Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerisches Rechnen — WS 2010/2011

Prof. Dr. Martin Grepl — Jens Berger, Jörn Thies Frings

Klausur Numerisches Rechnen (17.02.2011) (Musterlösung)

- Hilfsmittel: nur dokumentenechtes Schreibgerät (blau oder schwarz); genau ein Taschenrechner, der auf der Liste der erlaubten Taschenrechner steht; ein beidseitig handbeschriebenes Din-A4-Blatt
- kein eigenes Papier benutzen und nicht mit Blei-, Rot- oder Grünstift schreiben
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben
- Aufgabenblätter kontrollieren: insgesamt sieben Aufgaben
- jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen
- keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten

Zum Bestehen der Klausur sind 40 der insgesamt 80 erreichbaren Punkte erforderlich. Die Klausurergebnisse werden voraussichtlich ab Freitag, den 04. März 2011, auf der Webseite zur Veranstaltung bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet am Montag, den 07. März 2011, von 9:00 – 13:00 Uhr im Raum 149 Hauptgebäude statt. Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich. Die Klausur kann nach einer Aufbewahrungsfrist von 5 Jahren innerhalb von 3 Wochen am Institut für Geometrie und Praktische Mathematik abgeholt werden.

Matrikelnummer: ____________________

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Hiermit erkläre ich, dass ich keine anderen als die erlaubten Hilfsmittel benutze. Ferner nehme ich zur Kenntnis, dass bei Täuschungsversuchen, auch solchen zugunsten anderer, die Klausur als *nicht bestanden* bewertet wird.

Datum: ____________________ Unterschrift: ____________________

Korrekturvermerke

A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	$\sum$

Aufgabe 3
Gegeben sei die von zwei Parametern α und β abhängige Matrix $A_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^3$:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{4}+\beta & 5+3\beta \\ -2 & 5+3\beta & 18+9\beta+4\alpha \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix.

b) Geben Sie an, für welche Wahlen der Parameter α und β, die Matrix $A_{\alpha\beta}$ positiv definit ist. Lösen Sie dann das Gleichungssystem $A_{\alpha\beta}x = b$ mit $b = (2,5,6)^T$ und $\alpha = \frac{5}{4}$, $\beta = -1$.

4+4=8 Punkte

Musterlösung

a)

$$\begin{aligned} d_{k,k} &= a_{k,k} - \sum_{j=1}^{k-1} d_{j,j} l_{k,j}^2,\ k = 1, ..., n \\ l_{i,k} &= \frac{1}{d_{k,k}}(a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j} d_{j,j} l_{k,j}),\ i = k+1, ..., n \end{aligned}$$

Hier ist $n = 3$.

$k = 1:$
$$d_{1,1} = a_{1,1} = 1,\ l_{2,1} = \frac{1}{a_{1,1}} a_{2,1} = \frac{1}{2},\ l_{3,1} = \frac{1}{a_{1,1}} a_{3,1} = -2$$

$k = 2:$
$$d_{2,2} = a_{2,2} - d_{1,1} l_{2,1}^2 = \frac{9}{4} + \beta - 1 - \frac{1}{4} = 2 + \beta,$$
$$l_{3,2} = \frac{1}{d_{2,2}}(a_{3,2} - l_{3,1} d_{1,1} l_{2,1}) = \frac{5 + 3\beta - (-2)1\frac{1}{2}}{2+\beta} = \frac{6+3\beta}{2+\beta} = 3$$

$k = 3:$
$$d_{3,3} = a_{3,3} - d_{1,1} l_{3,1}^2 - d_{2,2} l_{3,2}^2 = 18 + 9\beta + 4\alpha - 1(-2)^2 - (2+\beta)3^2 = 4\alpha - 4.$$

Damit sieht die Cholesky-Zerlegung von A wie folgt aus:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{4}+\beta & 5+3\beta \\ -2 & 5+3\beta & 18+9\beta+4\alpha \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\beta & 0 \\ 0 & 0 & 4\alpha-4 \end{pmatrix}}_{=D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=L^T}$$

b) Damit die Matrix positiv definit ist, müssen alle Diagonaleinträge von D positiv sein. Damit ergeben sich zwei Bedingungen an die beiden Parameter:

$$2 + \beta > 0 \quad \text{und} \quad 4\alpha - 4 > 0$$

Mit $\alpha = \frac{5}{4}$ und $\beta = -1$ sieht das zu lösende System wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Substituiert man $DL^T x = y$ erhält man das Gleichungssystem $Ly = b$, das man durch Vorwärtseinsetzen lösen kann:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 2 \\ y_2 &= 5 - \tfrac{1}{2} \cdot 2 = 4 \\ y_3 &= 6 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = -2 \end{aligned}$$

