1 Mengen, Relationen & Abbildungen

1.1 Mengen

1.1.1 Def. Menge (Cantor)

... (s. DS)

1.1.2 Charakterisierung

- direkt: $A = \{a, b, c\}$
- sprachlich: $A_{AC} = \{\text{alle Autos in Aachen}\}$
- per Eigenschaft: $A_E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 10\}$

1.1.3 Grundlagen & Begriffe

Vereinigung: $A \cup B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$

Durchschnitt: $A \cap B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$

Differenz: $A \setminus B = \{x; x \in A \vee x \notin B\}$

Teilmenge: $A \subset B$: A ist Teilmenge von B. Für alle $x \in A$: $x \in B$

$A = B$**:** $A \subset B$ und $B \subset A$

leere Menge: $\{\}$ oder $\varnothing$, Menge ohne Elemente

disjunkt: A und B heißen *disjunkt*, falls $A \cap B = \varnothing$

Komplement: Für $A \subset B$ ist das Komplement A^C definiert: $A^C = \{x \in B \mid x \notin A\} = B \setminus A$

1.1.4 Kartesisches Produkt

Definition: Für zwei Mengen A, B heißt die Menge $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ das kartesische Produkt.

Bemerkung:

1. Reihenfolge: $(a, b) \neq (b, a)$
2. analog: $A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$
3. (a, b) heißt Paar
   (a, b, c) heißt Tripel
   allgemein: n-Tupel

1.2 Relationen

Definition:

1. Eine beliebige Teilmenge von $A \times B$ heißt *Relation*.
2. Für $R \subseteq A \times B$ schreiben wir $x\mathrm{R}y$, d.h. x “steht in Relation zu” y.
3. Im Spezialfall $A = B$ ist R eine Relation in A.

Beispiele:

1. $A = \{a, b, c\}$

$A \times A$	a	b	c
a	(a, b)	(a, b)	(a, c)
b	(b, a)	(b, b)	(b, c)
c	(c, a)	(c, b)	(c, c)

   Diese Elemente bilden unsere Relation R auf/in A

2. $R_1 = \{(a, b) \in A \times A \mid a \text{ ist Kind von } b\}$

1.3 Abbildungen

Definition:

1. Für zwei Mengen A, B heißt die Relation $f \subseteq A \times B$ *Abbildung* oder *Funktion* von A nach B falls gilt: Jedem $x \in A$ wird ein $y \in B$ zugeordnet.
2. A heißt *Definitionsbereich.*
3. B heißt *Bildbereich.*

Bemerkung:

1. Im kartesischen Produkt ist in jeder Zeile genau ein Paar "markiert".
2. Wir schreiben typischerweise die Funktion f als $f : A \to B, x \mapsto f(x)$
3. Im Gegensatz zum Bildbereich ist der Wertebereich $W_f \subseteq B$ gegeben durch $W_f = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ mit } f(x) = y\}$
4. Image von f: $Im(f) := W_f$
5. Die Paare $\{(x, y)\} \in A \times B \mid y = f(x)\}$(also die Relation) heißt *Graph.*
6. f bezeichnet die Operation oder den Vorgang der Abbildung, nicht den Wert!
   Wenn $f(x) = x^2$, dann $f = ()^2$

Beispiele:

- konstante Funktion:
  Sei $C \in B, : A \to B, x \longmapsto f(x) = C \in B$

1.3.1 Bild

Definition:

1. Sei $f : A \to B$. Für $M \subseteq A$ heißt die Menge $f(M) := \{y \in B \mid \exists x \in M \text{ mit } f(x) = y\} \subseteq B$ das Bild von M.
2. Für $N \subseteq B$ heißt die Menge $f^{-1}(N) := \{x \in A \mid f(x) \in N\} \subseteq A$ das Urbild von N

1.3.2 Eigenschaften einer Abbildung

Definition: Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann heißt f:

1. surjektiv, falls $\forall y \in B$, die Menge $f^{-1}(\{y\})$ mindestens ein Element hat („f erreicht ganz B"),
2. injektiv, falls $\forall y \in B$, die Menge $f^{-1}(\{y\})$ höchstens ein Element hat („unterschiedliche Werte aus A werden auf unterschiedliche Werte aus B abgebildet"),

3. bijektiv, falls $\forall y \in B$, die Menge $f^{-1}(\{y\})$ genau ein Element hat.

