

Vorname	Name	Matr.-Nr.

1

## Aufgabe 1

## Komplexität

(3+4+3=10 Punkte)

a) Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\frac{n}{\ln n} \in O(\sqrt{n})$$

b) Zeigen Sie, dass  $(n + a)^b \in \Theta(n^b)$ , für  $a, b \in \mathbb{N}$  gilt.

Vorname	Name	Matr.-Nr.

2

c) Lösen Sie die Rekursionsgleichung  $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^3 - n - 1$  mit Hilfe des Mastertheorems.

Vorname	Name	Matr.-Nr.

3

## Aufgabe 2

## Hashing

(3+3+4 = 10 Punkte)

- a) Geben Sie die Hashtabelle an, die entsteht, wenn die unten gegebenen Schlüsselwerte unter Verwendung der Hashfunktion

$$h_1(k) = k \bmod 13$$

sukzessive in eine zu Beginn leere *Hashtabelle mit Verkettung (geschlossene Adressierung)* der Länge 13 eingefügt werden.

Schlüsselwerte: 5, 35, 3, 16, 27, 39, 26

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----







Vorname	Name	Matr.-Nr.

- b) Für welche Eingabe ergibt sich die Worst-Case Laufzeit, für welche die Best-Case Laufzeit? Geben Sie sowohl die Worst-Case als auch die Best-Case Laufzeit an und begründen Sie Ihre Antwort.

Vorname	Name	Matr.-Nr.

8

**Aufgabe 4**                      **Algorithmische Geometrie**                      **(7+3=10 Punkte)**

- a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Graham-Scan Algorithmus die konvexe Hülle der folgenden Punkte. Die *notige Sortierung* soll mit Hilfe von *Insertionsort* realisiert werden:

$(4, 3), (3, 4), (3, 2), (8, 2), (1, 1), (5, 3)$

Geben Sie alle Determinanten an die berechnet werden müssen, sowie jeweils die bereits sortierte Liste bzw. den aktuellen Zustand des Stacks.

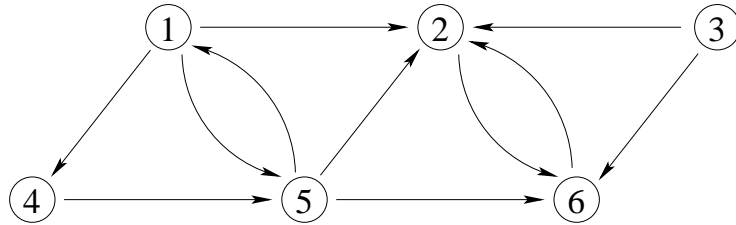
- b) Geben Sie die Worst-Case Laufzeitkomplexität des in a) realisierten Verfahrens an. Begründen Sie Ihre Antwort.



Vorname	Name	Matr.-Nr.

**Aufgabe 5****Graphen****(4+2+4=10 Punkte)**

a) Gegeben sei der folgende Graph:

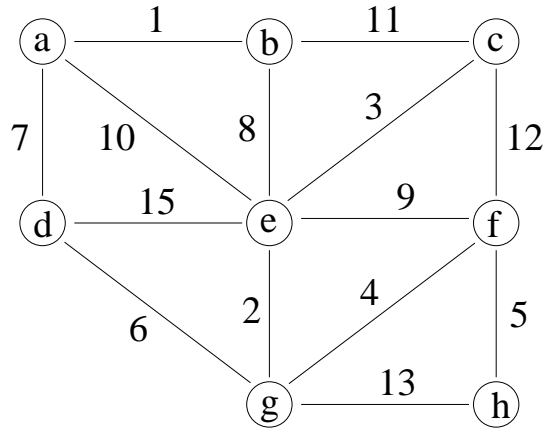


Ermitteln Sie die starken Zusammenhangskomponenten (SCCs) in obigem Graph mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Sharir-Algorithmus.

Geben Sie sowohl den Stack, der in der ersten Phase erzeugt wird, als auch die Leiter und die zugehörigen SCCs aus der zweiten Phase an.

Vorname	Name	Matr.-Nr.

b) Bestimmen Sie mittels des Algorithmus von Prim einen minimalen Spannbaum des nachfolgenden Graphen. Geben Sie an, in welcher Reihenfolge die Kanten in den Spannbaum eingefügt werden. Beginnen Sie beim Knoten *a*.



Vorname	Name	Matr.-Nr.

- c) Ein Quasi-Rot-Schwarz-Baum ist ein Rot-Schwarz-Baum, dessen Wurzel rot anstatt schwarz ist, ansonsten aber alle Eigenschaften des Rot-Schwarz-Baumes erfüllt.

Sei  $T_h$  ein Quasi-Rot-Schwarz Baum mit Schwarz-Höhe  $h$ . Zeigen Sie per Induktion, dass  $T_h$  höchstens  $\frac{1}{2}(4^h) - 1$  innere Knoten besitzt.

Vorname	Name	Matr.-Nr.

**Aufgabe 6      Dynamische Programmierung      (5+3+2=10 Punkte)**

Eine Musik-CD mit einer Spielzeit von  $L$  Minuten soll zusammengestellt werden. Hierzu stehen  $n$  Lieder zur Auswahl, die eine Spielzeit von  $k_1, k_2, \dots, k_n$  Minuten besitzen. Kein Lied soll mehrfach auf einer zusammengestellten CD sein.

Gesucht ist eine Teilmenge  $T \subseteq \{1, \dots, n\}$ , so dass die Summe aller Spielzeiten die Spielzeit der CD nicht überschreitet und die Gesamtspielzeit maximal ist.

- a) Geben Sie eine rekursive Gleichung für das Teilproblem  $C(i, l)$  an, wobei  $C(i, l)$  die maximale Spielzeit für eine CD der Länge  $l \leq L$  und den Liedern  $1, \dots, i, i \leq n$  ist.

Vorname	Name	Matr.-Nr.

- b) Geben Sie eine Implementierung nach dem Prinzip der dynamischen Programmierung an, die die maximale Spielzeit für eine gegebenen CD mit  $L \geq 0$  Minuten und Liedlängen  $k_1, k_2, \dots, k_n$  berechnet.

- c) Geben Sie die Worst-Case Zeit- und Speicherkomplexität des von Ihnen entworfenen Algorithmus an. Begründen Sie Ihre Antwort.