Kapitel 2: Objektebene - Techniken

Bestimmung und Darstellung der Technik einer Unternehmung:

Darstellung in (x,y)-Form

1.) Bestimmung sämtlicher Faktoren
Input: x_k Output: y_k

2.) Darstellung der Technik
$T=\{(-x_1,...,-x_k,y_1..y_k)\in R^6|$
sämtliche Produktionsbedingungen
ala Simplex, jedoch sind auch die Schranken durch $x_1..x_k$ ersetzt (es handelt sich um Technik, nicht um spezielle Aktivität!)
Alle Nullen in Gleichungen werden weggelassen, Nichtnegativitätsbedingung hinzugefügt}

Darstellung in (z)-Form

1.) Bestimmung sämtlicher Faktoren
Alle Faktoren werden als $z_1..z_k$ dargestellt, jedoch haben die Inputfaktoren in den Gleichungen negative Vorzeichen

2.) Darstellung der Technik
$T=\{(z_1,...z_k)\in R^6|$
sämtliche Produktionsbedingungen
ala Simplex, jedoch sind auch die Schranken durch $-z_1..-z_g$ ersetzt (es handelt sich um Technik, nicht um spezielle Aktivität!)
Alle Nullen in Gleichungen werden Weggelassen, Nichtnegativitätsbedingung Gilt nur für Output, alle Inputfaktoren unterliegen einer Negativitätsbedingung!}

Bestimmung und Darstellung der Produktionsmenge einer Unternehmung:

Hier handelt es sich nun – im Gegensatz zur Technik – nicht um die technisch theoretischen Möglichkeiten, sondern um die tatsächlich realisierbaren Aktivitäten. Daher wird die pauschale Technik am Einzelfall geeicht.

Formale Darstellung

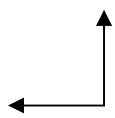
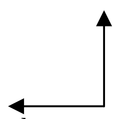
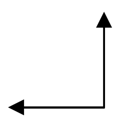
Mathematische Bedingungen, d.h. als Variablen erscheinen nur noch die zu erstellenden Produkte (Simplex!). Allgemein gilt:
Produktionsmenge = Technik $\cap$ Restriktionen
(Technik wird am Einzelfall geeicht)

Grafische Darstellung

Einzeichnen der geeichten Produktionsbedingungen in ein Koordinatensystem. Entstehendes konvexes Polyeder gibt die prinzipell mögliche Produktionsmenge an.
Bedingungen werden nach der zweiten (y) Variable aufgelöst: $6z_5 + 12\, z_6 \leq 9600$ ó $z_6 \leq 800 - 0{,}5\, z_5$
(hier gibt 800 den Achsenabschnitt und 0,5 die Steigung an)
Einzeichnen in ein Koordinatensystem.

Allgemein: sind Prozeßfaktoren vorgegeben, so müssen entsprechende Fallunterscheidungen für Prozeßfaktor = min und Prozeßfaktor = max gemacht werden!

Technikeigenschaften: Größenprogressivität / Größendegressivität / Größenproportionalität

Technik	Formale Darstellung	Grafische Darstellung
Größenprogressivität	$z\in T \rightarrow l * z \in T$ mit $l \geq 1$ Berücksichtigung von Maximalkapazitäten, etc	 Rand = konvex
Größendegressivität	$z\in T \rightarrow l * z \in T$ mit $0 \leq l \leq 1$ Berücksichtigung von Faktorbeschränkungen, etc	 Rand = Konkav
Größenproportionalität	$z\in T \rightarrow l * z \in T$ mit $l \geq 0$ Berücksichtigung von Maximalkapazitäten und Faktorbeschränkungen, etc	 Rand = konkav + konvex = gerade

