1. Übung zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ (SS 01)

Prof. Dr. H. Pahlings

Hausaufgaben

Aufgabe 1.
[Vordiplom-Aufgabe 1999.] Beweisen Sie einmal algebraisch und dann kombinatorisch mit Hilfe von Teilmengen die Formel

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} \quad \text{für } k \le r \le n \in \mathbb{N}_0$$

und leiten Sie daraus ab:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} = 2^r \binom{n}{r}.$$

Aufgabe 2.
Zeigen Sie: Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}.$$

Aufgabe 3.
Wie viele $(x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{N}_0^r$ gibt es zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ mit

$$n = x_1 + \cdots + x_r \ ?$$

Geben Sie eine (kurze) kombinatorische Lösung und zusätzlich einen Induktionsbeweis, z. B. unter Benutzung von Aufgabe 2.

Aufgabe 4.
Es sei wie in der Vorlesung für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{C}$

$$x^{\underline{n}} = x\,(x-1)\cdots(x-n+1) \quad \text{und} \quad x^{\overline{n}} = x\,(x+1)\cdots(x+n-1).$$

Zeigen Sie: Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}}\, y^{\underline{n-k}} \quad \text{und} \quad (x+y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}}\, y^{\overline{n-k}}.$$

Abgabe: Mittwoch, den 25. 4., bis 14.00 Uhr im Übungskasten des Lehrstuhls.

2. Übung zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ (SS 01)

Prof. Dr. H. Pahlings

Hausaufgaben

Aufgabe 5.
Zeigen Sie, dass für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gilt:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \ldots > \binom{n}{n},$$

wobei wie üblich für $a \in \mathbb{R}$

$$\lfloor a \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq a\}$$

und

$$\lceil a \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid a \leq k\}$$

definiert sei.

Aufgabe 6.
Geben Sie einen kombinatorischen Beweis der folgenden Darstellung der Stirlingzahlen zweiter Art an:

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Hinweis: Zählen Sie mit Hilfe des Inklusion-Exklusion-Prinzips die Anzahl der surjektiven Abbildungen von $\underline{n}$ nach $\underline{k}$.

Aufgabe 7.
Zeigen Sie (z. B. mittels Induktion): $S_{m+n+1,m} = \sum_{k=0}^{m} k\, S_{n+k,k}$.
Vergleichen Sie dies mit Aufgabe 2.

Aufgabe 8.
[Klausuraufgabe TU München 2001.] Zehn befreundete Radrennfahrer nehmen an einem Radrennen der Länge $125,5$ km teil und fahren immer hintereinander. Jeden Kilometer wechseln sie ihre Reihenfolge wie folgt:

- Der erste Fahrer wird der letzte,
- der zweite Fahrer der vorletzte,
- der dritte Fahrer der drittletzte,
- alle anderen Fahrer wechseln um 3 Positionen nach vorne.

(a) Nach wie vielen Wechseln ist zum ersten Mal wieder derselbe Fahrer wie zu Beginn des Rennens an der Spitze? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Wie häufig kommt es insgesamt im Laufe des Rennens vor, dass alle zehn Radfahrer in derselben Reihenfolge fahren wie zu Beginn des Rennens (die Startaufstellung ist hierbei nicht mit zu zählen)? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) In welcher Reihenfolge kommen die zehn Fahrer ins Ziel? Geben Sie als Antwort neben der Begründung auch die Reihenfolge der Startnummern der Fahrer an, wenn zu Beginn des Rennens der Radfahrer an Position i die Startnummer i hatte.

Abgabe: Montag, den 30. 4., bis 12.00 Uhr im Übungskasten des Lehrstuhls.

3. Übung zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ (SS 01)

Prof. Dr. H. Pahlings

Hausaufgaben

Aufgabe 9.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $B_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}$ (die Anzahl <u>aller</u> Partitionen einer n-Menge = Zeilensumme im Stirling-Dreieck 2. Art).