Bemerkung:

1. $Im(f) = B$
2. aus $x_1 \neq x_2$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$

1.3.3 Komposition

Definition: Für $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ heißt die Abbildung $h := g \circ f : X \to Z, x \longmapsto h(x) = g(f(x)$ die *Komposition* oder *Hintereinanderausführung* oder *Verknüpfung* von f und g.

Bemerkung:

- Die Verknüpfung ist assoziativ:
  $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$
- Sie ist nicht kommutativ:
  $f \circ g \neq g \circ f$

Beispiel:

- Sei $f : X \to Y, id_x : X \to X$
  dann: $f \circ id_x = id_y \circ f$
  $f(id_x(x)) = id_y(f(x))$
- $f(x) := x^2, g(x) := 2x$
  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4x^2$
  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2x^2$

1.3.4 Umkehrfunktion

Definition Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ lässt sich umkehren, d.h. es existiert eine Funktion $f^{-1} : Y \to X$, sodass gilt $f \circ f^{-1} = id$ bzw. $f^{-1} \circ f = id$. f^{-1} heißt *Umkehrfunktion.*

2 Die natürlichen Zahlen

Die wichtigste Menge der Mathematik ist die Mege der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Bemerkung:

1. Für $\mathbb{N} \cup \{0\}$ schreiben wir $\mathbb{N}_0$
2. $\mathbb{N}$ lässt sich axiomatisch definieren.
3. Für die Mächtigkeit einer Menge A („Anzahl”) schreiben wir $\mid A \mid$
   Beispiel: $\mid \emptyset \mid= 0, \mid \{a, b, c\} = 3, \mid \mathbb{N} \mid= \infty$
4. ∞ ist keine natürliche Zahl.

3 Die ganzen Zahlen

Auf $\mathbb{N}$ ist eine Verknüpfung definiert: „+": $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, das ist die Addition (z.B. $1 + 1 = 2$). Aber $+$ hat in $\mathbb{N}$kein neutrales Element n mit $a + n = a$ (offenbar $n = 0$). Außerdem gibt es in $\mathbb{N}$ keine inverse Elemente a mit $a + a' = n$ (offenbar negative Zahlen). Wir erweitern $\mathbb{N}$ zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

4 Die rationalen Zahlen

Es existiert eine weiter Verknüpfung $\cdot$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, das ist die Multiplikation. Es gibt kein Inverses mit $a \cdot a' = n$. Wir erweitern $\mathbb{Z}$ auf die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\}$

5 Die reellen Zahlen

Definition Für eine Menge M seien folgende Bedingungen erfüllt:

1. Es gibt zwei Verknüpfungen ($+$ und $\cdot$) mit neutralem Element und inversem Element.
2. Es gibt eine Ordnungsrelation $\leq$ auf M verträglich mit $+$ und $\cdot$.
   (a) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
   (b) $x \geq y \geq 0 \Rightarrow x - y \geq 0$
3. *Vollständigkeitsaxiom:* Jede nicht leere nach oben beschränkte Teilmenge von M besitzt eine kleinste obere Schranke.

