A1 : Bachelor Diskrete Strukturen 23.02.2007

Aufgabe 1. (6 Punkte) Sei F_n die n-te Fibonacci-Zahl. D.h. $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ und es gilt die Rekursion $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion (unter Benutzung der Rekursion) die Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{n} kF_k = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$$

für ganze Zahlen $n \geq 0$.

Lösung:
Induktionsanfang: $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} kF_k = 0 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 1 - 2 + 2 = 0F_{0+2} - F_{0+3} + 2$$

Induktionsvoraussetzung (I.V.): $\sum_{k=0}^{n} kF_k = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$ gilt für ein $n \geq 0$.
Induktionsschluss $n \to n+1$: Wir zeigen, dass dann die Aussage auch für $n+1$ gilt.
Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} kF_k &= \sum_{k=0}^{n} kF_k + (n+1)F_{n+1} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} nF_{n+2} - F_{n+3} + 2 + (n+1)F_{n+1} \\
&= ((n+1)F_{n+2} - F_{n+2}) - F_{n+3} + 2 + (n+1)F_{n+1} \\
&= (n+1)\left(F_{n+1} + F_{n+2}\right) - \left(F_{n+2} + F_{n+3}\right) + 2 \\
&\overset{\text{Rekursion}}{=} (n+1)F_{n+3} - F_{n+4} + 2.
\end{aligned}$$

$\square$

Mit dem Induktionsanfang und dem Induktionsschluss folgt die Gültigkeit der Gleichung für alle $n \geq 0$.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion f durch die Rekursion

$$f\,(n+2) = 3\,f\,(n+1) - 2\,f\,(n) + 4 \cdot 2^n$$

und die Anfangswerte $f(0) = f(1) = 0$. Berechnen Sie die explizite Formel für f mithilfe eines geeigneten Ansatzes.

Lösung:
Aus der Formel folgt der homogene Ansatz

$$f_{hom}\,(n+2) - 3\,f_{hom}\,(n+1) + 2\,f_{hom}\,(n) = 0.$$

Das entsprechende Polynom ist $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$. Die Nullstellen sind also 1 und 2, weswegen wir als homogenen Ansatz ein Polynom vom Grad 0 in jeder Nullstelle wählen:

$$f_{hom}(n) = b\,2^n + c\,1^n.$$

Die Inhomogenität ist Potenz einer der Nullstellen, daher muß es eine inhomogene Lösung vom Grad 1 in dieser Nullstelle geben. Wir machen den Ansatz für die partikuläre Lösung: $f_p(n) = a\,n\,2^n$. Mit der inhomogenen Gleichung folgt:

$$a(n+2)2^{n+2} = 3a(n+1)2^{n+1} - 2an2^n + 4 \cdot 2^n \Leftrightarrow a(n+2) \cdot 4 = 3a(n+1) \cdot 2 - 2an + 4$$

$$\Leftrightarrow 8a + 4an = 6a + 6an - 2an + 4 \Leftrightarrow 8a = 6a + 4 \Leftrightarrow a = 2.$$

Also $f_p(n) = 2\,n\,2^n = n\,2^{n+1}$ und $f(n) = f_p(n) + f_{hom}(n) = n\,2^{n+1} + b\,2^n + c$. Mit den Anfangswerten folgt:

$$f(0) = 0 = 0 \cdot 2^{0+1} + b \cdot 2^0 + c = b + c$$

und

$$f(1) = 0 = 1 \cdot 2^{1+1} + b \cdot 2^1 + c = 4 + 2b + c.$$

Also: $c = -b$ und $c = -4 - 2b$. Somit $-b = -4 - 2b \Rightarrow b = -4 \Rightarrow c = 4$. Also

$$f(n) = n\,2^{n+1} - 4 \cdot 2^n + 4 = n\,2^{n+1} - 2^{n+2} + 4.$$

Aufgabe 3. (3+2+1 Punkte) Gegeben seien die Permutationen

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

aus S_6, sowie die Inversionstafel $I(\tau) = 520200$ einer weiteren Permutation τ aus S_6.

a) Schreiben Sie π, σ, τ, sowie das Produkt von $\sigma \cdot \pi$ als Produkte von ziffernfremden Zykeln. (Das Produkt von zwei Permutationen ist definiert als deren Hintereinanderausführung von rechts nach links.)

b) Bestimmen Sie die Inversionstafeln von π, σ und $\sigma \cdot \pi$.

c) Finden Sie eine Permutation ρ, sodass $\pi \cdot \rho$ ein Produkt aus ziffernfremden Zykeln der Länge 3 ist.

Lösung:
zu a)

$$\pi = (1,4)(2)(3,6,5), \quad \sigma = (1,4,3,5,6,2),$$

$$\sigma \cdot \pi = (1,4,3,5,6,2)(1,4)(2)(3,6,5) = (1,3,2)(4)(5)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lesen der Inversionstafel für τ: Links von der 1 stehen 5 Zahlen, die größer sind als 1, also steht 1 an der 6. Stelle; links von der 2 stehen 2 Zahlen die größer sind als die 2, also steht 2 an der 3. Stelle ...

