G zusammenhängend ist, dann gilt $|E| > |V| - 1$.

Solution: Nein

- Wenn G ein Baum ist, dann ist jede Kante von G eine Brücke.

Solution: Ja

- Wenn $|V| = n$ und $|E| > (n-1)(n-2)/2$ ist, dann ist (V, E) zusammenhängend.

Solution: Ja

- Ist die Komponentenzahl von G gleich $|V|-|E|$, so ist G kreisfrei.

Solution: Ja

- Wenn G zusammenhängend ist, dann gilt $|E| \geq |V| - 1$.

Solution: Ja

- Wenn jede Kante von G eine Brücke ist, dann ist G ein Baum.

Solution: Nein

- Wenn G zusammenhängend ist und einen Kreis enthält, dann gibt es eine Kante $e \in E$, so dass auch $(V, E \setminus \{e\})$ zusammenhängend ist.

Solution: Ja

- Die Komponentenzahl von G ist stets gleich $|V| - |E|$.

Solution: Nein

- Die Komponentenzahl von G ist stets $\leq |V| - |E|$.

Solution: Nein

Aufgabe 34

Ergänzen Sie die Lücke auf die richtige Weise. (Falls mehrere Antworten richtig sind, ist die beste Schranke auszuwählen.)

- Ein unzusammenhängender Graph mit n Knoten enthält maximal ... Kanten. **A.**n **B.**$n-1$ **C.**$\binom{n}{2}$ **D.**$\binom{n-1}{2}$

Solution: D

- Ein zusammenhängender Graph mit n Knoten, der eine Eulertour besitzt, enthält mindestens ... Kanten. **A.**n **B.**$n-1$ **C.**$\binom{n}{2}$ **D.**$\binom{n-1}{2}$

Solution: A

- Ein Graph mit n Knoten enthält maximal ... Kanten. **A.**n **B.**$n-1$ **C.**$\binom{n}{2}$ **D.**$\binom{n-1}{2}$

Solution: C

- Ein zusammenhängender Graph mit n Knoten enthält mindestens ... Kanten. **A.**n **B.**$n-1$ **C.**$\binom{n}{2}$ **D.**$\binom{n-1}{2}$

Solution: B

- Ein Graph mit n Knoten, der einen Hamiltonkreis besitzt, enthält mindestens ... Kanten. **A.**n **B.**$n-1$ **C.**$\binom{n}{2}$ **D.**$\binom{n-1}{2}$

  Solution: A

Aufgabe 35

Stimmt die Aussage?

- Es gibt Graphen, die eine Eulertour aber keinen Hamiltonkreis besitzen.

  Solution: Ja

- In jedem Graph ist die Anzahl der Knoten mit geradem Grad ungerade.

  Solution: Nein

- Jeder Teilgraph eines Graphen G hat weniger oder gleich viele Komponenten wie G.

  Solution: Nein

- Jeder Knoten vom Grad 1 ist zu einer Brücke inzident.

  Solution: Ja

- Jeder Hamiltonkreis ist eine Eulertour.

  Solution: Nein

- Jede Eulertour ist ein Kreis.

  Solution: Nein

- Jeder Teilgraph eines Graphen G hat gleich viele oder mehr Komponenten als G.

  Solution: Nein

- In jedem Graph ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

  Solution: Ja

- Jede Brücke ist zu einem Knoten vom Grad 1 inzident.

  Solution: Nein

Aufgabe 38

Zeichnen und untersuchen Sie den Graphen $G = (\underline{n}, E)$ mit n und E wie jeweils angegeben.

- $n = 5, E = \{(1,2),(3,4)\}$. Wieviele Komponenten enthält dieser Wald?

Solution: 3

- $n = 13, E = \{\{1,4\},\{1,5\},\{2,6\},\{2,7\},\{3,9\},\{4,12\},\{5,13\}, \{7{,}11\}, \{8,9\},\{9,10\}\}$. Ist G ein Wald, Baum oder keins davon?

Solution: Wald

- $n = 5, E = \{(1,2),(2,3),(3,4),(3,5),(4,5)\}$. Wieviele verschiedene Spannbäume enthält dieser Graph?