Bemerkung

1. Mit dieser Definition nennen wir M den reellen Zahlenkörper $\mathbb{R}$. Wir schreiben $x \in \mathbb{R}$
2. $\mathbb{R}$ ist durch diese Axiome quasi eindeutig definiert.
3. Wegen der Anordnung können wir uns $\mathbb{R}$ als orientierte Zahlengerade vorstellen
4. aus $\leq$ folgt $\geq, <, >$
5. Wir definieren offene und geschlossene Intervalle
   (a) $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
   (b) $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

5.1 Betrag

Definition: Für $x \in \mathbb{R}$ sei der Betrag definiert durch $|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Lemma: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

1. $|x + y| \leq |x| + |y|$
2. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

5.2 Vollständigkeitsaxiom

Das Vollständigkeitsaxiom löst ein Problem der rationalen Zahlen.

Satz: Es gibt kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 2$.

Beweis (durch Widerspruch): Annahme: $a = \frac{p}{q}$ (mit p oder q ungerade)

$\Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Longrightarrow p$ gerade

Sei $r = \frac{p}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow (2r)^2 = 2q^2 \Rightarrow 2r^2 = q^2 \Rightarrow q$ auch gerade! $\lightning$ $\square$

5.3 Beschränktheit

Definition:

1. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt von oben beschränkt, falls $\exists b \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in A : a \leq b$. b heißt eine *obere Schranke*.
2. s heißt *kleinste obere Schranke für A*, falls s eine obere Schranke ist und für jede andere obere Schranke b gilt: $s \leq b$
3. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt von unten beschränkt, falls $\exists b \in \mathbb{R}$ mit $\forall a \in A : a \geq b$. b heißt eine *untere Schranke*.
4. s heißt *größte untere Schranke für A*, falls s eine untere Schranke ist und für jede andere untere Schranke b gilt: $s \geq b$

Bemerkung:

- die kleinste obere Schranke heißt auch *Supremum*. Schreibweise: $s = \sup A$
- die größte untere Schranke heißt auch *Infimum*. Schreibweise: $s = \inf A$
- $\sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A$
- $\inf A \in A \Rightarrow \inf A = \min A$

5.4 Dichtheit

Satz: Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert immer ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$. Man sagt: $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.

Bemerkung: Die *Dichtheit* bedeutet, wir können reelle Zahlen beliebig gut durch Brüche approximieren.

5.5 Abzählbarkeit

Wie viele Elemente hat $\mathbb{R}$? Was ist die Mächtigkeit $|\mathbb{R}|$?

Definition:

1. Zwei Mengen A, B heißen *gleichmächtig*, falls es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt.
2. Eine Menge A heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.

Satz: $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$ sind abzählbar unendlich.

Beweis: s. Wikipedia: Cantors erstes Diagonalargument

Satz: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar unendlich. $\mathbb{R}$ heißt *überabzählbar*. Wir schreiben $|\mathbb{R}| = \aleph_0$ (gesprochen aleph)

Beweis: s. Wikipedia: Cantors zweites Diagonalargument

Bemerkung:

- $A = \{f \mid f \text{ Abbildung von } [0,1] \text{nach } [0,1]\}$ ist mächtiger als $\mathbb{R}$
- Die Mengen $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$ sind alle gleichmächtig

6 Komplexe Zahlen

Definition: Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir $z = a + b\imath$ mit

- einem Realteil $a = \Re(z) \in \mathbb{R}$
- einem Imaginärteil $b = \Im(z) \in \mathbb{R}$
- der komplexen Einheit $\imath$ für die gilt: $\imath^2 = -1$

6.1 Verknüpfungen

6.1.1 Addition

$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1\imath) + (a_2 + b_2\imath) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\imath$

6.1.2 Multiplikation

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1\imath)(a_2 + b_2\imath) = a_1a_2 + a_1b_2\imath + a_2b_1\imath + b_1b_2\imath^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\imath$

6.1.3 Inverse

Addition: $-z_1 = -a_1 - b_1\imath$

neutrales Element: $z_1 \cdot n = z_1 \Rightarrow n = 1 + 0\imath$

Multiplikation: $\frac{1}{z_1} := \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2} - \frac{b_1}{a_1^2+b_1^2}\imath$
$z = a + b\imath \in \mathbb{C}$