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1,3,2,5,4,6).$$

zu b) Inversionstafel am Beispiel von σ: Links von der 1 ist die 4, also eine Zahl, die größer ist als die 1; links von der 2 sind die Zahlen $1,3,4,5,6$, also 4 Zahlen, die größer sind als die 2;...

$$I(\sigma) = 142000, \quad I(\pi) = 312010, \quad I(\sigma \cdot \pi) = 110000.$$

zu c) z.B. $\pi \cdot \rho = (1,2,3)(4,5,6)$, also

$$\rho = \pi^{-1} \cdot (1,2,3)(4,5,6) = (1,4)(2)(3,5,6)(1,2,3)(4,5,6) = (1,2,5,3,4,6).$$

Aufgabe 4. (4+2 Punkte) Sei S eine Teilmenge der Menge $\{1, 2, \dots, 14\}$ mit $|S| = 6$. Für eine Teilmenge $A \subseteq S$ sei s_A die Summe der Elemente von A.

a) Zeigen Sie mit dem Schubfachprinzip, dass es zwei Teilmengen $A \subseteq S$ und $B \subseteq S$ ($A \neq B$) gibt mit $|A| \leq 3$ und $|B| \leq 3$ und $s_A = s_B$. (Tipp: Wie viele solche Mengen gibt es? Was kann als Summe herauskommen?)

b) Finden Sie eine Menge $S \subseteq \{1, 2, \dots, 14\}$ mit $|S| = 6$ so, dass für je zwei Teilmengen $A \subseteq S$ und $B \subseteq S$ mit $A \neq B$ und $|A| = |B| = 2$ gilt, dass $s_A \neq s_B$.

Lösung:

a) Gilt $0 \leq |A| \leq 3$, so folgt:

$$0 \leq s_A \leq 12 + 13 + 14 = 39.$$

Andererseits ist die Anzahl der Teilmengen von S mit höchstens 3 Elementen gleich

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 1 + 6 + 15 + 20 = 42.$$

Da es mehr Teilmengen von S mit höchstens drei Elementen gibt als mögliche Summen, müssen mindestens zwei solche Teilmengen A und B existieren mit $s_A = s_B$.

b) Ein Beispiel, wo keine zwei Summen der Elemente zweier Teilmengen mit 2 Elementen gleich sind, ist $S = \{1, 2, 3, 5, 8, 13\}$. Dies sind die ersten Fibonacci-Zahlen (ab $F_2 = 1, F_3 = 2$). Da jede Zahl die Summe der größten vorhergehenden ist, ist die Summe dieser Zahl plus eine andere größer als die Summe zweier vorhergehender. Also sind alle Summen von zwei Elementen verschieden. Man findet diese Menge auch, indem man jeweils die kleinstmögliche Zahl hinzu nimmt, so dass die Menge noch die Eigenschaft hat! Alle möglichen Mengen S sind

$$\{1, 2, 3, 5, 8, 13\}, \{1, 2, 3, 5, 8, 14\}, \{1, 2, 3, 5, 9, 14\},$$

$$\{1, 2, 3, 7, 10, 13\}, \{1, 2, 3, 7, 11, 14\}, \{1, 2, 3, 8, 11, 14\},$$

$$\{1, 2, 6, 8, 11, 14\}, \{1, 2, 7, 10, 12, 14\}, \{1, 3, 4, 5, 9, 14\},$$

$$\{1, 3, 5, 8, 13, 14\}, \{1, 4, 5, 7, 9, 14\}, \{1, 4, 7, 9, 13, 14\},$$

$$\{1, 4, 7, 11, 12, 13\}, \{1, 4, 7, 12, 13, 14\}, \{1, 4, 8, 12, 13, 14\},$$

$$\{1, 6, 8, 10, 11, 14\}, \{1, 6, 9, 11, 12, 13\}, \{1, 6, 10, 11, 12, 14\},$$

$$\{1, 6, 10, 12, 13, 14\}, \{1, 7, 10, 12, 13, 14\}, \{2, 3, 4, 6, 9, 14\},$$

$$\{2, 3, 4, 8, 11, 14\}, \{2, 5, 8, 12, 13, 14\}, \{2, 7, 10, 12, 13, 14\}.$$

Aufgabe 5. (6 Punkte) (Inklusion-Exklusion) In einer Vorlesung an der RWTH Aachen sitzen 200 Studenten. 120 Sudenten wohnen in Aachen und die Hälfte dieser 120 trägt außerdem eine Brille. Ein Viertel der Studenten sind ausländische Studierende. Es gibt 30 ausländische Studenten, die eine Brille tragen. Alle diese wohnen auch in Aachen. Insgesamt gibt es 62 Studenten, die eine Brille tragen. Von den Studenten, die in Aachen wohnen, ist jeder dritte Ausländer. Wie viele deutsche Studenten wohnen nicht in Aachen und tragen keine Brille?