Solution: 3

- $n = 13, E = \{\{1,2\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,6\},\{3,9\},\{3,12\},\{4,12\},\{5,13\}, \{7,11\},\{8,9\},\{9,10\},\{10,11\}\}$. Ist G ein Wald, Baum oder keins davon?

Solution: Baum

- $n = 9, E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,5\},\{3,4\},\{7,8\},\{8,9\}\}$. Wieviele Blätter gibt es?

Solution: 5

- $n = 11, E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,7\},\{5,8\},\{5,9\}, \{6,10\},\{7,11\}\}$. Wieviele Blätter gibt es?

Solution: 4

- $n = 11, E = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,5),(3,6),(4,7),(5,8),(5,9),(6,10), (7,11)\}$. Wieviele Komponenten enthält dieser Wald?

Solution: 1

- $n = 5, E = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$.
  Wieviele Blätter gibt es?

Solution: 5

- $n = 9, E = \{(1,2),(1,3),(2,5),(3,4),(7,8),(8,9)\}$. Wieviele Komponenten enthält dieser Wald?

Solution: 3

Aufgabe 39

Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage richtig ist.

- Es gibt einen zusammenhängenden Graphen in dem jeder Knoten einen geraden Grad hat und der zwei benachbarte Kanten e und

f hat, die aber auf keiner Eulertour von G hintereinander durchlaufen werden.

Solution: Ja

Aufgabe 40

Sei $n \geq 2$. Sei K_n der vollständige Graph auf n Knoten, d.h. zwischen je zwei Knoten von K_n gibt es eine Kante. Sei $\ell \in \mathbb{N}$ und u, v zwei verschiedene Knoten von K_n. Dann ist die Anzahl der Pfade von u nach v der Länge ℓ in K_n:

- **A.** $\binom{n-1}{\ell-1}(\ell-1)!$ **B.** $\binom{n-1}{\ell}(\ell)!$ **C.** $\binom{n-2}{\ell-1}(\ell-1)!$ **D.** $\binom{n-2}{\ell}(\ell)!$

Solution: C

Aufgabe 41

Sei $G = G(V, E)$ der folgende Graph: (Die Gesamtheit des Clubs der Denker hat sich noch nicht die Mühe gemacht Grafiken einzubinden. Sorry! Bezeichnung des Bildes: "G2a")

- Wieviele Zusammenhangskomponenten hat der auf $\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ induzierte Teilgraph?

  Solution: 3

- Besitzt G einen Eulerzug?

  Solution: Ja

- Besitzt G eine Eulertour?

  Solution: Nein

- Besitzt G einen Hamiltonkreis?

  Solution: Ja

- Wieviele Zusammenhangskomponenten hat der auf $\{1, 3, 5, 8, 9\}$ induzierte Teilgraph?

  Solution: 3

Aufgabe 43

Bestimmen Sie alle minimalen Spannbäume des folgenden gewichteten

Graphen (die Kanten sind mit ihren Gewichten versehen):

$$[2]\bullet[2]e, b, -2se, b, -1[2]s, l, -12[2]\bullet se, t, -7$$

$$\bullet ne, t, -4se, b, -11[2]\bullet ne, b, -3se, t, -5[2]\bullet$$

$$[2]\bullet ne, t, -9[2]e, t, -10[2]\bullet[2]n, r, -6ne, b, -8$$

- Wieviele verschiedene minimale Spannbäume gibt es?

  Solution: 1

- Ist hierfür ein Greedy-Algorithmus geeignet?

  Solution: Ja

- Geben Sie einen minimalen Spannbaum an. Tragen Sie dazu die Längen der Kanten des Spannbaumes in aufsteigender Reihenfolge und direkt hintereinander (ohne Leerzeichen dazwischen) ein. Der Spannbaum mit den Kanten vom Gewicht 4,2,7,8,10,9 (er ist nicht minimal!) wird beispielsweise als die Zeichenkette '2478910' eingegeben.

  Solution: 124579

- Welchen Algorithmus kann man hier benutzen?

  Solution: Kruskal

- Welches Gewicht hat jeder minimale Spannbaum?

