A1 : Bachelor Diskrete Strukturen 20.03.2007

Aufgabe 1. (6 Punkte) Sei F_n die n-te Fibonacci-Zahl. D.h. $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ und es gilt die Rekursion $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion (unter Benutzung der Rekursion) die Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{n} kF_k = (n-1)F_{n+2} - F_{n+1} + 2$$

für ganze Zahlen $n \geq 1$.

Lösung:
Induktionsanfang: $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} kF_k = 1 \cdot 1 = 1 = 0 \cdot 2 - 1 + 2 = 0 \cdot F_{1+2} - F_{1+1} + 2$$

Induktionsvoraussetzung (I.V.): $\sum_{k=0}^{n} kF_k = (n-1)F_{n+2} - F_{n+1} + 2$ gilt für ein $n \geq 1$.
Induktionsschluss $n \to n+1$: Wir zeigen, dass dann die Aussage auch für $n+1$ gilt.
Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} kF_k &= \sum_{k=1}^{n} kF_k + (n+1)F_{n+1} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} (n-1)F_{n+2} - F_{n+1} + 2 + (n+1)F_{n+1} \\
&= (nF_{n+2} - F_{n+2}) + nF_{n+1} + 2 \\
&= ((n+1)-1)\,(F_{n+1} + F_{n+2}) - F_{n+2} + 2 \\
&\overset{\text{Rekursion}}{=} ((n+1)-1)F_{n+3} - F_{n+2} + 2.
\end{aligned}$$

$\square$

Mit dem Induktionsanfang und dem Induktionsschluss folgt die Gültigkeit der Gleichung für alle $n \geq 1$.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion f durch die Rekursion

$$f\,(n) = f\,(n-2) + 8\,n$$

und die Anfangswerte $f(0) = f(1) = 0$. Berechnen Sie die explizite Formel für f mithilfe eines geeigneten Ansatzes.

Lösung:
Aus der Formel folgt der homogene Ansatz

$$f_{hom}\,(n) - f_{hom}\,(n-2) = 0.$$

Das entsprechende Polynom ist $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Die Nullstellen sind also 1 und -1, weswegen wir als homogenen Ansatz ein Polynom vom Grad 0 in jeder Nullstelle wählen:

$$f_{hom}(n) = b\,(-1)^n + c\,1^n = b\,(-1)^n + c.$$

Die Inhomogenität ist ein Polynom (Grad 1) multipliziert mit Potenzen einer Nullstelle (nämlich $1^n = 1$), daher muß es eine inhomogene Lösung vom Grad 2 in dieser Nullstelle geben. Da die homogene Lösung nur Grad 0 in der Nullstelle aufweist, brauchen wir beide Koeffizienten: den von n und den von n^2. Wir machen also den Ansatz für die partikuläre Lösung: $f_p(n) = (a\,n^2 + d\,n)\,1^n = a\,n^2 + d\,n$. Mit der inhomogenen Gleichung folgt:

$$an^2 + dn = a(n-2)^2 + d(n-2) + 8n \Rightarrow an^2 + dn = an^2 - 4an + 4a + dn - 2d + 8n$$

$$\Rightarrow 0 = -4an + 4a - 2d + 8n$$

Koeffizientenvergleich:

$$n^1 :\ 4a = 8 \Rightarrow a = 2 \text{ und } \ n^0 :\ 2d = 4a = 8 \Rightarrow d = 4.$$

Also $f_p(n) = 2\,n^2 + 4\,n$. Und $f(n) = f_p(n) + f_{hom}(n) = 2\,n^2 + 4\,n + b\,(-1)^n + c$. Mit den Anfangswerten folgt:

$$f(0) = 0 = 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + b \cdot (-1)^0 + c = b + c$$

und

$$f(1) = 0 = 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + b \cdot (-1)^1 + c = 6 - b + c.$$

Also: $c = -b$ und $c = -6 + b$. Somit $-b = -6 + b \Rightarrow b = 3 \Rightarrow c = -3$. Also

$$f(n) = 3\,(-1)^n - 3 + 4\,n + 2\,n^2.$$

Aufgabe 3. (4+2 Punkte)

a) Gegeben seien die Inversionstafeln $I(\pi_1) = 32341000$ und $I(\pi_2) = 43022200$ zweier Permutationen π_1 und π_2 aus S_8 und die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die ziffernfremden Zykeldarstellungen der zugehörigen Permutationen π_1, π_2 und σ und berechnen Sie

$$\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \sigma^{-1}.$$

b) Berechnen Sie die Anzahl der Permutationen auf 6 Zahlen, die genau eine Zahl fixieren (d.h die Zahl auf sich selbst abbilden)! Tipp: Es gibt nur zwei Zykeltypen für solche Permutationen.