(a) Zeigen Sie: $\quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$

Anleitung: Betrachten Sie für $k = 0, \ldots, n$ die Menge

$$X_k = \{\mathcal{P} = \{A_1, \ldots, A_l\} \in \operatorname{Part}_l\{1, \ldots, n+1\} \mid n+1 \in A_l,\ |A_l| = k+1,\ l \in \mathbb{N}_0\}.$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a): $\quad \sum_{k=1}^{n} k\, S_{n,k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k.$

Aufgabe 10.

[Vordiplomklausur-Aufgabe September 2000.]

(a) Bestimmen Sie für $n \geq 4$ die Anzahl $F(n, n-3)$ der Permutationen aus S_n mit mindestens $n-3$ Fixpunkten.

(b) Gibt es mehr oder weniger als $2\binom{n+1}{3}$ solcher Permutationen?

Aufgabe 11.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $F_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$, und für $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei $F_I = \bigcap_{i \in I} F_i$.

(a) Was ist $|F_I|$?

(b) Berechnen Sie
$$f_n = \Big| \, S_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i \, \Big|,$$
also die Anzahl der „fixpunktfreien” Permutationen.

(c) Was ist $\dfrac{f_{10000}}{10000!}$ ungefähr?

Abgabe: Montag, den 7. 5., bis 12.00 Uhr im Übungskasten des Lehrstuhls.

4. Übung zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ (SS 01)

Prof. Dr. H. Pahlings

Hausaufgaben

Aufgabe 12.

Es sei $M = \{a, b, c, \ldots, z\}$, $N = \{0, 1\}$ und C_n der „Code”, der aus allen Folgen der Länge k mit $1 \leq k \leq n$ besteht, die man aus $0 < i < k$ Buchstaben aus M gefolgt von $k - i$ Ziffern aus N bilden kann.

Wie viele Folgen der Länge k gibt es in C_n? Was ist $|C_n|$? Es wird eine summationsfreie Darstellung der Ergebnisse (mittels erzeugender Funktionen) verlangt.

Wie groß muss man n machen, wenn man mit C_n einen Text mit 20000 verschiedenen Worten verschlüsseln (d. h. komprimieren) will?

Aufgabe 13.

Berechnen Sie explizit $(1 + x + x^2)^{-1} \in \mathbb{F}_2[[x]]$. Dabei ist $\mathbb{F}_2$ der Körper mit 2 Elementen.

Aufgabe 14.

Es sei $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{4 + x - x^2}{3 - 5x + x^2 + x^3} \in \mathbb{Q}[[x]]$. Bestimmen Sie die a_n.

Anleitung: Faktorisieren Sie den Nenner und finden Sie so $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$ mit

$$3 - 5x + x^2 + x^3 = (\alpha_1 - x)\,(\alpha_1 - x)\,(\alpha_2 + x).$$

Bestimmen Sie dann $a, b, c \in \mathbb{Q}$ mit

$$\frac{4 + x - x^2}{3 - 5x + x^2 + x^3} = \frac{a}{\alpha_1 - x} + \frac{b}{(\alpha_1 - x)^2} + \frac{c}{\alpha_2 + x}.$$

Aufgabe 15.

Mr. John F. Moneymaker, der berühmte New Yorker Millionär, hat neulich verraten wie er seine erste Million „gemacht hat”. Er begann völlig mittellos, und nach einem Jahr harter ehrlicher Arbeit betrug sein Nettovermögen genau einen Dollar. Am Ende des zweiten Jahres waren es fünf Dollar. Da beschloss er, in Zukunft in jedem Jahr für das Sechsfache dessen, was er zu Beginn des vorhergehenden Jahres besessen hatte, Waren zu kaufen und sie für das Vierfache dessen, was er zu Beginn des laufenden Jahres besaß, wieder zu verkaufen.

Es sei u_n das Vermögen von Mr. Moneymaker am Ende des n-ten Jahres. Finden Sie eine Rekursionsgleichung für u_n und lösen Sie sie. Wie viele Jahre brauchte Mr. Moneymaker um Millionär zu werden?

Abgabe: Montag, den 14. 5., bis 12.00 Uhr im Übungskasten des Lehrstuhls.