  Solution: 28

Aufgabe 44

Es sei $G = (V, E)$ ein Baum. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Definition: Wir nennen einen Pfad $(v_0, \ldots, v_l)$ *maximal*, wenn er nicht verlängerbar ist, d.h. wenn kein Pfad der Form $(w, v_0, \ldots, v_l)$ oder $(v_0, \ldots, v_l, w)$ in dem entsprechenden Graphen existiert.

- Sei $V' \subseteq V$ eine Teilmenge von Knoten, so dass $V \setminus V'$ nur aus Blättern besteht. Dann ist der auf V' induzierte Teilgraph auch ein Baum.

  Solution: Ja

- Ist ein Pfad $(v_0, \ldots, v_l)$ in G maximal, so sind v_0 und v_l Blätter.

  Solution: Ja

- Ist $(v_0, \ldots, v_l)$ ein Pfad in G mit $\deg v_0 = \deg v_l = 1$, so ist er maximal.

  Solution: Ja

- Jeder Teilgraph von G ist ein Wald.

  Solution: Ja

- Für jede Teilmenge $E' \subseteq E$ ist (V, E') ein Wald.

  Solution: Ja

- Ist $(v_0, \ldots, v_l)$ ein Pfad in G mit Blättern v_0 und v_l, so ist er maximal.

  Solution: Ja

- Ist ein Pfad $(v_0, \ldots, v_l)$ in G maximal, so gilt $\deg v_0 = \deg v_l = 1$.

  Solution: Ja

Aufgabe 47

Gelten die folgenden Aussagen?

- (B, xor) ist eine Gruppe, wobei $B = \{w, f\}$ die Menge der Wahrheitswerte ist.

  Solution: Ja

- Die ungeraden ganzen Zahlen bilden bzgl. der üblichen Addition und Multiplikation einen Ring.

  Solution: Nein

- Die surjektiven Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ bilden eine Gruppe bzgl. der Komposition.

  Solution: Nein

- Die bijektiven Abbildungen einer fünfelementigen Menge in sich selbst bilden bzgl. der Komposition eine abelsche Gruppe.

  Solution: Nein

- $(B, \vee)$ ist eine Gruppe, wobei $B = \{w, f\}$ die Menge der Wahrheitswerte ist.

  Solution: Nein

- Die geraden ganzen Zahlen bilden bzgl. der üblichen Addition und Multiplikation einen Ring.

  Solution: Nein

- Die injektiven Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ bilden eine Gruppe bzgl. der Komposition.

Solution: Nein

Aufgabe 48

Ist U eine Untergruppe von G?

- $(G, \cdot)$ eine beliebige abelsche Gruppe, $U = \{x \cdot x \mid \ x \in G\}$.

Solution: Ja

- $G = (S_n, \circ), U = \{\pi \in S_n\}(\pi) = -1$.

Solution: Nein

- G eine beliebige Gruppe, U_1 und U_2 beliebige Untergruppen von G und $U = U_1 \cup U_2$.

Solution: Nein

- $G = (\mathbb{Z}, +), U =$Menge der ungeraden ganzen Zahlen.

Solution: 6

- G eine beliebige Gruppe, U_1 und U_2 beliebige Untergruppen von G und $U = U_1 \cap U_2$.

Solution: Ja

- $(G, \cdot)$ eine beliebige abelsche Gruppe, $U = \{x \cdot x \cdot x \mid \ x \in G\}$.

Solution: Ja

- $G = (S_n, \circ), U = \{\pi \in S_n\}(\pi) = 1$.

Solution: Ja

- $G = (\mathbb{Z}, +), U =$Menge der geraden ganzen Zahlen.

Solution: Ja

Aufgabe 49

Wieviele Untergruppen hat die Gruppe $(S_3, \circ)$?

- Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $x \in G$ und $\lambda_x : G \to G$, $g \mapsto x \cdot g$. Welche der folgenden Eigenschaften hat λ_x: (A) surjektiv und nicht injektiv, (B) injektiv und nicht surjektiv, (C) bijektiv (D) nicht injektiv und nicht surjektiv?