Lösung:

a)

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 7 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} = (1,6,3,2,5,7,8,4),$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1,3,8,6,4,2,7,5)$$

$$\sigma = (1,2)(3)(4,6,5)(7,8) = (1,2)(4,6,5)(7,8),\ \sigma^{-1} = (1,2)(4,5,6)(7,8).$$

$$\begin{aligned} \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \sigma^{-1} &= (1,6,3,2,5,7,8,4) \cdot (1,3,8,6,4,2,7,5) \cdot (1,2)(4,5,6)(7,8) \\ &= (1,8,7,3,4,6,5)(2) = (1,8,7,3,4,6,5). \end{aligned}$$

b) Die Anzahl der Permutationen auf 6 Zahlen, die genau eine Zahl fixieren, ist gleich der Anzahl der fixpunktfreien Permutationen auf 5 Zahlen mal 6. Die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen auf 5 Zahlen ist gleich der Anzahl der Permutationen auf 5 Zahlen, die aus einem Zykel der Länge 5 bestehen, plus der Anzahl der Permutationen auf 5 Zahlen mit einem Zykel der Länge 3 und einem Zykel der Länge 2. Insgesamt gibt es also $6(4! + \binom{5}{3} \cdot 2!) = 6(24 + 10 \cdot 2) = 6 \cdot 44 = 264$ Permutationen auf 6 Zahlen, die genau eine Zahl fixieren.

Aufgabe 4. (2+2+2 Punkte) Der Osterhase kauft bei Lindt eine Schachtel mit 10 Pralinen. Jede Praline hat einen Schokoladenüberzug (**W**eiß, **V**ollmilch oder **Z**artbitter) und eventuell eine Füllung (**S**chnaps, **J**oghurt oder **O**hne Füllung). Nach folgender Tabelle gibt es von jeder Kombination genau eine Praline, außer mit weißer Schokolade und Joghurtfüllung.

	W	**V**	**Z**
S	1	1	1
J	2	1	1
O	1	1	1

9 Pralinen sind eiförmig. Nur eine der beiden weißen Joghurtpralinen ist herzförmig. (D.h. alle Pralinen sind unterscheidbar – spätestens wenn man hineinbeißt.) Der Osterhase verschenkt nun 2 Pralinen aus der Schachtel. Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass das Geschenk

a) keine Praline mit weißer Schokolade oder keine Praline mit Zartbitterschokolade enthält?

b) mindestens eine Praline mit Vollmilchschokolade und mindestens eine Praline mit Joghurt enthält?

c) mindestens eine Praline mit weißer Schokolade und mindestens eine Praline mit Joghurt, aber keine Praline mit Zartbitterschokolade enthält?

Berechnen Sie das Ergebnis mithilfe des Prinzips der Inklusion–Exklusion!

Lösung:
zu a) Anzahl der Geschenke ohne weiße Schokolade $|W|$: $|W| = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.
Anzahl der Geschenke ohne Zartbitterschokolade $|Z|$: $|Z| = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$.
Anzahl der Geschenke ohne weiße und ohne Zartbitterschokolade: $|W \cap Z| = \binom{3}{2} = 3$.
Anzahl der Geschenke ohne weiße oder ohne Zartbitterschokolade:

$$|W \cup Z| = |W| + |Z| - |W \cap Z| = 15 + 21 - 3 = 33.$$

zu b) Anzahl aller möglichen Geschenke $|A|$: $|A| = \binom{10}{2} = 45$.
Anzahl der Geschenke ohne Vollmilchschokolade $|V|$: $|V| = \binom{7}{2} = 21$.
Anzahl der Geschenke ohne Joghurt $|J|$: $|J| = \binom{6}{2} = 15$.
Anzahl der Geschenke ohne Vollmilchschokolade und ohne Joghurt: $|V \cap J| = \binom{4}{2} = 6$.
Die gesuchte Anzahl an Möglichkeiten ist nun:

$$|(V \cup J)^C| = |A| - (|V| + |J| - |V \cap J|) = 45 - (21 + 15 - 6) = 45 - 30 = 15.$$

zu c) Anzahl der Geschenke ohne weiße Schokolade und ohne Zartbitterschokolade $|W_Z|$: $|W_Z| = |W \cap Z| = \binom{3}{2} = 3$.
Anzahl der Geschenke ohne Joghurt und ohne Zartbitterschokolade $|J_Z|$: $|J_Z| = |J \cap Z| = \binom{4}{2} = 6$.
Anzahl der Geschenke ohne weiße Schokolade, ohne Joghurt und ohne Zartbitterschokolade $|J_Z \cap W_Z| = |W \cap J \cap Z| = \binom{2}{2} = 1$.
Die Grundmenge ist nun die Menge aller Pralinen ohne Zartbitterschokolade Z. Und die gesuchte Menge ist $Z \setminus (J_Z \cup W_Z)$. Also:

$$|Z \setminus (J_Z \cup W_Z)| = |Z| - (|W_Z| + |J_Z| - |W_Z \cap J_Z|) = 21 - (3 + 6 - 1) = 13.$$

Aufgabe 5. (3+3 Punkte)

a) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler g der Zahlen 195 und 84 mit dem Euklidischen Algorithmus und bestimmen Sie Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$, sodass $g = s\ 195 + t\ 84$. (Etwa mittels Rückwärtseinsetzen.)

b) Sei G die Menge (Gruppe) der Permutationen auf 7 Elementen. Sei $\sim$ eine Relation auf G definiert durch $g \sim h :\Leftrightarrow$ es gibt ein $x \in G$, sodass $xgx^{-1} = h$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf G ist. Benutzen Sie die allgemeinen Formeln: $g^{-1}h^{-1} = (hg)^{-1}$, $(g^{-1})^{-1} = g$ und $(fg)h = f(gh)$ für alle Permutationen f, g, h.

