Mathematische Grundlagen zur Vorlesung "Datenstrukturen und Algorithmen"

Achim Lücking Tanja Schroedel

RWTH Aachen - Sommersemester 2001

Vorwort

Hallo zusammen,

aus der Erfahrungen der letzten Semester, in denen wir bereits Übungsgruppen in den Vorlesungen "Programmierung" und "Datenstrukturen und Algorithmen" betreut haben, haben wir festgestellt, daß es gerade im Bereich "Datenstrukturen und Algorithmen" des öfteren Probleme mit der Mathematik gibt. Im richtigen Moment die richtigen Formalen zu haben, oder generell den richtigen Ansatz zu finden, stellt scheinbar für viele ein Problem dar.

Da die mathematischen Grundlagen gar nicht so umfangreich sind und einige wenige Formeln für gewöhnlich reichen, wollen wir mit diesem Skript diesem Problem Herr werden. Außerdem hoffen wir, daß mit diesem Hilfsmittel auch Erstsemster im Sommersemester der Einstieg etwas erleichtert wird, da diesen ja noch die Analysis-Vorlesung fehlt. An dieser Stelle sei auch darauf hingewiesen, daß es sich um kein offizielles Skript von irgendeinem Lehrstuhl handelt, sondern lediglich als Hilfsmittel für unsere Übungsgruppen generiert wurde.

Wir haben in diesem Skript alle relevanten mathematischen Regeln und Kniffe herausgesucht und zusammengetragen, die für die bessere Bewältigung der Aufgaben in Übungen und Klausur nötig sind. Wir hoffen, die wesentlichen Sachen erwischt zu haben, erheben aber keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Richtigkeit, auch wenn alles von uns nach bestem Wissen und Gewissen geprüft wurde. Solltet Ihr Ergänzungsvorschläge oder Fehlerkorrekturen haben, dann schickt uns ein Mail (`dsal@achim-luecking.de` oder `dsal@tanja-schroedel.de`). Da zu befürchten steht, daß sich gerade in der Anfangsphase noch der ein oder andere Fehler eingeschlichen hat, gibt es die jeweils aktuellste Version dieses Skriptes zum kostenlosen Download auf unseren Internetseiten[1].

Das Skript ist noch im Aufbau und wird über das Semester parallel mit der Vorlesung ergänzt, so daß es bis zur Klausur in vollem Umfang zur Verfügung stehen sollte.

Aachen, den 22. Mai 2001

Tanja Schroedel
Achim Lücking

[1] `http://www.dsal.achim-luecking.de` bzw. `http://dsal.tanja-schroedel.de`

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Gauß-Klammern, Summen, Grenzwerte

1.1 Die Gauß-Klammern

Oft taucht die Fragen nach "diesen komischen Haken" in den Formeln zur Komplexitätsabschätzung auf. Da diese doch öfters auftauchen, sollte man sie in jedem Fall kennen und sich einmal ein paar Umformungsregeln dazu verdeutlichen. Die Klammern sehen wie folgt aus:

$$\lceil 2,5 \rceil \quad \text{oder} \quad \lfloor 2,5 \rfloor$$

Diese Klammern heißen **Gauß-Klammern** und schreiben lediglich eine Rundung des geklammerten Terms vor. Man unterscheidet dabei die **obere Gaußklammer** ($\lceil\ \rceil$) und die **untere Gaußklammer** ($\lfloor\ \rfloor$).

Die obere Gaußklammer rundet den geklammerten Term auf die nächste ganze Zahl auf, die untere Gaußklammer rundet analog auf die nächste ganze Zahl ab. D.h. die untere Gauß-Klammer kommt einem Abschneiden der Nachkommastellen gleich, die obere Gauß-Klammer nimmt die nächsthöhere ganze Zahl. Diese Regeln gelten allerdings nur, solange der geklammerte Term nicht ganzzahlig ist. Wird ein ganzzahliger Term mit Gauß-Klammern eingefaßt, so haben diese keinerlei Auswirkung auf den Term.

Am einfachsten sieht man den Effekt an ein paar kleinen Beispielen:

- $\lceil 2 \rceil = \lfloor 2 \rfloor = 2$
- $\lceil 2,2 \rceil = \lceil 2,5 \rceil = \lceil 2,7 \rceil = 3$
- $\lfloor 2,7 \rfloor = \lfloor 2,5 \rfloor = \lfloor 2,2 \rfloor = 2$

Außerdem gibt es für die Gauß-Klammern noch ein paar Umformungsregeln, die ab und an auch recht hilfreich sein können und schon so manche Rechnung vereinfacht haben.

- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $\left\lceil \frac{\lceil \frac{n}{a} \rceil}{b} \right\rceil = \lceil \frac{n}{ab} \rceil$ für alle $n \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

- $\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor = \lfloor \frac{n}{ab} \rfloor$ für alle $n \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

1.2 Summenregeln

Häufig tauchen gerade bei der Betrachtung der Komplexität einer Prozedur unweigerlich Summen auf, die gemeistert sein wollen. Mit den richtigen Regeln und Formeln ist das allerdings meist gar nicht so schwer, wie es auf den ersten Blick aussehen mag.

1.2.1 Verschiebung von Indizes

Oft hat man eine Summenformel, deren Form sehr stark an eine bereits bekannte Summe erinnert, wenn da bloß der falsche Index nicht wäre. Dieses Problem beseitigt man am einfachsten, indem man den Index so verschiebt, daß man die bekannte Formel anwenden kann. In der Theorie sieht das dann so aus:

$$\sum_{k=m}^{l} a_k = \sum_{k=m+p}^{l+p} a_{k-p} \,.$$

Schauen wir uns dazu doch mal ein Beispiel etwas genauer an:

Wir haben gegeben:

$$\sum_{i=2}^{n} (i-2)$$

was uns stark an die sogenannte Gaußformel erinnert, die allerdings bei $i = 0$ anfängt. Wir verschieben also den Index. Dabei ordnen wir den Variablen der obigen Formel zur Indexverschiebung die folgenden Werte zu: $k = i$, $m = 2$ und $l = n$. Wir hätten gerne $i = 0$, also muß gelten $p = -2$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n} (i-2) &= \sum_{i=2-2}^{n-2} (i-2) - (-2) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} i \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} \end{aligned}$$

1.2.2 Nützliche Summenregeln

Größtenteils kann man das Rechnen mit Summen mit ein paar Regeln und geschickten Umformungen recht einfach gestalten. Hierzu dienen uns vor allem die folgenden Rechenregeln und Formeln, die man gerade als Informatiker noch häufiger zu Gesicht bekommen wird.

Rechenregeln

- **Linerität**: Man kann aus Summen vom Laufindex unabhängige Werte (Konstanten) vor die Summe ziehen und man kann eine Summe auseinanderziehen, wenn darin selbst eine Summe (von zwei oder mehr Summanden) vorkommt:

  $\sum_{k=1}^{n}(ca_k + b_k) \;=\; c\sum_{k=1}^{n} a_k \;+\; \sum_{k=1}^{n} b_k.$

- **Doppelsummen**: Sind zwei Summen ineinander verschachtelt, was z.B. bei der Analyse von verschachtelten `FOR`-Schleifen vorkommt, so kann man die Summenzeichen vertauschen:

  $\sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} a_{kj}) \;=\; \sum_{j=1}^{m}(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}).$

- **Produkt von Summen**: Werden zwei Summen multipliziert, dann wird jedes Element der ersten Summe mit jedem Element der zweiten Summe multipliziert:

  $(\sum_{k=1}^{n} a_k)(\sum_{j=1}^{m} b_j) \;=\; \sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{m} a_k b_j).$

Standardsummen

Da es einige Summen gibt, die immer wieder mal vorkommen, haben wir sie hier aufgelistet. Es lohnt sich, sie auswendig zu kennen, da man dann die obigen Regeln so anwenden kann, daß man zu diesen Standardsummen kommt, deren Ergebnisse man kennt.

- $\sum_{k=m}^{n} c \;=\; (n-m+1)c$, wobei c unabhängig vom Laufindex k ist!

- $\sum_{k=0}^{n} k \;=\; \frac{n(n+1)}{2}$, die **Gaußsche Formel**. (Man beachte, daß das k nicht unabhängig vom Laufindex ist, so daß man die erste Formel nicht anwenden kann.)

- $\sum_{k=0}^{n} k^2 \;=\; \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- $\sum_{k=0}^{n} x^k \;=\; \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq 1$. Das ist die **geometrische Reihe**, die dem Informatiker besonders häufig für $x = 2$ begegnet.

- Für $|x| < 1$ ($x \in \mathbb{R}$) gilt: $\sum_{k=0}^{n} x^k \;=\; \frac{1}{1-x}$

Zum Abschluß schauen wir uns noch mal eine kleine Formel an, die häufig vorkommt und verdeutlicht, daß manchmal auch "scharfes Nachdenken" hilft:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} n-k &= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 \\
&= 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Hier haben wir uns also die folgende Rechnung gespart:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} n-k &= \sum_{k=0}^{n} n \; - \; \sum_{k=0}^{n} k \\
&= n(n+1) \; - \; \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{2n(n+1)-n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

1.3 Grenzwerte

1.3.1 Die Regel von l'Hospital

1.3.2 Nützliche Grenzwertregeln

Kapitel 2

Logarithmen

Kapitel 3

Rekursionsgleichungen