Solution: C

Aufgabe 50

Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & -1 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Gelten die folgenden Aussagen?

- Die Matrix A hat 3 Zeilen und zwei Spalten.

  Solution: Nein

- $a_{11} + a_{23} = a_{21} + a_{22}$

  Solution: Ja

- $a_{11} + a_{23} = a_{21} + a_{12}$

  Solution: Nein

Aufgabe 51

Betrachten Sie die folgenden Matrizen mit reellen Koeffizienten. $A := \begin{pmatrix} 14 & -13 \\ 1 & -19 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 14 & -13 & 2 \\ 1 & -19 & 5 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 9 & 12 & -24 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.
Entscheiden Sie für jeden der folgenden Ausdrücke, ob er sinnvoll ist und eine Matrix $X = (x_{ij})$ definiert. Falls nein, kreuzen Sie `Q` an (für *Quatsch*) und sonst kreuzen sie den Eintrag x_{11} an.

- $X = ADB - 4C^2$

  Solution: 79

- $X = DBD$

  Solution: Q

- $X = 7BA - 193D^2$

  Solution: 0

- $X = CAD + A$

  Solution: 180

- $X = D^3B - C$

  Solution: Q

- $X = CAC$

  Solution: Q

- $X = C^3A - D$

  Solution: Q

- $X = 4AB - 183C$

  Solution: 0

- $X = ABA - 170A$

  Solution: 62

Aufgabe 55

Berechnen Sie jeweils den größten gemeinsamen Teiler d der beiden Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie ferner Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda \cdot a + \mu \cdot b = d$. Damit die Antwort eindeutig wird, sind λ, μ so zu finden, dass $0 \leq \lambda < \frac{b}{d}$ ist. Geben Sie dann die geforderten Werte ein.

- λ für $a = 987$ und $b = 610$.

  Solution: 233

- μ für $a = 247$ und $b = 323$.

  Solution: -3

- d für $a = 75789033$ und $b = 309264066$.

  Solution: 123

- d für $a = 65432100$ und $b = 12345600$.

  Solution: 300

- d für $a = 2561792$ und $b = 2562304$.

  Solution: 256

- μ für $a = 75789033$ und $b = 309264066$.

  Solution: -160402

- μ für $a = 987$ und $b = 610$.

  Solution: -377

- λ für $a = 75789033$ und $b = 309264066$.

  Solution: 654535

- λ für $a = 2561792$ und $b = 2562304$.

  Solution: 5004

- d für $a = 987$ und $b = 610$.

  Solution: 1

Aufgabe 56

Beantworten Sie die Fragen. Falls nach einer Restklasse gefragt ist, so ist jeweils der kleinste nicht-negative Repräsentant dieser Klasse einzugeben (er ist eindeutig). Geben Sie '-' ein, falls es keine Restklasse so wie gesucht gibt (z.B. falls keine Lösung oder kein Inverses existiert).

- Sei $n = 2562304$. Wie lautet eine Lösung der Gleichung $\overline{2561792} \cdot x = \overline{128}$ in $\mathbb{Z}_n$?

  Solution: -

- Was ist $\bar{3}^{1000}$ in $\mathbb{Z}_7$?

  Solution: 4

- Sei $n = 37$. Wie lautet das Inverse von $\overline{-18}$ in $\mathbb{Z}_n$?

  Solution: 2

- Sei $n = 247$. Wie lautet eine Lösung der Gleichung $\overline{323} \cdot x = \overline{38}$ in $\mathbb{Z}_n$?

  Solution: 111,124,137,150,163,176,189,20,202,215,228,241,33,46,59,7,72,85,98

- Sei $n = 91$. Ist $\overline{13}$ invertierbar in $\mathbb{Z}_n$?

  Solution: Nein

- Sei $n = 610$. Wie lautet eine Lösung der Gleichung $\overline{987} \cdot x = \overline{2}$ in $\mathbb{Z}_n$?

  Solution: 466

- Sei $n = 12345$. Ist $\overline{9}$ invertierbar in $\mathbb{Z}_n$?

  Solution: Nein

- Wieviele Einheiten besitzt $\mathbb{Z}_{51}$?

