Auswahl wichtiger Sätze aus der Theorie-Rep-Stunde von Prof. Esser am 31.07.2002

ACHTUNG: möglicherweise fehlerhaft! Für Korrekturen bin ich dankbar: klaus.ridder@gmx.de

Splines

a) Ist eine Funktion (k-1)-mal stetig differenzierbar, (also nicht nur (k-2)-mal), **à** $c_j=0$ (Koeffizienten sind Null) **à** Spline-Funktion ist jetzt sogar **Polynome** (!) vom Grad (k-1).
b) Der Splineraum besteht aus den
   a. Polynomen vom Grade (k-1)
   b. und den geglätteten Funktionen (c^{k-2})., welche stückweise Polynome vom Grad (k-1) sind, und die nicht zu einem Polynom entartet sind.
c) Wenn wir die Glattheit auf k-1 erhöhen, haben wir wieder ein Polynom.
d) Raum k-2: „das glatteste, was man machen kann“.
e) Beispiel k=2: stückweise linear (Punkte mit Lineal verbunden)
f) Beispiel k=4: kubische Spines
   Funktionswert + 1.Ableitung + 2.Ableitung in den Berührungspunkten identisch.
   a. C^3: wieder Polynome
   b. C^2: stückweise Polynome vom Grade 3.

Zerlegungen:

1.) **LR**-Zerlegung: wichtig für
   a. Gauss-Algorithmus
   b. EW, EV über LR-Verfahren bestimmen (nicht gemacht)
2.) **QR**-Zerlegung: sehr wichtig, um
   a. EW, EV bestimmen über QR-Verfahren
   b. Bei Normalengleichunen mit vollem Rang ist QR-Zerlegung sinnvoll
3.) **SVD**-Zerlegung:
   a. Bestimmung der Pseudoinversen
   b. Normalengleichungen bei Rangabfall (eindeutig lösbar bei vollem Rang)

QR-Zerlegung einer Matrix A mit m Zeilen, n Spalten:

Für jede Matrix, die **mindestens so viele Zeilen** wie Spalten hat, existiert eine Zerlegung A=**QR**:

- **Q** = quadratische Matrix mit **m Zeilen**, in der alle Vektoren aufeinander senkrecht stehen
- **R** = gleiche Größe wie A, obere Dreiecksmatrix.

Eigenschaften:

- **Verfahren** zur Berechnung: „Householder-Verfahren“
- **Aufwand** zur Berechnung: $\boxed{\sim 2*n^2m}$ **à** doppelt so aufwendig wie LR-Verfahren
- $\mathbf{Q^1}$ = erste n Spalten von Q: Spalten l.u. **à** **Rg A = Rg R**
  (Beachte: R obere Dreiecksmatrix **à** nur die erste n Zeilen belegt, darunter Nullzeilen.)
- **Basiswechsel von A** motiviert die QR-Zerlegung und sorgt für bessere Konditionierung.

AWP bei gewöhnlicher DGL

$f : D \subset R \times R \to R^n$, D offen.

$f(x,y) \in R^n$

Sei $x_0, y_0 \in D$

AWP:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$
$$y(x_0) = y_o$$

Für ein Intervall I, dass $\mathbf{x_0}$ **als inneren Punkt** enthält, (d.h. x_0 entartet nicht zu einem Punkt x_0), heißt $y \in C^1$ (=1x stetig differenzierbar), „**lokale Lösung**“ des AWP, wenn folgendes gilt:

(i) $y(x_0) = y_o$
(ii) $(x, y(x) \in D.........y \in I$
(iii) $y'(x) = f(x, y(x))........x \in I$
Die DGL ist in jedem Punkt erfüllt: Steigung der Tangente = f(x,y(x))

Eine lokale Lösung $y \in C^1$ heisst **maximale Lösung**, wenn sie jede andere lokale Lösung $w \in C^1$ fortsetzt, d.h.
(1) Der Definitionsbereich der lokalen Lösung ist im Def.bereich der maximalen Lösung enthalten
(2) $w(x) = y(x)$ (eindeutig)

Satz (Hauptsatz, wichtig!!!!!!!!):
D wie oben, f sei

- stetig auf D und
- **erfülle lokale Lipschitz-Bedingung** auf D

è AWP besitzt eine maximale Lösung (eindeutig bestimmt) $y \in C^1$