5. Übung zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ (SS 01)

Prof. Dr. H. Pahlings

Hausaufgaben

Aufgabe 16.

Es sei $\mathrm{D}\colon K[[x]] \to K[[x]]$ wie in der Vorlesung die formale Ableitung. Beweisen Sie die Produktregel

$$\mathrm{D}(A \cdot B) = \mathrm{D}(A) \cdot B + A \cdot \mathrm{D}(B)$$

für $A, B \in K[[x]]$.

Aufgabe 17.

[Vordiplomklausur-Aufgabe März 2001.]

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ und $a_n = a_{n-1} + 2\,a_{n-2}$ für alle $n \geq 2$. Bestimmen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion die explizite Darstellung der Folgenglieder a_n.

Aufgabe 18.

Lösen Sie explizit die folgenden gekoppelten Rekursionsgleichungen mittels erzeugender Funktionen.

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \quad b_0 = 0, \\ a_n &= 3\,a_{n-1} + 2\,b_{n-1}, \\ b_n &= a_{n-1} + b_{n-1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 19.

(a) Es sei K ein Körper, $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in K[[x]]$ und $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ für $n \geq 0$.

Zeigen Sie: $$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \frac{A}{1-x}.$$

(b) Zeigen Sie: $$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

(c) Benutzen Sie (a) und (b) um eine Formel für $\sum_{k=0}^{n} k^2$ herzuleiten.

Abgabe: Montag, den 21. 5., bis 12.00 Uhr im Übungskasten des Lehrstuhls.

6. Übung zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ (SS 01)

Prof. Dr. H. Pahlings

Hausaufgaben

Aufgabe 20.

Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$. Zeigen Sie:

(a) $A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ mit den Fibonaccizahlen F_n.

(b) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ für $n \geq 1$.

(c) $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$ für $n \geq 0$.

Aufgabe 21.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $a_n = (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$.

(a) Zeigen Sie: $a_n \in \mathbb{N}$ für alle n.

(b) Geben Sie eine Rekursionsgleichung für a_n an.

(c) Zeigen Sie: 2^{n+1} teilt a_{2n} und es gilt $a_{2n-1} = 2^n \cdot u_n$ mit ungeradem u_n.

(d) Zeigen Sie: $\lfloor (1+\sqrt{3})^{2n-1} \rfloor$ enthält den Faktor 2^n.

Aufgabe 22.

Lösen Sie die folgende Rekursionsgleichung:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0 \ \text{ und } \ a_n = \sum_{k=2}^{n} a_{k-2}\, a_{n-k} \ \text{ für } \ n \geq 2.$$

Aufgabe 23.

Es sei $\mathcal{P}_{n,k} = \{\, (n_1, \dots, n_j) \mid k \geq n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_j \geq 1,\ n_1 + \dots + n_j = n,\ j \in \mathbb{N} \,\}$.

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion für $|\mathcal{P}_{n,k}|$ für festes $k = 1, 2, 3, \dots$.

Abgabe: Montag, den 28. 5., bis 12.00 Uhr im Übungskasten des Lehrstuhls.

7. Übung zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ (SS 01)

Prof. Dr. H. Pahlings

Hausaufgaben

Aufgabe 24.

Wie viele Lösungen hat jeweils die Gleichung $x^3 = x$ bzw. $x^2 + x = 1$
(a) in $\mathbb{Z}_2$, (b) in $\mathbb{Z}_5$, (c) in $\mathbb{Z}_6$?

Aufgabe 25.

In welchen der Ringe (Körper) $\mathbb{Z}_p$ für $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ gilt die Implikation

$$a^2 + b^2 = 0 \;\Rightarrow\; a = b = 0\,?$$

Aufgabe 26.

Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus einen ggT (größten gemeinsamen Teiler) d von

(a) $f = 13090$ und $g = 6239$ in $R = \mathbb{Z}$,

(b) $f = x^4 + 3x^3 + x^2 + 4$ und $g = x^4 + 2x^3 - x - 2$ in $R = \mathbb{Q}[x]$

und stellen Sie d jeweils in der Form $d = af + bg$ mit $a, b \in R$ dar.