  Solution: 32

- Sei $n = 99$. Wie lautet das Inverse von $\overline{19}$ in $\mathbb{Z}_n$?

  Solution: 73

- Sei $n = 37$. Wie lautet das Inverse von $\overline{-72}$ in $\mathbb{Z}_n$?

  Solution: 19

- Sei $n = 91$. Ist $\overline{90}$ invertierbar in $\mathbb{Z}_n$?

  Solution: Ja

- Sei $n = 234567$. Ist $\overline{15}$ invertierbar in $\mathbb{Z}_n$?

  Solution: Nein

- Was ist $\bar{2}^{1000}$ in $\mathbb{Z}_7$?

Solution: 2

- Sei $n = 65432100$. Wie lautet eine Lösung der Gleichung $\overline{12345600} \cdot x = \overline{30}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: -

Aufgabe 60

Die Polynome in dieser Aufgabe haben Koeffizienten in den reellen Zahlen. Wenn nach dem ggT von zwei Polynomen gefragt wird, dann ist der normierte ggT gemeint. Wenn als Antwort nach einem Polynom gefragt wird, so geben Sie die Liste der Koeffizienten durch Kommas getrennt an; fangen Sie beim Hauptkoeffzient an und hören Sie mit dem absoluten Koeffizienten auf (1 und 0 als Koeffizient werden mitgeschrieben). Beispiel $X^4 - 3X^2 + X + 8$ geben Sie ein als: `1,0,-3,1,8`.

- Ist $2X + 3$ ein Teiler von $2X^6 + 3X^5 - 6X^4 - 9X^3 + 12X + 18$?

Solution: Ja

- Ist $4X^5 - 3X$ ein Teiler von $4X^{12} - 3X^8 - 8X^5 + 6X$?

Solution: Ja

- Was ist der ggT von $X^5 - 3X^4 + 2X^3 - X^2 + 3X - 2$ und $X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$?

Solution:

- Was ist der Quotient von $4X^6 - 15X^5 + 11X^4 - 22X^3 + 24X^2 - 17X + 6$ und $X^4 - 3X^3 - 4X + 3$.

Solution:

- Was ist der ggT von $X^5 - 1$ und $X^6 + 1$?

Solution:

- Was ist der ggT von $X^3 + 3X^2 + X + 3$ und $2X^2 + 2X - 12$?

Solution:

- Ist $2X + 3$ ein Teiler von $2X^6 + 3X^5 - 4X^4 - 9X^3 + 12X + 18$?

Solution: Nein

- Was ist der Quotient von $4X^6 - 15X^5 + 11X^4 + 10X^3 - X + 6$ und $X^4 - 3X^3 + 4X + 3$.

Solution:

- Was ist der ggT von $X^7 - 1$ und $X^4 + 1$?

Solution:

- Ist $4X^5 - 3X$ ein Teiler von $4X^{12} - 3X^8 - 6X^5 + 6X$?

Solution: Nein

- Was ist der ggT von $2X^2 - 10X + 12$ und $3X^3 - 9X^2 + 2X - 6$?

Solution:

Aufgabe 61

Wir betrachten verschiedene Körper K und Polynome über K in der Unbestimmten X. Weiter betrachten wir zu jedem Polynom $f(X) = a_kX^k + \ldots + a_1X + a_0$ und $c \in K$ die *Polynomfunktion* $K \to K$, $c \mapsto f(c) = a_kc^k + \ldots + a_1c + a_0$. Geben Sie wie in früheren Aufgaben ein Ergebnis in einem endlichen Körper $\mathbb{Z}_n$ als ganze Zahl im Bereich von 0 bis $n - 1$ an.

- Sei $K = \mathbb{Z}_3$. Wieviele Polynomfunktionen $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ gibt es?

Solution: 27

- Sei $K = \mathbb{Z}_3$. Wieviele Polynome gibt es vom Grad 7 über K?

Solution: 4374

- Sei $K = \mathbb{Z}_5$ und $f(X) = X^5 - 3X^4 + 1$. Geben Sie die Summe $\sum_{c \in \mathbb{Z}_5} f(c)$ an.