Technikeigenschaften – Additivität – Linearität - Konvexität

Technik	Formale Darstellung
Additivität	$z_1 \in T, z_2 \in T \rightarrow z_1 + z_2 \in T$ „Parallelproduktion“ à keine Synergien, etc nur ganzzahlige Vervielfachungen
Linearität	Techniken, die sowohl additiv, als auch größenproportional sind $z_1 \in T, z_2 \in T, l_1 \geq 0, l_2 \geq 0 \rightarrow l_1 z_1 + l_2 z_2 \in T$ “Kegeltechniken“ mit der Spitze im Ursprung
Konvexität	$z_1 \in T, z_2 \in T, l_1 \geq 0, l_2 \geq 0, l_1 + l_2 = 1 \rightarrow l_1 z_1 + l_2 z_2 \in T$ l gibt das „Aktivitätsniveau einer Aktivität an

Beispielaufgabe: Läßt sich eine Technik (a,b) durch eine Konvexkombination der Techniken (c,d) und (e,f) darstellen?

Lösung: a = l_1*c+ l_2*e
b = l_1*d+ l_2*f
1 = l_1 + l_2 à auflösen...

Kapitel 4: Ergebnisebene – Ergebnisse der Produktion

Grundannahmen von Techniken:

E1 Kein Ertrag ohne Aufwand, aber Aufwand ohne Ertrag (kein Schlaraffenland)

E2 Auftrags-/Ertragsirreversibilität (Unumkehrbarkeit der Produktion)

E3 Möglichkeit ertragreicher Produktion
(neben Stillstand und Aufwand ohne Ertrag muß mindestens eine Aktivität Output ergeben)

E4 Abgeschlossenheit der Produktion (immer gegeben, wenn Zeichnung möglich)

1. Quadrant – ok Aufwand(negativ) Ertrag(positiv) à normale Situation E3	4. Quadrant – unmöglich Aufwand (positiv) Ertrag (positiv) à Schlaraffenland E1
2. Quadrant – ok Aufwand (negativ) Ertrag (negativ) à Aufwand ohne Ertrag E1	3. Quadrant – unmöglich Aufwand (positiv) Ertrag (negativ) à Umgekehrte Produktion E2

Erwünschtheit von Gütern (rein subjektive, disjunkte Einteilung, situationsabhängig!)

	Output	Input
Gut	Produkt (positiver Tauschwert)	Redukt (negativer Tauschwert)
Übel	Abprodukt (negativer Tauschwert)	Faktor (positiver Tauschwert)
Neutrum	Beiprodukt	Beifaktor

Dominanzuntersuchung: Paarvergleich zweier Objektarten. Eine Dominanz liegt dann vor, wenn gilt:

$z_k^1 \geq z_k^2$ für alle Güterarten $k \in \{1,\dots,K\}$

$z_k^1 \leq z_k^2$ für alle Übelarten $k \in \{1,\dots,K\}$

Neutrale Objekte sind bei Dominanzbetrachtungen bedeutungslos

➔ Im Paarvergleich läßt sich Dominanz nur bestimmen, wenn ein Objekt in sämtlichen Vergleichen siegt, bzw. nur ein Vergleich existiert und diesen Gewinnt. Sobald auch sie Gegenseite einen Vergleich gewinnt, läßt sich keine Dominanz feststellen.

Kapitel 5: Ergebnisebene – Schwaches Erfolgsprinzip

Grundsätzliche Kompensationsbeziehungen:

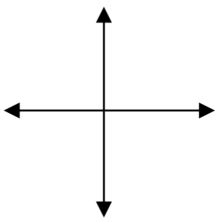
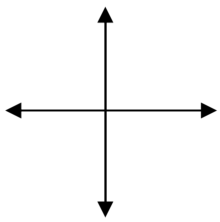
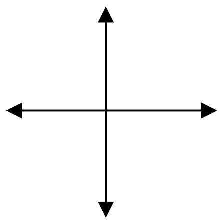
Ertragssubstitution (ein Teilnehmer wächst, der andere schrumpft → Kurve nähert sich an beide Achsen an)
Produkt – Produkt
Redukt – Redukt
Produkt – Redukt ⇔ Redukt – Produkt