Aufgabe 27.

Berechnen Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 4 in $\mathbb{Z}_2[x]$.

Abgabe: Montag, den 11. 6., bis 12.00 Uhr im Übungskasten des Lehrstuhls.

8. Übung zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ (SS 01)

Prof. Dr. H. Pahlings

Hausaufgaben

Aufgabe 28.

Auf $M = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ sei die Relation $\sim$ definiert durch $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow b - a = d - c$.

(a) Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation? Wenn ja, geben Sie ein vollständiges Vertretersystem der Äquivalenzklassen an (also eine Teilmenge $V \subseteq M$ mit $M = \dot{\bigcup\limits_{v \in V}} [v]_\sim$).

(b) Ist $\sim$ eine Kongruenzrelation des Monoids $(M, +, (0,0))$, wobei

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

für $a,b,c,d \in \mathbb{N}_0$ definiert sei?

Aufgabe 29.

Gibt es Zahlen $a,b,c,d \in \mathbb{N}$ mit $a^2 + b^2 - 3\,c^2 - 3\,d^2 = 0$?

Aufgabe 30.

Es sei R ein Hauptidealring (also ein Integritätsbereich, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist).

(a) Zeigen Sie:

$$Ra + Rb = Rd$$

für $d \in \operatorname{ggT}(a,b)$. Insbesondere existieren in einem Hauptidealring stets größte gemeinsame Teiler. Hierbei ist die Summe der Ideale Ra und Rb natürlich so definiert:

$$Ra + Rb = \{ya + zb \mid y \in R, z \in R\}.$$

(b) Definieren Sie analog zum ggT ein kgV und zeigen Sie:

$$Ra \cap Rb = Rd$$

für $d \in \operatorname{kgV}(a,b)$.

Aufgabe 31.

Es sei $R = \mathbb{Z}_2[x]$ und $f = x^3 + 1 \in R$ und

$$\overline{R} = R/fR = \{\, [g]_f \mid g \in R \,\},$$

wobei $[g]_f = g + fR$ ist.

(a) Zeigen Sie: $|\overline{R}\,| = 8$.

(b) Bestimmen Sie alle Einheiten in $\overline{R}$ (also $\overline{R}^*$).

(c) Bestimmen Sie alle Quadrate in $\overline{R}$.

(d) Wie viele $[g]_f$ in $\overline{R}$ gibt es mit $[g]_f^2 = [g]_f$?

Abgabe: Montag, den 18. 6., bis 12.00 Uhr im Übungskasten des Lehrstuhls.

9. Übung zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ (SS 01)

Prof. Dr. H. Pahlings

Hausaufgaben

Aufgabe 32.

Es sei $K = \mathbb{Z}_2$ und $f = x^3 + x^2 + 1 \in K[x]$ und $L = K[x]\,/\,fK[x]$ (nach § 5 Satz 2 und Aufgabe 27 ist dies ein Körper mit 8 Elementen). Die Elemente von L werden durch 3 Bits dargestellt:

$$[a_0 + a_1 x + a_2 x^2]_f \longmapsto a_0\ a_1\ a_2 \quad (a_i \in \mathbb{Z}_2).$$

Berechnen Sie die 3-Bit-Darstellungen der Potenzen $([x]_f)^i$ für $i = 1, 2, \ldots, 7$.

Aufgabe 33.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen in $\mathbb{Z}$ von

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \bmod 4 \\ x &\equiv 2 \bmod 5 \\ x &\equiv 3 \bmod 7. \end{aligned}$$

(b) Drei Sender geben alle 5, 7, beziehungsweise 11 Minuten ein Signal ab. Zuletzt wurden ihre Signale vor 1, 4, beziehungsweise 10 Minuten empfangen. Wann werden das nächste Mal alle drei Signale gleichzeitig empfangen?

Aufgabe 34.