Solution: 3

- Sei $K = \mathbb{Z}_7$. Sind die Polynomfunktionen, die durch $X^8 + 2X^7 + 6X^2 + 5X$ und $X^8 + 5X^7 + 6X^2 + 2X$ beschrieben werden, gleich?

Solution: Ja

- Sei $K = \mathbb{R}$. Sind die Polynomfunktionen, die durch $X^8 - 2X^7 - 14X^6 + 28X^5 + 49X^4 - 98X^3 - 36X^2 + 72$ und $X^8 + 2X^7 - 14X^6 - 28X^5 + 49X^4 + 98X^3 - 36X^2 - 72$ beschrieben werden, gleich?

Solution: Nein

- Sei $K = \mathbb{Z}_5$. Wieviele Polynome gibt es vom Grad 5 über K?

Solution: 12500

- Sei $K = \mathbb{Z}_5$ und $f(X) = X^5 - 3X^3 + 1$. Geben Sie die Summe $\sum_{c \in \mathbb{Z}_5} f(c)$ an.

Solution: 0

- Sei $K = \mathbb{R}$. Sind die Polynomfunktionen, die durch $X^8 + X^7 - 14X^6 - 14X^5 + 49X^4 + 49X^3 - 36X^2 - 36X$ und $X^8 - X^7 - 14X^6 + 14X^5 + 49X^4 - 49X^3 - 36X^2 + 36X$ beschrieben werden, gleich?

Solution: Nein

- Sei $K = \mathbb{Z}_7$. Sind die Polynomfunktionen, die durch $X^8 + X^7 + 6X^2 + 6X$ und $X^8 + 6X^7 + 6X^2 + X$ beschrieben werden, gleich?

Solution: Ja

Aufgabe 62

Wir betrachten ein RSA Verschlüsselungssystem und bezeichnen die Parameter wie in der Vorlesung. Die Primzahlen $p = 101$ und $q = 211$ seien für diese Aufgabe fest gewählt. Nachrichten sind Elemente aus $\mathbb{Z}_n$ wobei $n = pq$ (ohne Querstrich notiert).

- Kann $k = 2198$ als Verschlüsselungsexponent gewählt werden?

Solution: Nein

- Wieviele verschiedene Nachrichten können mit dem RSA-System in dieser Aufgabe verschlüsselt werden?

Solution: 21311

- Der Verschlüsselungsexponent sei $k = 19$ und es sei $y = 16854$ eine verschlüsselte Nachricht. Wie lautet die unverschlüsselte Nachricht x?

Solution: 4321

- Wenn als Verschlüsselungsexponent $k = 13$ gewählt ist, was ist der Entschlüsselungsexponent l?

Solution: 8077

- Wählen Sie als Verschlüsselungsexponenten $k = 11$ und verschlüsseln Sie die Nachricht $x = 1234$. Wie lautet die verschlüsselte Nachricht y?

Solution: 3115

- Wieviele verschiedene Verschlüsselungsexponenten k erlaubt das RSA-System in dieser Aufgabe?

Solution: 4800

- Wählen Sie als Verschlüsselungsexponenten $k = 11$ und verschlüsseln Sie die Nachricht $x = 4321$. Wie lautet die verschlüsselte Nachricht y?

Solution: 20923

- Wenn als Verschlüsselungsexponent $k = 17$ gewählt ist, was ist der Entschlüsselungsexponent l?

Solution: 12353

- Kann $k = 1533$ als Verschlüsselungsexponent gewählt werden?

Solution: Nein

- Der Verschlüsselungsexponent sei $k = 19$ und es sei $y = 13749$ eine verschlüsselte Nachricht. Wie lautet die unverschlüsselte Nachricht x?