Aufwandssubstitution (ein Teilnehmer wächst, der andere schrumpft → Kurve nähert sich an beide Achsen an)
Abprodukt – Abprodukt
Faktor – Faktor
Abprodukt – Faktor ⇔ Faktor – Abprodukt

Aufwands-/Ertrags-Komplement (beide Teilnehmer wachsen) → Kurve wächst ins unendliche
Faktor - Redukt ⇔ Redukt – Faktor
Produkt – Abprodukt ⇔ Abprodukt – Produkt
Produkt – Faktor ⇔ Faktor – Produkt
Redukt – Abprodukt ⇔ Abprodukt – Redukt

Wobei gilt: Input wird negativ gewertet (Faktor + Redukt)
Output wird positiv gewertet (Produkt + Abprodukt)

So daß z.B. gilt: Produkt-Redukt Faktor-Produkt Abprodukt-Redukt

Limitationalität ⇔ Variabilität

Limitationalität: Wenn Output vorgegeben – sind Inputquantitäten bestimmt?
Beispiel: $y_3=5x_1+x_2$ ⇔ es sei: $y_3 = 10$ → $10 = 5x_1+x_2$ → nicht limitational!
Beispiel: $x_1= 2y_3$, $x_2 = 7y_3$ ⇔ es sei: $y_3=10$ → $x_1=20$, $x_2=70$ → limitational!

Variabilität: Komplementarität: Veränderung beider Objektarten in dieselbe Richtung

Substitutionalität: partiell: zwar ist begrenzte Substitution möglich, allerdings kann ein Faktor nicht völlig substituiert werden
Prüfung muß für alle Inputarten erfolgen
Beispiel: $y_3=5x_1x_2$

Totale: ein Input kann total durch anderen ersetzt werden
Beispiel: $y_3=5x_1+x_2$

Grafische Darstellung der Produktionsfunktion: X-Achse = x_1 Y-Achse = x_2
Vorgegebenes y wird eingesetzt und die Funktion nach x_2 aufgelöst → ergibt Achsenabschnittsform

Kapitel 7: Erfolgsebene – Erfolg der Produktion

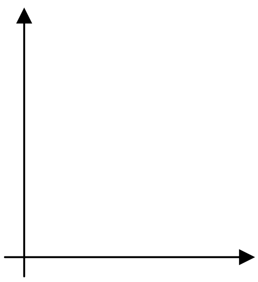
Bewertung des monetären Erfolges

Kennziffern:

Absatz	= Menge in Abhängigkeit vom Preis (Preisabsatzfunktion)
Umsatz	= Preis * Menge
Grenzumsatz:	= Ableitung der Umsatzfunktion
Umsatzmaximum	= Ableitung der Umsatzfunktion = 0 gesetzt
Variable Kosten	= variable Stückkosten * Menge
Grenzkosten	= Ableitung (variable Kosten + Fixkosten)
Deckungsbeitrag	= Umsatz – variable Kosten
Gewinn	= Umsatz – variable kosten – Fixkosten = Deckungsbeitrag – Fixkosten
Grenzgewinn	= Ableitung der Gewinnfunktion
Gewinnmaximum	= Ableitung der Gewinnfunktion = 0 gesetzt

Lernkurve:

Grafisch: Beispielaufgaben $k_1(y) = 100y^{-0,5}$ $k_2(y)=39,81y^{-0,3}$



I. Prozentuale Senkung der Stückkosten bei Verdopplung der Quantitäten
$k_1(1) = 100*1^{-0,5} = 100$ $k_1(2) = 100*2^{-0,5} = 70,71$ (100-70,71) = 29,3 %

II. Bisher 100 Einheiten hergestellt, wieviele zusätzliche Einheiten, damit sich Stückkosten halbieren?
$k_1(100) = 100*100^{-0,5} =3,16$ $k_1(y) = 100*y^{-0,5} =1,58$
y=4000 (4000-1000 = 3000)