Es sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. (Hierbei ist $\sqrt{-5}$ eine komplexe Zahl, deren Quadrat -5 ist.) Zeigen Sie:

(a) R ist ein kommutativer Ring.

(b) $\overline{R} = R/3R$ hat 9 Elemente.

(c) $(\overline{R}, +) \cong (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, +)$ als abelsche Gruppe.

(d) $\overline{R}$ hat genau 4 Ideale.

Abgabe: Montag, den 25. 6., bis 12.00 Uhr im Übungskasten des Lehrstuhls.

10. Übung zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ (SS 01)

Prof. Dr. H. Pahlings

Hausaufgaben

Aufgabe 35.

Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(n) = 4$ und untersuchen Sie, für welche dieser n die prime Restklassengruppe $\mathbb{Z}_n^*$ zyklisch ist. Welche der Gruppen $\mathbb{Z}_n^*$ mit $\varphi(n) = 4$ sind isomorph? Geben Sie jeweils explizit einen Isomorphismus an.

Aufgabe 36.

[Vordiplomklausur-Aufgabe September 2000.]

(a) Es sei φ die eulersche φ-Funktion. Bestimmen Sie $\varphi(2000)$.

(b) Bestimmen Sie diejenige ganze Zahl x mit $0 \le x \le 1999$, die folgende Kongruenz erfüllt:

$$(123)^{802} \equiv x \bmod 2000.$$

Aufgabe 37.

Es sei $K = \mathbb{Z}_2[x]\,/f\mathbb{Z}_2[x]$ mit $f = x^4+x^3+x^2+x+1$ und G die multiplikative Gruppe von K.

(a) Geben Sie mindestens vier erzeugende Elemente von G an in der Form

$$g = [\,a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\,]_f \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{Z}_2.$$

(b) Zeigen Sie: Ist $G = \langle g \rangle$, so ist auch $G = \langle g^2 \rangle$.

Aufgabe 38.

Es sei G die Symmetriegruppe eines Quadrats, also die Gruppe aller Drehungen und Spiegelungen, die das Quadrat in sich überführen.

(a) Geben Sie alle Untergruppen von G an and machen Sie eine Skizze, aus der die Inklusionen ersichtlich sind.

(b) Welche Untergruppen sind Normalteiler?

Hinweis: Benutzen Sie, dass das Produkt von zwei Spiegelungen eine Drehung ist.

Hinweis.

Beachten Sie, das für die Teilnahme an der Schein- bzw. Test-Klausur am 13. 7. eine Anmeldung bis zum 2. 7. erforderlich ist.

Abgabe: Montag, den 2. 7., bis 12.00 Uhr im Übungskasten des Lehrstuhls.

11. Übung zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ (SS 01)

Prof. Dr. H. Pahlings

Hausaufgaben

Aufgabe 39.

Es seien $p_1, \ldots, p_k$ Primzahlen mit $p_i \equiv 1 \bmod 4$ und q ein Primteiler von $4(p_1 \cdots p_k)^2 + 1$. Zeigen Sie, dass -1 ein Quadrat in $\mathbb{Z}_q$ ist, und folgern Sie daraus, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, die kongruent 1 modulo 4 sind.

Aufgabe 40.

Berechnen Sie die Anzahl $N_n(2)$ der irreduziblen Polynome $f \in \mathbb{Z}_2[x]$ vom Grad n für $1 \leq n \leq 10$. Geben Sie für jedes dieser n näherungsweise $\frac{N_n(2)}{A_n(2)}$ an, wobei $A_n(2)$ die Anzahl aller Polynome $f \in \mathbb{Z}_2[x]$ vom Grad n bezeichne.

Aufgabe 41.

Es sei

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

und $C = \{\, c \in \mathbb{Z}_2^7 \mid H \cdot c^T = 0 \,\}$. Was ist $|C|$ und was ist die Minimaldistanz von C? Wie würden Sie $v = [\,0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\,]$ korrigieren, d. h., welches $c \in C$ hat minimalen Hamming-Abstand von v?

Aufgabe 42.

