Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Triesch

Aachen, den 23.02.2007

1. Klausur Diskrete Strukturen WS 2006/07

Alle Aufgaben werden mit 6 Punkten bewertet. Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie mindestens 18 Punkte.

Aufgabe 1. (6 Punkte) Sei F_n die n-te Fibonacci-Zahl. D.h. $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ und es gilt die Rekursion $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion (unter Benutzung der Rekursion) die Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{n} kF_k = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$$

für ganze Zahlen $n \geq 0$.

Aufgabe 2. (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion f durch die Rekursion

$$f\,(n+2) = 3\,f\,(n+1) - 2\,f\,(n) + 4 \cdot 2^n$$

und die Anfangswerte $f(0) = f(1) = 0$. Berechnen Sie die explizite Formel für f mithilfe eines geeigneten Ansatzes.

Aufgabe 3. (3+2+1 Punkte) Gegeben seien die Permutationen

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

aus S_6, sowie die Inversionstafel $I(\tau) = 520200$ einer weiteren Permutation τ aus S_6.

a) Schreiben Sie π, σ, τ, sowie das Produkt von $\sigma \cdot \pi$ als Produkte von ziffernfremden Zykeln. (Das Produkt von zwei Permutationen ist definiert als deren Hintereinanderausführung von rechts nach links.)

b) Bestimmen Sie die Inversionstafeln von π, σ und $\sigma \cdot \pi$.

c) Finden Sie eine Permutation ρ, sodass $\pi \cdot \rho$ ein Produkt aus ziffernfremden Zykeln der Länge 3 ist.

Aufgabe 4. (4+2 Punkte) Sei S eine Teilmenge der Menge $\{1, 2, \ldots, 14\}$ mit $|S| = 6$. Für eine Teilmenge $A \subseteq S$ sei s_A die Summe der Elemente von A.

a) Zeigen Sie mit dem Schubfachprinzip, dass es zwei Teilmengen $A \subseteq S$ und $B \subseteq S$ ($A \neq B$) gibt mit $|A| \leq 3$ und $|B| \leq 3$ und $s_A = s_B$. (Tipp: Wie viele solche Mengen gibt es? Was kann als Summe herauskommen?)

b) Finden Sie eine Menge $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 14\}$ mit $|S| = 6$ so, dass für je zwei Teilmengen $A \subseteq S$ und $B \subseteq S$ mit $A \neq B$ und $|A| = |B| = 2$ gilt, dass $s_A \neq s_B$.

Bitte wenden!

Aufgabe 5. (6 Punkte) (Inklusion-Exklusion) In einer Vorlesung an der RWTH Aachen sitzen 200 Studenten. 120 Studenten wohnen in Aachen und die Hälfte dieser 120 trägt außerdem eine Brille. Ein Viertel der Studenten sind ausländische Studierende. Es gibt 30 ausländische Studenten, die eine Brille tragen. Alle diese wohnen auch in Aachen. Insgesamt gibt es 62 Studenten, die eine Brille tragen. Von den Studenten, die in Aachen wohnen, ist jeder dritte Ausländer. Wie viele deutsche Studenten wohnen nicht in Aachen und tragen keine Brille?

Aufgabe 6. (6 Punkte)
`Beantworten Sie die folgenden Fragen mit ja oder nein ohne Begründung bzw. Herleitung. Eine nicht beantwortete Frage wird mit 0 Punkten, eine falsche Antwort wird mit -1 Punkt und eine richtige Antwort mit 1 Punkt bewertet. Es gibt insgesamt nicht weniger als 0 Punkte.`

a) Ist durch

$$m \sim n :\Leftrightarrow \exists j, k \in \mathbb{N}_0, j \neq k : m = 4j + 3 \;\text{ und }\; n = 4k + 3$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge der natürlichen Zahlen definiert?

b) Gibt es eine ganze Zahl x mit $0 \leq x \leq 27$, sowie natürliche Zahlen i, k, sodass

$$x = 4i + 3 \text{ und } x = 7k + 6?$$

c) Sei $N = \{1, 2, \ldots, 27\}$. Gilt dann für jedes $k \geq 16$, dass in jeder Teilmenge $M \subseteq N$ mit $|M| = k$ zwei Zahlen a, b existieren mit $a - b = 4$?

d) Sei ι_X die Indikatorfunktion der Menge X, d.h.

$$\iota_X(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in X \\ 0, & \text{falls } x \notin X \end{cases} .$$

Gilt dann für alle Mengen X und Y, dass

$$\sum_{x \in X \cup Y} \iota_X(x) \cdot \iota_Y(x) - \iota_{X \cap Y}(x) = |X \cup Y|?$$

e) Die Eulersche Φ–Funktion ist definiert durch

$$\phi(n) = |\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n,\ \text{ggT}(m, n) = 1\}|.$$

Gilt für jede ungerade Primzahl p, dass $\phi(p^3) = p^2(p-1)$?

f) Sei π eine Permutation auf n Elementen. Wenn π als Produkt ziffernfremder Zykel geschrieben ist, und m die Länge eines längsten dieser ziffernfremden Zykel ist, folgt dann $\pi^m = id$?

Achtung: Schreiben Sie die richtigen Lösungen (Zuordnung zur entsprechenden Teilaufgabe nicht vergessen!!!) auf Ihren Klausurbogen und nicht auf dieses Aufgabenblatt.

Viel Erfolg!