Solution: 1234

Aufgabe 65

Gegeben sei die folgende Koeffizientenmatrix eines homogenen linearen Gleichungssystems $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 39 & 12 & 6 & 15 \\ -8 & -22 & 8 & -36 & -10 \\ -4 & 208 & 16 & 132 & 70 \\ 0 & 45 & 0 & 36 & 15 \\ 12 & -57 & -12 & -18 & -15 \end{pmatrix},$$

In der Vorlesung haben wir die folgenden Zeilenumformungen definiert:
τ_{ij}: Vertausche die Zeilen i und j
$\alpha_{ij}(c)$ für $i \neq j$: Addiere das c-fache von Zeile j zu Zeile i
$\mu_i(c)$ für $c \neq 0$: Multipliziere Zeile i mit c.
Wende die folgenenden Operationen auf die Matrix an: $\tau_{15}, \alpha_{12}(1), \alpha_{13}(1), \alpha_{23}(-2), \mu_3(-1/4)$.
Sei $A = (a_{ij})_{ij}$ $1 \leq i, j \leq 5$ die resultierende Matrix. Weiter sei Z eine Matrix in Zeilenstufenform, die aus A mit elementaren Zeilentransformationen berechnet wurde.

- Die Anzahl der freien Unbekannten in Z ist:

Solution: 2

- Die Anzahl der Elemente in der Ldes gegebenen Gleichungssystems ist:
(Geben Sie entweder eine Zahl ein, oder den Buchstaben u falls die Menge unendlich ist.)

Solution: u

- Wie lautet a_{12}?

Solution: 129

- Wieviele 0-Zeilen enthält die Normalform der Matrix?

Solution: 2

- Wie lautet a_{34}?

Solution: -33

- Die Stufenzahl r von Z ist:

Solution: 3

- Wie lautet a_{25}?

Solution: -150

- Wie lautet a_{32}?

Solution: -52

- Wie lautet a_{31}?

Solution: 1

Aufgabe 66

Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & -1 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Gelten die folgenden Aussagen?

- Jede Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A ist auch eine Lösung der Gleichung $10x_1 + 21x_2 - 9x_3 = 0$.

Solution: Ja

- Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

Solution: Nein

- Die Matrix A hat 3 Zeilen und zwei Spalten.

Solution: Nein

- A ist die erweiterte Koeffizientenmatrix eines inhomogenen linearen Gleichungssystems.

Solution: Ja

- $a_{11} + a_{23} = a_{21} + a_{12}$

Solution: Nein

- Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.

Solution: Ja

- Die Matrix A hat 3 Spalten und 2 Zeilen.

Solution: Ja

- Jede Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix A ist auch eine Lösung der Gleichung $10x_1 + 21x_2 - 11x_3 = 0$.

Solution: Nein

- $a_{11} + a_{23} = a_{21} + a_{22}$

Solution: Ja

- A ist die Koeffizientenmatrix eines homogenen linearen Gleichungssystems.

Solution: Ja

Aufgabe 67

Die Koeffizienten der Matrizen in dieser Aufgabe seien alle aus $\mathbb{R}$. Gelten die folgenden Aussagen?

- Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist in Zeilenstufenform.

Solution: Ja

- Sei A in Zeilenstufenform. Addiert man die i-te zur j-ten Zeile, wobei $i > j$ ist, so erhält man eine Matrix, die wieder in Zeilenstufenform ist.

Solution: Ja

- Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ lässt sich durch elementare Zeilentransformationen auf eine Zeilenstufenform mit zwei Nullzeilen bringen.

Solution: Nein

- Die Matrizen $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ gehen durch eine einzelne elementare Zeilenumformung auseinander hervor.

Solution: Nein

- Die Matrix A sei in Zeilenstufenform und habe eine Nullzeile. Dann hat das durch A beschriebene homogene lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

  Solution: Nein

- Die Matrix A sei in Zeilenstufenform und habe weniger Zeilen als Spalten. Dann kann A keine Nullzeile haben.

  Solution: Nein

- Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ lässt sich durch elementare Zeilentransformationen auf eine Zeilenstufenform mit einer Nullzeile bringen.

  Solution: Ja

- Die Matrizen $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 16 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ gehen durch eine einzelne elementare Zeilenumformung auseinander hervor.

  Solution: Ja

- Sei A in Zeilenstufenform und seien die i-te und j-te Zeile für $i \neq j$ verschieden. Vertauscht man die i-te und j-te Zeile, so erhält man eine Matrix, die nicht in Zeilenstufenform ist.