III. Wer verursacht anfänglich höhere Kosten $k_1(1) = 100*1^{-0,5} = 100$
$k_2(1) = 39,81*1^{-0,3} = 39,81$
Wer lernt schneller? à Wann Stückkosten halbiert?
$k_1(y) = 100*y^{-0,5} = 50$ ó x = 4
$k_2(y) = 39,81*y^{-0,3} = 19,905$ ó x = 10

IV. Wann fallen für beide gleiche Stückkosten an?
$k_1(y) = 100*y^{-0,5} = k_2(y) = 39,81*y^{-0,3}$ ó y = 100

Produktionsfunktion: gibt die benötigte Faktorkonstellation an

Kapitel 8: Erfolgsebene – Starkes Erfolgsprinzip

Streben nach maximalem Deckungsbeitrag

Gegeben: Produktionsfunktion: $y_2 = 10x_1^{0,5}$
Preise: $p^1 = 4$ à Einkaufspreis für Faktor x_1
$p^2 = 10$ à Verkaufspreis für Produkt y_2

Gesucht: Deckungsbeitragmaximale Produktion: Ableitung des Deckungsbeitrages =! 0
Deckungsbeitrag = Erlöse – Kosten
Erlöse: $E(y_2) = 10*(10x_1^{0,5}) = 100\, x_1^{0,5}$
Kosten: $K(x_1) = 4*x_1$
So ergibt sich der Deckungsbeitrag = $100\, x_1^{0,5} - 4*x_1$
Deckungsbeitragsmaximum: = $(100\, x_1^{0,5} - 4*x_1)' = 50\, x_1^{0,5} – 4$
$50\, x_1^{0,5} – 4 = 0$ ó $12,5\, x_1^{0,5} = 1$ ó $x_1 =156,25$ = Deckungsmax. Stückzahl
Deckungsbeitrag (156,25) = $(100 * 156,25^{0,5} – 4 * 156,25) = 625$

Schattenpreis: Betrag, um den der Preis der beschränkten Objektart verändert (bei Faktoren gesteigert) werden muß, damit bei Wegfall der Beschränkung, die gleiche Produktion erfolgsmaximal ist, wie mit Schranke (=marginale Opportunitätskosten pro Engpaßeinheit)
à Schattenpreis = Preisveränderung!

Ermitteln Sie die Minimalkostenkombination der Produktionsfunktion
Gegeben: $y = 100$ $p_1 = 3$ $p_2 = 2$

$y = x_1 x_2$	
ó $x_2 = y / x_1$ ó $x_2 = 100 / x_1$	

Kapitel 10: Faktorbedarfsermittlung (Leontief Modell)

Gozintograph: Grafische Darstellung des Produktionszusammenhangs Jedes Element erscheint nur Einmal!

Geht ein in:

Direktbedarfsmatrix: ablesbar am Gozintographen Gibt an, wieviele Faktoren Direkt ohne Umwege über Andere Produkte in Objekt Einfließen Diagonale = Nullen!

Objekt

Geht ein in

Gesamtbedarfsmatrix: gibt an, wieviele Objekte Direkt und über Umwege In andere Objekte und in sich Selber eingehen. Daher besteht Die Diagonale aus Einsen.

Objekt

Produktionsmodell mathematisch-formale Darstellung des Produktionszusammenhangs, ergibt sich aus letzter Spalte der Gesamtbedarfsmatrix

$P_5 = 3\ E_1 + 2\ B_4 = 11\ E_1 + 2\ E_2 + 10\ E_3$

Stückkostenkalkulation: Summierung der Kosten aller Einzelteile gemäß der Quantitäten des Produktionsmodells, ggf. Montagekosten, etc. beachten!!

Kapitel 11: Anpassung an Beschäftigungsschwankungen (Gutenberg Modell)

Faktorverbrauch ist nicht nur vom Output, sondern auch von der Produktionsintensität abhängig (Ausschuß, Verschleiß...) Gegeben sind nun Verbrauchsfunktionen mit r als Variablen. Gesucht ist diejenige Intensität im vorgegebenen Intensitätsintervall, bei der der jeweilige Faktorverbrauch sein Minimum erreicht. So wird für das gesamte Intervall von r und allen Verbrauchsverlaufsfunktionen eine Wertetabelle aufgestellt und das jeweilige Minimum der einzelnen Verbrauchsfunktionen ermittelt.