Professor Schlaumeier und seine Frau geben eine Party, an der außer ihnen noch fünf weitere Ehepaare teilnehmen. Bei der Begrüßung geben einige Leute einander die Hand, aber natürlich nicht Ehepartner untereinander. Am Schluss der Party fragt der Professor alle anderen, wie vielen Leuten sie jeweils die Hand gegeben haben, und er erhält elf verschiedene Antworten. Wie viele Gäste hat Frau Schlaumeier mit Handschlag begrüßt?

Hinweis.

Wegen des Hochschulsportfests am 11. 7. können wir die Aufgaben dieses Blattes nicht zur üblichen Zeit am Mittwoch Nachmittag besprechen. Wir bieten deshalb einen Ersatztermin dafür an, nämlich Dienstag, den 10. 7., um 8.15 Uhr in Hörsaal I.

Abgabe: Montag, den 9. 7., bis 12.00 Uhr im Übungskasten des Lehrstuhls.

12. Übung zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ (SS 01)

Prof. Dr. H. Pahlings

Hinweis.

Die Aufgaben auf diesem Übungsblatt sind ein Angebot an alle, die sich vor der Vordiplomklausur am 7. September noch etwas mit Graphentheorie beschäftigen wollen. Darüberhinaus bieten wir in der vorlesungsfreien Zeit drei Diskussionsstunden an, und zwar am Freitag, dem **24. August**, am Dienstag, dem **28. August**, und am Montag, dem **3. September**, jeweils um **10.00 Uhr im Hörsaal I**. Dort können insbesondere die unten stehenden Aufgaben besprochen werden.

Wer die Scheinklausur bestanden, aber die Hausaufgabenbedingung um höchstens 4 Punkte verfehlt hat, kann diese Bedingung noch nachträglich durch eine sinnvolle Bearbeitung einer entsprechenden Anzahl der neuen Aufgaben erfüllen und damit den Übungsschein erwerben. Die Abgabe der Lösungen (im Geschäftszimmer des Lehrstuhls) muss dazu allerdings vor der ersten Diskussionsstunde, also bis zum 24. August um 10.00 Uhr erfolgen.

Hausaufgaben

Aufgabe 43.

Ist $G = (V, E)$ ein nummerierter Graph und ist $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, so heißt $(\mathrm{d}(v_1), \dots, \mathrm{d}(v_n))$ <u>Gradfolge</u> von G.

(a) Gibt es einen Graphen mit Gradfolge

i) $(4, 3, 2, 2, 1)$,

ii) $(3, 3, 3, 1)$,

iii) $(5, 5, 3, 3, 2, 2, 2)$?

(b) Zeigen Sie: Ist $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ (mit $d_i \in \mathbb{N}$), so gibt es einen Graphen mit Gradfolge $(d_1, \dots, d_n)$ genau dann, wenn es einen mit Gradfolge $(d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ gibt.

Aufgabe 44.

Ist $G = (V, E)$ ein Graph, so heißt $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$ <u>Komplementärgraph</u> zu G. Man nennt G <u>selbst-komplementär</u>, wenn $G \cong \overline{G}$ ist. Zeigen Sie, dass für einen selbst-komplementären Graphen $G = (V, E)$ die Kongruenz $|V| \equiv 0$ oder $|V| \equiv 1 \bmod 4$ gilt, und bestimmen Sie alle diese Graphen mit $n \leq 8$ Knoten.

Aufgabe 45.

(a) Skizzieren Sie den Baum, der durch den Prüfercode $(2, 2, 2, 3, 9, 3, 3)$ gegeben ist.

(b) Es sei $d_1, \dots, d_n$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2\,n - 2$. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Bäume auf $V = \{1, \dots, n\}$ mit $\mathrm{d}(i) = d_i$ gerade $\dfrac{(n-2)!}{(d_1 - 1)! \cdots (d_n - 1)!}$ ist.

Aufgabe 46.

Zeigen Sie: Ein planarer Graph, in dem es keinen Kreis der Länge 3 gibt, besitzt einen Knoten v vom Grad $\mathrm{d}(v) \leq 3$.