  Solution: Ja

- Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist in Zeilenstufenform.

  Solution: Ja

Aufgabe 69

Sind die folgenden Aussagen richtig?

- Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mindestens eine L.

  Solution: Ja

- Für jeden Körper K gilt: Wenn ein homogenes lineares Gleichungssystem über K eine freie Unbekannte hat, so hat es unendlich viele Lösungen.

  Solution: Nein

- Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten ist unlösbar.

Solution: Nein

- Wenn ein homogenes lineares Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ eine freie Unbekannte hat, so hat es unendlich viele Lösungen.

Solution: Ja

- Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat nur die Lösung 0.

Solution: Nein

- Jedes homogene lineare Gleichungssystem mit genauso vielen Gleichungen wie Unbekannten hat nur die L0.

Solution: Nein

Aufgabe 70

Wir betrachten das homogene lineare Gleichungssystem mit $a_{ij} \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & +\ldots+ & a_{1n} & x_n & = & 0 \\ a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & +\ldots+ & a_{2n} & x_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & +\ldots+ & a_{mn} & x_n & = & 0 \end{array}$$

Gelten die folgenden Aussagen?

- Wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, ist auch $\begin{pmatrix} b_1 + 1 \\ \vdots \\ b_n + 1 \end{pmatrix}$ eine Lösung.

Solution: Nein

- Wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, ist $\begin{pmatrix} b_1 - 1 \\ \vdots \\ b_n - n \end{pmatrix}$ keine Lösung.

Solution: Nein

- Wenn $m = n$ ist, hat das System genau eine Lösung.

Solution: Nein

- Wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ eine Lösung ist und $c \in \mathbb{Q}$, dann ist auch $\begin{pmatrix} c\, b_1 \\ \vdots \\ c\, b_n \end{pmatrix}$ eine Lösung.

Solution: Ja

- Wenn es eine von der Nulllösung $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene Lösung gibt, gibt es auch eine von $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene Lösung, die nicht ganzzahlig ist.

Solution: Ja

- Wenn $m > n$ ist, hat das System keine Lösung.

Solution: Nein

- Wenn $m = n - 1$ ist, hat das System genau eine Lösung.

Solution: Nein

- Wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, ist auch $\begin{pmatrix} b_1 - 1 \\ \vdots \\ b_n - n \end{pmatrix}$ eine Lösung.

Solution: Nein

- Wenn es eine von der Nulllösung $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene Lösung gibt, gibt es auch eine von $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene ganzzahlige Lösung.

Solution: Ja

- Wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ eine Lösung ist, ist $\begin{pmatrix} b_1 - 1 \\ \vdots \\ b_n - 1 \end{pmatrix}$ keine Lösung.

Solution: Nein

Aufgabe 71

Es sei

$$(A, b) := \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 12 \\ a & -1 & 3 & 12 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

für jedes $a \in \mathbb{Q}$ die erweiterte Matrix eines inhomogenen linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Q}$. Lösen Sie das Gleichungssystem und beantworten Sie die folgenden Fragen.

- Wenn $a = 3$ ist, was ist dann der zweite Eintrag der Lösung?

  Solution: 24
- Wenn $a = 4$ ist, was ist dann das Siebenfache des ersten Eintrags der Lösung?

  Solution: -24
- Wenn $a = 1$ ist, was ist dann der zweite Eintrag der Lösung?

  Solution: 0
- Wenn $a = 2$ ist, was ist dann der zweite Eintrag der Lösung?

  Solution: -8
- Wenn $a = 1$ ist, was ist dann der dritte Eintrag der Lösung?

  Solution: 3
- Wenn $a = 2$ ist, was ist dann der erste Eintrag der Lösung?

  Solution: 8
- Wenn $a = 1$ ist, was ist dann der erste Eintrag der Lösung?

  Solution: 3
- Wenn $a = 2$ ist, was ist dann der dritte Eintrag der Lösung?

  Solution: -4
- Wenn $a = 4$ ist, was ist dann der dritte Eintrag der Lösung?

  Solution: 12
- Wenn $a = 3$ ist, was ist dann der dritte Eintrag der Lösung?

  Solution: 24