Zeitspezifische Verbrauchsfunktion (Inputkoeffizient)	wieviel Faktor pro Zeiteinheit benötigt	$a_1=0{,}3p^3-2p^2+5$
Zeitspezifische Ausbringungsfunktion (Outputkoeffizient)	Wieviel Produkt wird pro ZE erzeugt?	$b_2=p$
Produktspezifische Gebrauchsfunktion	Wieviel Zeit für eine Produkteinheit?	$\frac{1}{b_2}$
Produktspezifische Verbrauchsfunktion (Produktkoeffizient)	Wieviel Faktor pro Produkt benötigt?	$\frac{a_1}{b_2} = \frac{0{,}3r^3 - 2r^2 + 5}{r}$

Beispielaufgabe:

I. Berechnung der effizienten Intensität r für die produktspezifische Verbrauchsfunktion

$$\frac{a_1}{b_2} = \frac{0{,}3r^3 - 2r^2 + 5}{r} = 0{,}3\,r^2 - 2\,r + 5$$

Antwort: Effiziente Intensität r = Tiefpunkt der produktspezifischen Verbrauchsfunktion

è Ableiten und Maximalstellen bestimmen

$(0{,}3\,r^2 - 2\,r + 5)' = 0{,}6\,r - 2$ ó $0{,}6\,r = 2$ ó $r = 3{,}333$

II. Ermittlung der kostenminimalen Intensität bei Faktorkosten von $c_1=2$ und $c_2=1$

Produktspezifische Verbrauchsfunktionen: $a_{1,3} = 2 + 0{,}1\,r$ $a_{2,3} = 0{,}3\,r^2 - 2\,r + 5$

è Aufstellen der produktspezifischen Kostenfunktion $K_3(r) = c_1 * a_{13} + c_2 * a_{23}$

So ergibt sich: $K_3(r) = 0{,}3\,r^2 - 1{,}8\,r + 9$

è Gesucht ist das Kostenminimum à Ableiten und Maximalstellen bestimmen

$K'_3(r) = 0{,}6\,r - 1{,}8$ à $0{,}6\,r = 1{,}8$ ó $r = 3$

è Was kostet ein gegebener Umsatz bei Intensität $r = 3$?

è Kosten pro Stück bei $r = 3$ $K_3(3) = 0{,}3 * 3^2 - 1{,}8*3 + 9 = 6{,}3$

è Minimalkostenfunktion $K(y_3) = K^*(3) * y_3$

III. Die Tagesproduktquantität soll erhöht werden – welche Faktoren werden variiert?

1.) Ausdehnung des zeitlichen Umfangs bei kostenminimaler Intensität
2.) Erhöhung der Intensität bis zur maximal möglichen Intensität
3.) Quantitative Anpassung durch Erweiterung des Maschinenparks, etc.

IV. Bestimmen Sie die Kostenfunktion der produktspezifischen Verbrauchsfunktion $a_{1,3} = 0{,}3\,r^2 - 2\,r + 5$

Kostenfunktion: $K(y_3) = k(p) * y_3$ è $K(y_3) = (0{,}3\,r^2 - 2\,r + 5) * y_3$ = Gesamtkosten

V. Berechnen Sie die Grenzkosten

Ableitung der Kostenfunktion: $K'(y_3) = (k(p) * y_3)'$ è $K'(y_3) = (0{,}3\,r^2 - 2\,r + 5) * y_3$

VI. Berechnen Sie die Durchschnittskosten: $\frac{K(y_3)}{y_3} = k(p) * y_3$ è $K(y_3) = \frac{(0{,}3\,r^2 - 2\,r + 5) * y_3}{y_3}$

VII. Berechnen Sie die Deckungsbeitragsmaximale Produktquantität bei vorgegebenen Verkaufspreis

DB = E – K DB = Verkaufspreis * y_3 – $K(y_3)$

Deckungsbeitragsmaximale Produktionsmenge = DB' = [Verkaufspreis * y_3 – $K(y_3)$]'