6.2 Komplexe Konjugation

Definition: Für $z \in \mathbb{C}$ mit $z = a + b\imath$ ist die *komplex-konjugierte Zahl* definiert durch $\overline{z} := a - b\imath$

Bemerkung: Es gilt: $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

6.3 Betrag

Definition: Für $z \in \mathbb{C}$ ist der Betrag $|z|$ definiert durch $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Bemerkung:

- Es gilt $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Es gilt $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- Es gilt $\Im(z) = \frac{1}{2\imath}(z - \overline{z})$

6.4 Multiplikation

$(a, b) \to (r, \varphi)$, r: Radius, $r \geq 0$, φ: Winkel, $\varphi \in [0, 2\pi]$ oder $\varphi \in [-\pi, \pi]$
$z = a \cdot b\imath = r(\cos\varphi + \sin\varphi\imath)$, $a = r \cdot \cos\varphi$, $b = r \cdot \sin\varphi$

Beispiel: $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $r = 2$, $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + sin\frac{\pi}{3}\imath) = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath) = 1 + \sqrt{3}\imath$

6.4.1 Additionstheoreme

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \cos\beta$
$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \cos\beta \cdot \sin\alpha$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\imath)$

Merke: Bei der Multiplikation gilt:

- die Radien multiplizieren sich
- die Winkel addieren sich

Insbesondere gilt: $(\cos\varphi + \sin\varphi\imath)^2 = \cos 2\varphi + \sin 2\varphi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\imath^2 + 2 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi\imath$

Satz: Für $z \in \mathbb{C}$ mit $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi\imath)$ gilt für $n \in \mathbb{N}$: $z^n = r^n(\cos(n \cdot \varphi) + \sin(n \cdot \varphi)\imath)$

Beispiel: $z^2 = i = \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\imath$
Radius von z: $r = 1$
$z = \cos\alpha + \sin\alpha\imath$

- 1. Möglichkeit: $\alpha = \frac{\pi}{4}$, denn $2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
- 2. Möglichkeit: $\alpha = \frac{5\pi}{4}$, denn $2 \cdot \frac{5\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

Umrechnung der Darstellungsweisen von komplexen Zahlen $z = a + b\imath = r(\cos\varphi + \sin\varphi\imath)$

$\varphi = \arctan\frac{b}{a}, a > 0, b \geq 0$

$\varphi = \pi + \arctan\frac{b}{a}, a < 0, b \in \mathbb{R}$

$\varphi = 2\pi + \arctan\frac{b}{a}, a > 0, b < 0$

$\varphi = \frac{\pi}{2}, a = 0, b \geq 0$

$\varphi = \frac{3\pi}{2}, a = 0, b < 0$

7 Polynome

Definition: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ ist $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto p(x) = \sum a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ ein Polynom. n heißt *Grad* des Polynoms mit $a_n \neq 0$. Ein $x_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(x_0) = 0$ heißt Nullstelle von p.

Bemerkung:

1. Falls $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ Heißt p ein komplexes Polynom.
2. Für $n = 1, p(x) = a_0 + a_1 x$ gibt es eine Nullstelle $(a_1 \neq 0)$
3. Für $n = 2, p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ gibt es *immer* zwei Nullstellen. Eine Nullstelle kann auch eine *mehrfache Nullstelle* sein.
4. Für $n = 3, 4$ gibt es komplizierte Formeln Für die Nullstellen.
5. Für $n \geq 5$ gibt es keine Formel Für die Nullstellen.

Satz: Sei p ein Polynom von Grad n und $k \in \mathbb{N}$ Nullstellen seien bekannt $(x_1, x_2, ...x_k)$. Dann kann p als Produkt mit Linearfaktoren geschrieben werden: $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_k)q(x)$ wobei $q(x)$ ein Polynom mit Grad $n - k$ ist.

