Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Triesch

Aachen, den 20.03.2007

2. Klausur Diskrete Strukturen WS 2006/07

Alle Aufgaben werden mit 6 Punkten bewertet. Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie mindestens 18 Punkte.

Aufgabe 1. (6 Punkte) Sei F_n die n-te Fibonacci-Zahl. D.h. $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ und es gilt die Rekursion $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion (unter Benutzung der Rekursion) die Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{n} kF_k = (n-1)F_{n+2} - F_{n+1} + 2$$

für ganze Zahlen $n \geq 1$.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion f durch die Rekursion

$$f(n) = f(n-2) + 8\,n$$

und die Anfangswerte $f(0) = f(1) = 0$. Berechnen Sie die explizite Formel für f mithilfe eines geeigneten Ansatzes.

Aufgabe 3. (4+2 Punkte)

a) Gegeben seien die Inversionstafeln $I(\pi_1) = 32341000$ und $I(\pi_2) = 43022200$ zweier Permutationen π_1 und π_2 aus S_8 und die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die ziffernfremden Zykeldarstellungen der zugehörigen Permutationen π_1, π_2 und σ und berechnen Sie

$$\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \sigma^{-1}.$$

b) Berechnen Sie die Anzahl der Permutationen auf 6 Zahlen, die genau eine Zahl fixieren (d.h die Zahl auf sich selbst abbilden)! Tipp: Es gibt nur zwei Zykeltypen für solche Permutationen.

Aufgabe 4. (2+2+2 Punkte) Benutzen Sie bei folgender Aufgabe das Prinzip der Inklusion–Exklusion! Der Osterhase kauft bei Lindt eine Schachtel mit 10 Pralinen. Jede Praline hat einen Schokoladenüberzug (**W**eiß, **V**ollmilch oder **Z**artbitter) und eventuell eine Füllung (**S**chnaps, **J**oghurt oder **O**hne Füllung). Nach folgender Tabelle gibt es von jeder Kombination genau eine Praline, außer mit weißer Schokolade und Joghurtfüllung.

	W	**V**	**Z**
S	1	1	1
J	2	1	1
O	1	1	1

9 Pralinen sind eiförmig. Nur eine der beiden weißen Joghurtpralinen ist herzförmig. (D.h. alle Pralinen sind unterscheidbar – spätestens wenn man hineinbeißt.) Der Osterhase verschenkt nun 2 Pralinen aus der Schachtel. **Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass das Geschenk…**

Bitte wenden!

a) …keine Praline mit weißer Schokolade oder keine Praline mit Zartbitterschokolade enthält?

b) …mindestens eine Praline mit Vollmilchschokolade und mindestens eine Praline mit Joghurt enthält?

c) …mindestens eine Praline mit weißer Schokolade und mindestens eine Praline mit Joghurt, aber keine Praline mit Zartbitterschokolade enthält?

Aufgabe 5. (3+3 Punkte)

a) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler g der Zahlen 195 und 84 mit dem Euklidischen Algorithmus und bestimmen Sie Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$, sodass $g = s\,195 + t\,84$. (Etwa mittels Rückwärtseinsetzen.)

b) Sei G die Menge (Gruppe) der Permutationen auf 7 Elementen. Sei $\sim$ eine Relation auf G definiert durch $g \sim h :\Leftrightarrow$ es gibt ein $x \in G$, sodass $xgx^{-1} = h$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf G ist. Benutzen Sie die allgemeinen Formeln: $g^{-1}h^{-1} = (hg)^{-1}$, $(g^{-1})^{-1} = g$ und $(fg)h = f(gh)$ für alle Permutationen f, g, h.

Aufgabe 6. (6 Punkte)

`Beantworten Sie die folgenden Fragen mit ja oder nein ohne Begründung bzw. Herleitung. Eine nicht beantwortete Frage wird mit 0 Punkten, eine falsche Antwort wird mit -1 Punkt und eine richtige Antwort mit 1 Punkt bewertet. Es gibt insgesamt nicht weniger als 0 Punkte.`

a) Gibt es eine ganze Zahl x mit $0 \leq x \leq 11$, sowie natürliche Zahlen i, k, sodass

$$x = 4i + 3 \text{ und } x = 6k + 4?$$

b) Sei $N = \{1, 2, \ldots, 29\}$. Gilt dann für jedes $k \geq 16$, dass in jeder Teilmenge $M \subseteq N$ mit $|M| = k$ zwei Zahlen a, b existieren mit $a + b = 30$?

c) Sei ι_X die Indikatorfunktion der Menge X, d.h.

$$\iota_X(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in X \\ 0, & \text{falls } x \notin X \end{cases} .$$

Gilt dann für alle Mengen X und Y, dass

$$\sum_{x \in X} \iota_Y(x) = \sum_{y \in Y} \iota_X(y)?$$

d) Für eine Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ sei die Funktion Δf definiert durch

$$(\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n).$$

Gibt es für alle $a \in \mathbb{R}$ eine Funktion f mit $\Delta f = f$ und $f(0) = a$?

e) Sei π eine Permutation auf n Elementen. Wenn π als Produkt ziffernfremder Zykel geschrieben ist und m die Länge eines der Zykel ist, folgt dann, dass π^m mindestens m der n Elemente auf sich abbildet, d.h. diese Elemente fixiert?

f) Ist durch

$$m \sim n :\Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n = m + j$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge der natürlichen Zahlen definiert?

Viel Erfolg!