Jetzt kann man die Substitution wieder rückgängig machen und $DL^T x = y$ lösen. Hier ist speziell $D = I$ und damit entfällt der Skalierungsschritt. Zu lösen ist also nur noch $L^T x = y$ durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 2 + 2 \cdot (-2) - \tfrac{1}{2} \cdot 10 = -7 \\ x_2 &= 4 - 3 \cdot (-2) = 10 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4
Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + \frac{3}{4}) \\ y &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \qquad \text{in} \quad D = \{(x,y): \ |x|, |y| \le \tfrac{1}{2}\}.$$

a) Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass dieses Gleichungssystem auf D genau eine Lösung besitzt. Verwenden Sie für den Kontraktivitätsbeweis die $\|\cdot\|_2$-Norm.

Hinweis: $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$.

b) Führen Sie einen Schritt der entsprechenden Fixpunktiteration mit dem Startwert $x_0 := (0,0)^T$ aus. Geben Sie ohne weitere Iterationen, aber möglichst genau an, wieviele Schritte höchstens notwendig sind, um die Lösung mit der Genauigkeit $\epsilon = 10^{-3}$, gemessen in der $\|\cdot\|_2$-Norm, zu approximieren.

Hinweis: Sie können für die Fehlerschätzung die Kontraktionskonstante $L := 0.75$ nehmen, falls Sie keine genauere Konstante gefunden haben.

9+4=13 Punkte

Musterlösung

a) Eine Lösung des Gleichungssystems ist ein Fixpunkt der Funktion $F(x,y)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x^2 - y^2 + \frac{3}{4} \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Überprüfung der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes:

a.1) D ist offensichtlich abgeschlossen und damit (als Teilmenge eines vollständigen Raumes) vollständig.

a.2) F ist selbstabbildend, da für $|x|, |y| \le \frac{1}{2}$ gilt

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}) \le & \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + \frac{3}{4}) & \le \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}) = \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot(-1) \le & \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1) & \le \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1) = -\frac{1}{4}, \end{array}\right\} \Rightarrow F(D) \subset D.$$

a.3) Kontraktivität von F. Wegen Mittelwertsatz

$$L := \sup_{(x,y)\in D} \|F'(x,y)\| < 1 \Rightarrow F \text{ ist kontrahierend.}$$

Wir haben

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ x & y \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Anwendung der $\|\cdot\|_\infty$- oder $\|\cdot\|_1$-Norm von F' hilft aber nicht:

$$\sup_{(x,y)\in D} \|F'(x,y)\|_\infty = \sup_{(x,y)\in D} \|F'(x,y)\|_1 = 1.$$

Wir schätzen die $\|\cdot\|_2$-Norm ab:

$$\|F'(x,y)\|_2^2 := \text{der größte Eigenwert von} \quad F'\,F'^* \quad \text{oder} \quad F'^*\,F'.$$

Es gilt

$$F'\,F'^* = \begin{pmatrix} x^2+y^2 & x^2-y^2 \\ x^2-y^2 & x^2+y^2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad F'^*\,F' = \begin{pmatrix} 2x^2 & 0 \\ 0 & 2y^2 \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{aligned} \det(F'\,F'^* - \lambda I) &= \lambda^2 - 2(x^2+y^2)\lambda + 4x^2y^2 \\ &= (\lambda - 2x^2)(\lambda - 2y^2) \Rightarrow \lambda_{\max} = 2\max(x^2,y^2) \le \tfrac{1}{2}, \\ \det(F'^*\,F' - \lambda I) &= (2x^2-\lambda)(2y^2-\lambda) \Rightarrow \lambda_{\max} = 2\max(x^2,y^2) \le \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\max_{(x,y)\in D} \|F'(x,y)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} =: L < 1$$

a.4) Nach dem B. Fixpunktsatz folgt, daß F auf D genau einen Fixpunkt besitzt.