Lösung:
Sei A die Menge der Studenten, A_{ausl} die Menge der ausländischen Studenten, A_{ac} die Menge der in Aachen wohnenden Studenten und A_b die Menge der Brille tragenden Studenten. Dann gilt:

$$|A| = 200,\ |A_{ac}| = 120,\ |A_{ac} \cap A_b| = \frac{|A_{ac}|}{2} = 60,\ |A_{ausl}| = \frac{|A|}{4} = 50.$$

Da die ausländische Studierende, die eine Brille tragen, alle in Aachen wohnen, gilt:

$$|A_b \cap A_{ausl}| = |A_b \cap A_{ausl} \cap A_{ac}| = 30.$$

Außerdem gilt $|A_b| = 62$ und $|A_{ac} \cap A_{ausl}| = \frac{|A_{ac}|}{3} = 40$.
Die Anzahl der deutschen Studenten, die weder in Aachen wohnen noch eine Brille tragen, entspricht dem Betrag der Menge $A \setminus (A_b \cup A_{ac} \cup A_{ausl})$, den man mittels dem Prinzip der Inklusion-Exklusion ausrechnen kann:

$$\begin{aligned} |A \setminus (A_b \cup A_{ac} \cup A_{ausl})| &= |A| - |A_b| - |A_{ac}| - |A_{ausl}| + |A_b \cap A_{ac}| + |A_b \cap A_{ausl}| \\ &\quad + |A_{ac} \cap A_{ausl}| - |A_b \cap A_{ac} \cap A_{ausl}| \\ &= 200 - 62 - 120 - 50 + 60 + 30 + 40 - 30 = 68. \end{aligned}$$

Aufgabe 6. (6 Punkte)
`Beantworten Sie die folgenden Fragen mit ja oder nein ohne Begründung bzw. Herleitung. Eine nicht beantwortete Frage wird mit 0 Punkten, eine falsche Antwort wird mit -1 Punkt und eine richtige Antwort mit 1 Punkt bewertet. Es gibt insgesamt nicht weniger als 0 Punkte.`

a) Ist durch
$$m \sim n :\Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{N}_0, j \neq k : m = 4j + 3 \text{ und } n = 4k + 3$$
eine Äquivalenzrelation auf der Menge der natürlichen Zahlen definiert?

b) Gibt es eine ganze Zahl x mit $0 \leq x \leq 27$, sowie natürliche Zahlen i, k, sodass
$$x = 4i + 3 \text{ und } x = 7k + 6?$$

c) Sei $N = \{1, 2, \ldots, 27\}$. Gilt dann für jedes $k \geq 16$, dass in jeder Teilmenge $M \subseteq N$ mit $|M| = k$ zwei Zahlen a, b existieren mit $a - b = 4$?

d) Sei ι_X die Indikatorfunktion der Menge X, d.h.
$$\iota_X(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in X \\ 0, & \text{falls } x \notin X \end{cases}.$$
Gilt dann für alle Mengen X und Y, dass
$$\sum_{x \in X \cup Y} \iota_X(x) \cdot \iota_Y(x) - \iota_{X \cap Y}(x) = |X \cup Y|?$$

e) Die Eulersche Φ–Funktion ist definiert durch
$$\phi(n) = |\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n,\ \mathrm{ggT}(m, n) = 1\}|.$$
Gilt für jede ungerade Primzahl p, dass $\phi(p^3) = p^2(p-1)$?

f) Sei π eine Permutation auf n Elementen. Wenn π als Produkt ziffernfremder Zykel geschrieben ist, und m die Länge eines längsten dieser ziffernfremden Zykel ist, folgt dann $\pi^m = id$?

Lösung:

a) $\boxed{\text{Nein}}$ Durch die Bedingung $j \neq k$ ist die Reflexivität verletzt.

b) $\boxed{\text{Ja}}$ $x = 27,\ i = 6$ und $k = 3$.

c) $\boxed{\text{Ja}}$ Schubfachprinzip.

d) $\boxed{\text{Nein}}$ Nach der Inklusions–Exklusions–Formel ist die Formel gültig mit „+" statt mit „·". Es gilt
$$\sum_{x \in X \cup Y} \iota_X(x) \cdot \iota_Y(x) - \iota_{X \cap Y}(x) = 0.$$

e) $\boxed{\text{Ja}}$ p^3 hat nur p als Primteiler. Also gilt $\Phi(p^3) = p^3\left(1 - \frac{1}{p}\right) = p^2(p-1)$.

f) $\boxed{\text{Nein}}$ z.B. $\pi = (1,2,3)(4,5)$. Dann gilt $\pi^3 = (1)(2)(3)(4,5) \neq id$.