Beispiel:

1. $p(x) = 2x^2 - x - 6, x_1 = 2, x_2 = -\frac{3}{2}$
   $p(x) = (x - 2)(x - (-\frac{3}{2}))q(x)$ mit $q(x) = 2$ (Polynom 0ten Grades)
2. $p(x) = x^2 + 2x + 1, x_1 = -1$ (doppelt)
   $p(x) = (x - (-1))q(x)$ mit $q(x) = x + 1$
   $p(x) = (x + 1)(x + 1)$
3. $p(x) = x^2 + 2, x_1 = \pm\sqrt{2}\imath$
   $p(x) = (x - \sqrt{2}\imath)(x - (-\sqrt{2}\imath))$
4. $p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = -3$
   $p(x) = (x - 2)(x - 4)(x + 3)$
5. $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 12x - 3$
   $p(x) = 2(x - (1 + 2\imath))(x - (1 - 2\imath))(x - \frac{1}{2})$

7.1 Fundamentalsatz der Algebra

Satz (Fundamentalsatz der Algebra, Gauß 1799): Jedes Polynom n-ten Grades mit $n \geq 1$ hat genau n Nullstellen $x_j \in \mathbb{C}, j = 1, ..., n$. Diese werden entsprechend der Linear-Faktoren mehrfach gezählt.

Bemerkung: Falls p reelle Koeffizienten hat, dann sind entweder alle Nullstellen reell, oder die komplexen Nullstellen treten paarweise komplex konjugiert auf.

Beispiel: $p(x) = x^2 - 2x + 5$, Nullstellen: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2\imath$, $x_2 = \overline{x_1}$

8 Folgen

Definition: Folgen sind *Abbildungen* der Form $a : \mathbb{N} \to A$, wobei A irgendeine Menge ist. Statt $a(n)$ schreiben wir a_n. Für die Folge a schreiben wir oft $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$. Die a_n werden als *Folgenglieder* bezeichnet.

Beispiel:

- $a_n := \frac{1}{n^2}$, also $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ...$
- $a_n := 1$, also $1, 1, 1, ...$
- $a_n := 2^n$, also $2, 4, 8, 16, ...$
- anderer Startpunkt: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $a_n = 2^n$, also $1, 2, 4, 8, ...$
- $a_n := \imath^n$, also $\imath, -1, -\imath, 1, \imath, -1, ...$
- $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$, also $2, 2.25, 2.37, ...$ (geht gegen e)
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_1 = 1, a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$, also $1, \frac{3}{2}, 1.416, ..., 1.4142, ...$ (geht gegen $\sqrt{2}$)

8.1 Grenzwert & Konvergenz

Definition: Eine Folge $a_n \subset \mathbb{R}$ oder $a_n \subset \mathbb{C}$ besitzt einen *Grenzwert* $a \in \mathbb{R}$ (bzw. $a \in \mathbb{C}$), falls $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0$. Wir schreiben $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ oder $a_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ und nennen (a_n) *konvergent*, andernfalls *divergent*.

Bemerkung:

1. ε ist eine gewünschte Genauigkeit, n_0 ist der dazu nötige minimale Index. n_0 hängt typischerweise von ε ab.
2. oben sind $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\imath^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent.

Definition: Die Menge $B_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$ Heißt *offene ε-Umgebung* von a. Dies ist ein offenes Intervall. Analog: $B_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}$, dies ist eine Kreisscheibe in $\mathbb{C}$.

Bemerkung: $\lim_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow$in jeder ε-Umgebung von a liegen alle Folgenglieder bis auf endlich viele.

8.2 Beschränktheit

Definition: $(a)_n \subset \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls es ein $S \in \mathbb{R}, S \geq 0$ gibt mit $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq S$

Satz: Jede konvergente Folge $(a)_n \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt.