b) Die a-priori Abschätzung für $F(x,y)$ auf D lautet

$$\begin{aligned} \|x_* - x_n\|_2 &\le \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\|_2 && \text{mit } x_0 := (0,0),\ x_1 = (\tfrac{3}{8}, -\tfrac{1}{2}),\ L := \sqrt{\tfrac{1}{2}} \\ &\le \frac{\sqrt{0.5}^n}{1-\sqrt{0.5}} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} && \text{mit einer Genauigkeit } \varepsilon = 10^{-3} \\ &= \frac{\sqrt{(0.5)}^n}{0.29289322} \cdot \frac{5}{8} \le 10^{-3}. \end{aligned}$$

Das gibt

$$\sqrt{0.5}^n \le 4.6863 \cdot 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad n \ge \frac{\ln(0.00046863)}{\ln(0.70710678)} = 22.1185.$$

Also genügen 23 Schritte.

(Bei $L = 0.75$ kommt man auf $n \ge 27.1968$ und damit auf mindestens 28 Schritte.)

Aufgabe 5

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Messwerte y_i:

t_i	0	0.5	1.5
y_i	4	2.5	1.5

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, dass diese Messdaten einer Funktion

$$b(t) = y(t; x_1, x_2) = \frac{1}{t + 2x_1} + x_2$$

genügen. Bestimmen Sie die Parameter x_1 und x_2 optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem, und führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}) = (0.25, 1.5)$ einen Gauß-Newton-Schritt durch. Lösen Sie das auftretende lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen. Berechnen Sie anschließend das Residuum.

10 Punkte

Musterlösung

(i) Mit $x = (x_1, x_2)$ lautet das nichtlineare Ausgleichsproblem

$$\|F(x)\|_2 = \left\| \begin{matrix} y(t_1; x) - y_1 \\ y(t_2; x) - y_2 \\ y(t_3; x) - y_3 \end{matrix} \right\|_2 = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{0+2x_1} + x_2 - 4 \\ \frac{1}{0.5+2x_1} + x_2 - 2.5 \\ \frac{1}{1.5+2x_1} + x_2 - 1.5 \end{matrix} \right\|_2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^{\nvDash}}$$

(ii) Im Gauß-Newton-Verfahren sucht man die neue Näherung $x^{(k+1)}$ als

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)},$$

wobei $s^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ die Lösung der folgenden lineares Ausgleichsproblem ist:

$$\left\| F'(x^{(k)}) s^{(k)} + F(x^{(k)}) \right\|_2 = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\| F'(x^{(k)}) y + F(x^{(k)}) \right\|_2$$

Eine Zeile der Jakobi-Matrix zu $F(x)$ lautet

$$F'(x) = \left(\frac{-2}{(t + 2x_1)^2}, \quad 1 \right)$$

Dies führt mit den Startwerten

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (0.25, 1.5)$$

zu folgender Zeile des lineares Gleichungssystem mit rechter Seite:

$$(F'(x) | - F(x))_i = \left(\frac{-2}{(t_i + 0.5)^2}, \quad 1 \quad \middle| \quad y_i - \frac{1}{t_i + 0.5} - 1.5 \right)$$

Einsetzen der Meßwerte:

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\| F'(x^{(0)}) y + F(x^{(0)}) \right\|_2 = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 1 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right\|_2$$

(iii) Jetzt löst man das lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen

$$A^T A s = A^T b, \quad A = F'(x^{(0)}), \quad b = -F(x^{(0)}),$$

und erhält

$$\begin{pmatrix} 68.25 & -10.5 \\ -10.5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.75 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/42 \\ -5/12 \end{pmatrix}.$$

(iv) Damit ist die neue Näherung

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/42 \\ 5/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/84 \\ 13/12 \end{pmatrix}$$

und auch

$$b(t) \approx \frac{1}{t + 2 \cdot \frac{11}{84}} + \frac{13}{12} = \frac{1}{t + 0.2619} + 1.0833.$$

Das Residium ist

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (b(t_i) - y_i)^2} = 0.91997.$$