Intensität bei Deckungsbeitragsmaximaler Produktionsmenge (y_3): $p = \frac{y_3}{t}$

Kapitel 13: Losgrößenbestimmung (Harris/Andler-Modelle)

Formel zur Bestimmung der optimalen Losgröße

Lagerhaltung mit schlagartigem Zugang:
(a unbeschränkt → Fremdbezug)

$$q = \sqrt{\frac{2 * b * c^{los}}{c^{lag}}}$$

Lagerhaltung mit stetigem Zugang

$$q = \sqrt{\frac{2 * b * c^{los}}{\left(1 - \frac{b}{a}\right) * c^{lag}}}$$

Variablendefinition

t	Planungszeitraum (Anzahl der Tage)
a	Produktionsrate (Ausbringungsmenge pro Tag)
b	Umsatzrate (Auftragsvolumen/Planungszeitraum)
r	Produktionszeit (für ein Los)
s	Maximaler Lagerbestand
d	Reine Absatzzeit ($d = t - r$)
q	Losgröße
c^{los}	Bestellfixe Kosten/Rüstkosten
c^{lag}	Lagerhaltungskosten

Monatliche Rüstkosten: $K^{los} = clos * \frac{y}{q*}$

Monatliche Lagerkosten: $K^{lag} = clag * \frac{q*}{2} * t * (1 - \frac{b}{2})$

Monatliche Gesamtkosten: $K = K^{los} + K^{lag} + K^{var} + K^{fix}$

Maximaler Lagerbestand: $s = q* (1 - \frac{b}{2})$

Kapitel 14: Dynamische Modelle

Klassische Losgrößenberechnung wirkt hier nicht mehr, da mit schwankendem aber bekannten Bedarf zu kalkulieren ist. Die vorgegebene Maximalkapazität wird nur Befriedigung der aktuellen Nachfrage und der Nachfrage künftiger Perioden aufgeteilt. Hierbei besteht die Schwierigkeit, daß die Produktion für künftige Perioden Lagerkosten verursacht, die naturgemäß minimiert werden wollen. Zudem besteht die Möglichkeit, daß der Produzent zusätzliche Qantitätseinheiten zu überproportional hohen Kosten produzieren kann. Hier gilt es zwischen Lagerkosten und den Kosten für Zusatzkapazitäten abzuwägen.

Anfertigung einer Tabelle:

P	Normalkapazität	Nachfrage	Kapazitätsüber schuß/defizit	Nutzung Zusatzkapazität	Lagerzugang	Lagerabgang	Lagersaldo	Produktion

Dispositionsstufenverfahren - Berechnung des terminierten Materialbedarfs

Es gilt, ein zu montierendes Gut bekannter Zusammensetzung fristgerecht fertigzustellen. Die Abfolge erfolgt vom „oben nach unten“ d.h. zunächst wird das Endprodukt betrachtet, der zu produzierende Nettobedarf (Bruttobedarf – Lagerbestand) ermittelt und ein Betriebsauftrag mit entsprechender Vorlaufverschiebung (Monatgezeit) erteilt. Der so ermittelte Betriebsauftrag wird auf der nächsten Stufe in die Einzelteile unterteilt.

Darstellung in Tabelle:

Gegenstand	Periode 1	Periode 2	Periode 3	Periode 4	
Bedarf = Primärbedarf (einzelnes Produkt) + Sekundärbedarf (Eingang in anderes Produkt)					= Bruttobedarf
Lagerbestand - Sicherheitsbestand = disponibler Lagerbestand					Sicherheitsbestand beachten!
Nettobedarf					Bruttobedarf – dispon- Lager
à Fertigungslos					Richtgrößen beachten
à terminierter Betriebsauftrag					Vorlaufverschiebung wegen Montagezeiten/Lieferzeiten

s_k = Sicherheitsbestand

t_k = Durchlaufzeit