Lösung:

a) Wir führen den Euklidischen Algorithmus mit den Zahlen 195 und 84 durch:

$$\begin{aligned} 195 &= 84 \cdot 2 + 27 \\ 84 &= 27 \cdot 3 + 3 \\ 27 &= 3 \cdot 9 + 0 \end{aligned}$$

Also ist $g = ggt(195, 84) = 3$. Mit Hilfe dieser Gleichungen können wir die Zahlen s und t ausrechnen:

$$\begin{aligned} 3 &= 84 - 27 \cdot 3 \\ &= 84 - (195 - 84 \cdot 2) \cdot 3 \\ &= 84 \cdot 7 - 195 \cdot 3 \end{aligned}$$

Es gilt also $s = -3$ und $t = 7$.

b) *Reflexivität:*
Für $g \in G$ gilt $ggg^{-1} = g$, also ist $g \sim g$.
Symmetrie:
Seien $g, h \in G$, sodass $g \sim h$. Dann gibt es ein $x \in G$, sodass $xgx^{-1} = h$.

$$xgx^{-1} = h \Leftrightarrow x^{-1}xgx^{-1}x = x^{-1}hx \Leftrightarrow g = x^{-1}hx = x^{-1}h(x^{-1})^{-1} \Rightarrow h \sim g.$$

(D.h.: mit $y := x^{-1}$ gibt es ein $y \in G$, sodass $yh\,y^{-1} = g$.)
Transitivität:
Seien $f, g, h \in G$ so, dass $f \sim g$ und $g \sim h$. Also gibt es $x, y \in G$ mit $xfx^{-1} = g$ und $ygy^{-1} = h$. Daraus folgt $(yx)f(yx)^{-1} = yxfx^{-1}y^{-1} = ygy^{-1} = h$, womit $f \sim h$ gilt.

Aufgabe 6. (6 Punkte)
`Beantworten Sie die folgenden Fragen mit ja oder nein ohne Begründung bzw. Herleitung. Eine nicht beantwortete Frage wird mit 0 Punkten, eine falsche Antwort wird mit -1 Punkt und eine richtige Antwort mit 1 Punkt bewertet. Es gibt insgesamt nicht weniger als 0 Punkte.`

a) Gibt es eine ganze Zahl x mit $0 \leq x \leq 11$, sowie natürliche Zahlen i, k, sodass

$$x = 4i + 3 \text{ und } x = 6k + 4?$$

b) Sei $N = \{1, 2, \ldots, 29\}$. Gilt dann für jedes $k \geq 16$, dass in jeder Teilmenge $M \subseteq N$ mit $|M| = k$ zwei Zahlen a, b existieren mit $a + b = 30$?

c) Sei ι_X die Indikatorfunktion der Menge X, d.h.

$$\iota_X(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in X \\ 0, & \text{falls } x \notin X \end{cases} .$$

Gilt dann für alle Mengen X und Y, dass

$$\sum_{x \in X} \iota_Y(x) = \sum_{y \in Y} \iota_X(y)?$$

d) Für eine Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ sei die Funktion Δf definiert durch

$$(\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n).$$

Gibt es für alle $a \in \mathbb{R}$ eine Funktion f mit $\Delta f = f$ und $f(0) = a$?

e) Sei π eine Permutation auf n Elementen. Wenn π als Produkt ziffernfremder Zykel geschrieben ist und m die Länge eines der Zykel ist, folgt dann, dass π^m mindestens m der n Elemente auf sich abbildet, d.h. diese Elemente fixiert?

f) Ist durch

$$m \sim n :\Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n = m + j$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge der natürlichen Zahlen definiert?

Lösung:

a) $\boxed{\text{Nein}}$ Wegen $x = 4i + 3$ und $x = 6k + 4$ müsste die Zahl sowohl gerade als auch ungerade sein!

b) $\boxed{\text{Ja}}$ Schubfachprinzip.

c) $\boxed{\text{Ja}}$ $\sum_{x \in X} \iota_Y(x) = |X \cap Y| = \sum_{y \in Y} \iota_X(y)$

d) $\boxed{\text{Ja}}$ $\Delta f = f \Leftrightarrow f(n+1) - f(n) = f(n) \Leftrightarrow f(n+1) - 2f(n) = 0 \forall n$. Lösung dieser Rekursion mit Anfangswert $f(0) = a$ ist $f(n) = a2^n$.

e) $\boxed{\text{Ja}}$ Sei σ ein Zykel der Länge m von π. π^m bildet auf jeden Fall die m Elemente des Zykels σ auf sich ab!

f) $\boxed{\text{Nein}}$ Da $j \in \mathbb{N}_0$ ist, kann die Relation nicht symmetrisch sein: $n = m + j \Rightarrow m = n - j$.