Aufgabe 6
Das Integral

$$I := \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{mit} \quad f(x) := \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+0.5}$$

soll numerisch approximiert werden.
Hinweis: Für die Ableitungen des Integranden $f(x)$ gilt

$$|f'(x)| \leq 2, \quad |f''(x)| \leq 7.424, \quad |f'''(x)| \leq 22, \quad |f^{(4)}(x)| \leq 184.2, \quad |f^{(5)}(x)| \leq 930.9, \quad \forall x \in [0,2].$$

a) Bestimmen Sie I näherungsweise mit der summierten Simpsonregel für Teilintervalle der Länge $h := 2$ und schätzen Sie den Fehler ab.

b) Bestimmen Sie I näherungsweise mit der summierten Mittelpunktsregel für Teilintervalle der Länge $h := \frac{1}{2}$ und schätzen Sie den Fehler ab.

c) Welches der beiden Verfahren (summierte Simpsonregel bzw. summierte Mittelpunktsregel) benötigt weniger Punktauswertungen von f, um einen Fehler von weniger als 0.07 garantieren zu können?

3+3+4=10 Punkte

Musterlösung

a) Die Intervallgrenzen und Teilintervall-Länge $h = 2$ sind vorgegeben. also wendet man auf $n = \frac{2-0}{2} = 1$ Teilintervall die Simpson-Regel (Gewichte $\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$) an:

$$I_2 = 2\left(\frac{1}{6}\frac{\mathrm{e}^0}{0^2+0.5} + \frac{4}{6}\frac{\mathrm{e}^1}{1^2+0.5} + \frac{1}{6}\frac{\mathrm{e}^2}{2^2+0.5}\right) = 3.6303.$$

Fehlerabschätzung:

$$|I-I_2| \leq \frac{(2-0)^5}{2880n^4}\max_{x\in[0,2]}\left|f^{(4)}(x)\right| \left(\overset{\text{auch}}{=} \frac{2^4}{2880}(2-0)\max_{x\in[0,2]}\left|f^{(4)}(x)\right|\right) \overset{\text{Hinweis}}{\leq} \frac{32}{2880}\cdot 184.2 = 2.047.$$

b) Die Intervallgrenzen und die Länge der Teilintervalle $h = \frac{1}{2}$ sind vorgegeben, also wendet man auf $n = \frac{2-0}{1/2} = 4$ Teilintervalle die Mittelpunktsregel (Gewicht 1) an:

$$SI_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{0.25}}{0.25^2+0.5} + \frac{\mathrm{e}^{0.75}}{0.75^2+0.5} + \frac{\mathrm{e}^{1.25}}{1.25^2+0.5} + \frac{\mathrm{e}^{1.75}}{1.75^2+0.5}\right) = 3.791.$$

Fehlerabschätzung:

$$|I - SI_1| \leq \frac{(2-0)^3}{24n^2}\max_{x\in[0,2]}\left|f^{(2)}(x)\right| \overset{\text{Hinweis}}{\leq} \frac{7.424}{48} = 0.1547.$$

c) Um mit der Mittelpunktsregel einen Fehler von

$$|I - SI_1| \leq \frac{(2-0)^3}{24n^2}\max_{x\in[0,2]}\left|f^{(2)}(x)\right| \overset{!}{\leq} \varepsilon := 0.07$$

garantieren zu können, sind

$$n \geq \left(\frac{(2-0)^3}{24\varepsilon} \max_{x\in[0,2]} \left| f^2(x) \right| \right)^{1/2} = \left(\frac{8}{24 \cdot 0.07} \cdot 7.424 \right)^{1/2} = 5.95,$$

d. h. $n \geq 6$ Teilintervalle erforderlich, was auch $n \geq 6$ Funktionsauswertungen entspricht, da bei der Mittelpunktsregel nur eine Funktionsauswertung pro Teilinterval erfolgt.
Um mit der Simpsonregel einen Fehler von

$$|I - SI_2| \leq \frac{(2-0)^5}{2880 n^4} \max_{x\in[0,2]} \left| f^{(4)}(x) \right| \overset{!}{\leq} \varepsilon := 0.07$$

garantieren zu können, sind

$$n \geq \left(\frac{(2-0)^5}{2880\varepsilon} \max_{x\in[0,2]} \left| f^4(x) \right| \right)^{1/4} = \left(\frac{32}{2880 \cdot 0.07} \cdot 184.2 \right)^{1/4} = 2.33,$$

d. h. $n \geq 3$ Teilintervall erforderlich, was $2n + 1 \geq 7$ Punktauswertungen von f entspricht. Somit benötigt hier die summierte Mittelpunktsregel weniger Punktauswertungen als die summierte Simpsonregel, um einen Fehler von weniger als 0.07 sicher garantieren zu können.

