RWTH Aachen **WS 2012/13**
Lehrgebiet Theoretische Informatik Probeklausur
Reidl–Ries–Rossmanith–Sanchez–Tönnis 25.01.2013

Probeklausur zur Vorlesung Berechenbarkeit und Komplexität

Aufgabe 1 (1+2+6+3 Punkte)

Sind die folgenden Sprachen rekursiv oder nicht? Beweisen Sie Ihre Aussage!

a) $L_a = \emptyset$

b) $L_b = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset \}$

c) $L_c = \{ \langle M_1 \rangle \langle M_2 \rangle \mid \langle M_2 \rangle \in L(M_1) \}$

d) $L_d = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ hält auf } \epsilon \text{ in } \langle M \rangle \text{ Schritten} \}$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Zeigen Sie, daß die universelle Sprache $L_U = \{ \langle M \rangle w \mid w \in L(M) \}$ rekursiv aufzählbar ist, indem Sie einen Aufzähler M_{L_U} angeben.

Zur Erinnerung: Ein Aufzähler ist eine Turing-Maschine mit einem zusätzlichen endlosen Ausgabeband, auf die sie alle Wörter, die in der aufzuzählenden Sprache enthalten sind, in beliebiger Reihenfolge (evtl. mehrfach) schreibt. Das Ausgabeband kann von der Maschine *nicht* gelesen werden.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Ein Evolutionsbiologe steht vor folgender Aufgabe: Für eine Menge von nah verwandten Spezies soll anhand eines bestimmten DNA-Abschnitts entschieden werden, wie dieser Abschnitt wohl für den gemeinsamen evolutionären Vorfahren aussah. Als Arbeitshypothese soll dazu eine DNA-Sequenz berechnet werden, die allen gegebenen Abschnitten möglichst ähnlich sein soll (alle DNA-Abschnitte besitzen die gleiche Länge n).

Als Maß entscheidet sich der Biologe für die maximale *Hammingdistanz* der berechneten Sequenz zu allen gegebenen; die Distanz der berechneten Sequenz sollte also zu jeder anderen Sequenz höchstens t betragen.

Zeigen Sie, daß dieses Problem in NP liegt.

Hinweis: Die Hammingdistanz zweier Sequenzen ist definiert als die Anzahl der Positionen, an denen sie sich unterscheiden.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Bei der Versteigerung von Funkfrequenzen für Mobilfunknetze ist der Preis, den ein Bieter bereit zu zahlen ist, von der Anzahl der ihm zugesprochenen Frequenzbänder abhängig—welche Frequenzen er erhält, spielt keine Rolle.

Formalisiert wird diese Situation durch das Problem Multi-Unit Auction: Eine große Anzahl m gleichartiger Gegenstände (hier Frequenzbänder) wird an n Bieter versteigert, wobei jeder Bieter i einen unterschiedlichen Preis für die Anzahl s_i der im zugesprochenen Gegenstände zahlt. Dieser Preis wird für diesen Bieter als Valuierungsfunktion $v_i\colon \{1, \ldots, m\} \to \mathbb{Q}$ modeliert.

Beim Entscheidungsproblem MULTI-UNIT AUCTION ist gefragt, ob eine Verteilung $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ der Gegenstände existiert, so daß der Gesamtgewinn $\sum_{1\leq i\leq n} v_i(s_i)$ mindestens T beträgt.

Zeigen Sie durch die Reduktion KNAPSACK $\leq_p$ MULTI-UNIT AUCTION, daß dieses Problem NP-schwer ist.

MULTI-UNIT AUCTION

Eingabe: Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$, n monoton steigende Valuierungsfunktionen $v_i\colon \{1, \ldots, m\} \to \mathbb{Q}$ und eine Zahl $T \in \mathbb{N}$

Problem: Existiert ein Tupel $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ mit $\sum_{1\leq i\leq n} s_i \leq m$, so daß $\sum_{1\leq i\leq n} v_i(s_i) \geq T$?

KNAPSACK

Eingabe: Eine Menge von Objekten I, wobei jedem Objekt $i \in I$ die Größe $w_i \in \mathbb{N}$ und der Wert $v_i \in \mathbb{N}$ zugeordnet ist. Außerdem ein Maximalgewicht $w \in \mathbb{N}$ und ein Minimalwert $v \in \mathbb{N}$.

Problem: Existiert eine Teilmenge $I' \subseteq I$ der Objekte, für die gilt, daß $\sum_{i\in I'} w_i \leq w$ und $\sum_{i\in I'} v_i \geq v$?

Hinweis: Nehmen Sie an, daß die Valuierungsfunktionen einer MULTI-UNIT AUCTION-Instanz als Wertetabellen kodiert werden.