Aufgabe 7
Gegeben sei die quadratische Form $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad c = -7.$$

a) Lösen Sie das Problem $x^* = \arg\min_x f(x)$ analytisch.

b) Gegeben sei der Startwert $x^0 = (0,0)^T$. Lösen Sie das Problem $x^* = \arg\min_x f(x)$ mit Hilfe ...

(i) ... des Newton-Verfahrens.

(ii) ... von Konjugierten Gradienten.

5+6=11 Punkte

Musterlösung

a) Es ist $\nabla f(x) = Ax - b$ und $\nabla^2 f(x) = A$. Bestimme x^* mit $\nabla f(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = A^{-1}b$:

$$\begin{aligned} x^* = A^{-1}b &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 4 - (-2) \cdot (-2)} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit erfüllt x^* das notwendige Kriterium 1. Ordnung für eine Minimalstelle von f. Weiter ist A symmetrisch. Zeige noch, dass A positiv definit ist. Wende dazu das Hauptminorenkriterium an: $\det(3) = 3 > 0$ und $\det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot (-2) = 8 > 0$. Damit ist A symmetrisch positiv definit und somit $\nabla^2 f(x^*)$ symmetrisch positiv definit. Damit erfüllt x^* das hinreichende Kriterium 2.Ordnung für eine Minimalstelle von f.

b)

- Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren lautet

$$x^{k+1} = x^k - (\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)$$

Konkret bedeutet das hier:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^0 - A^{-1}(Ax^0 - b) = x^0 - x^0 + A^{-1}b = A^{-1}b \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Newton-Verfahren konvergiert in einem Schritt, weil die Funktion, die man minimieren will, selbst schon eine quadratische Form ist.

- $$\beta_{k-2} = \frac{\langle r^{k-1}, r^{k-1} \rangle}{\langle r^{k-2}, r^{k-2} \rangle} \text{ für } k \geq 2\,, \quad p^{k-1} = r^{k-1} + \beta_{k-2} p^{k-2}$$

$$\alpha_{k-1} = \frac{\langle r^{k-1}, r^{k-1} \rangle}{\langle p^{k-1}, Ap^{k-1} \rangle}\,, \quad x^k = x^{k-1} + \alpha_{k-1} p^{k-1}, \quad r^k = r^{k-1} - \alpha_{k-1} Ap^{k-1}$$

Gegeben sind $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Weiterhin ist $\beta_{-1} := 0$. Es ergibt sich:

$$p^0 = r^0 = b - Ax^0 = b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. Schritt im Algorithmus:

$$\alpha_0 = \frac{(r^0, r^0)}{(p^0, Ap^0)} = \frac{20}{(2,4)\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}} = \frac{20}{(2,4)\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \end{pmatrix}} = \frac{20}{44} = \frac{5}{11}$$

$$x^1 = x^0 + \alpha_0 p^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$r^1 = r^0 - \alpha_0 Ap^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{5}{11}\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 32 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$\beta_0 = \frac{(r^1, r^1)}{(r^0, r^0)} = \frac{\frac{1024+256}{121}}{20} = \frac{1280}{20 \cdot 121} = \frac{64}{121}$$

2. Schritt im Algorithmus:

$$p^1 = r^1 + \beta_0 p^0 = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 32 \\ -16 \end{pmatrix} + \frac{64}{121}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{80}{121}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{(r^1, r^1)}{(p^1, Ap^1)} = \frac{\frac{1280 \cdot 121^2}{121}}{80^2 \cdot (6,1)\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{\frac{121}{5}}{(6,1)\begin{pmatrix} 16 \\ -8 \end{pmatrix}} = \frac{\frac{121}{5}}{88} = \frac{11}{40}$$

$$x^2 = x^1 + \alpha_1 p^1 = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} + \frac{11}{40} \cdot \frac{80}{121}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} + \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$