Bemerkung:

1. Es gilt nicht beschränkt$\Rightarrow$konvergent. Beispiel: $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt, ist aber nicht konvergent.
   Beschränktheit ist notwendig für Konvergenz, aber nicht hinreichend.
2. *konvergenz$\Rightarrow$beschränkt* ist äquivalent zu *nicht beschränkt$\Rightarrow$nicht konvergent*.
3. unbeschränkte Folgen, die gegen $+\infty$ oder $-\infty$ gehen, heißen *bestimmt divergent*. Andernfalls (im oszillierenden Fall) heißt die Folge *unbestimmt divergent*.

8.3 Monotonie

Definition: Eine reelle Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$.

Bemerkung: analog Für fallend, sowie *streng* monoton falls $<$ bzw. $>$.

Satz: Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Folge. Falls (a_n) beschränkt ist, dann ist sie konvergent. (analog für fallend)

Bemerkung:

1. Das heißt *beschränkt+monoton⇒konvergent.*
2. *beschränkt+monoton* ist hinreichend für Konvergenz, aber nicht notwendig.

8.4 Cauchy-Folge

Definition: $(a_n) \subset \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, |a_n - a_m| \leq \varepsilon, m \geq n \geq n_\varepsilon$. Cauchy-Folge⇔Konvergenz

Satz: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent genau dann, wenn (a_n) Cauchy-Folge ist (hinreichend + notwendig).

Bemerkung: Tatsächlich ist das „Vollständigkeitsaxiom" der reellen Zahlen äquivalent zur Aussage „Jede Cauchy-Folge konvergiert." Oft wird $\mathbb{R}$ mit diesem Satz definiert.

Betrachte $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_1 = 1, a_{n+1}\frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$. Dies ist eine Cauchy-Folge, aber $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ konvergiert nicht (in $\mathbb{Q}$) denn $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ wird vervollständigt durch die Forderung bzw. das Axiom „Alle Cauchy-Folgen konvergieren."

Beispiel:

1. $a_n = \frac{1}{n+1}$ ist Cauchy, denn: Sei $\varepsilon > 0$. $|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}| \overset{!}{\leq} \varepsilon$. zunächst: $|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}| \leq |\frac{1}{n+1}| \overset{?}{\leq} \varepsilon$. Wähle n so, dass $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$. $n \leq \frac{1}{\varepsilon} - 1$ $\square$

8.5 Rechnen mit Folgen

Um Grenzwerte auszurechnen, ist folgendes sehr nützlich.

Satz: Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit Grenzwert a und b. Dann gilt:

1. $\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n \quad a, b$ konstant
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a_n}) = \frac{1}{a}, a \neq 0$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}, a > 0$

Beispiel:

1. $a_n \frac{n^2-n}{2n^2+1}, \lim_{n\to\infty} a_n =$? Umformen zu einer Kontinuation von $\frac{1}{n}$:
   $a_n = \frac{n_2(1-\frac{1}{n})}{n^2(2+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n})} = \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}, \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1-0}{2-0\cdot 0} = \frac{1}{2}$
2. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Trick: Erweitern mit der Summe der Wurzeln:
   $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}+\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+1}},$

   $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sqrt{\lim \frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\lim\frac{1}{n}+\lim 1}} = 0$

8.6 Teilfolgen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Sei $n_1 < n_2 < ...$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$, d.h. $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$. Dann nennt man die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz: Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert a, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen diesen Grenzwert.

Beispiel: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{8n})^n = e$

8.7 Sandwich-Lemma

Gegeben seien reelle Folgen $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} a_n = A = \lim_{n\to\infty} c_n, A \in \mathbb{R}$. Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \leq b_n \leq c_n \forall n \geq n_0$, so ist auch $(b_n)_n$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = A$

Beispiel: Sei $b_n = \sqrt{n^2+2} - n$. Untersuche $(b_n)_n$auf Konvergenz mit Hilfe des Sandwich-Lemmas.

Sei $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ und $c_n := \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Es gilt: $a_n = 0 = \sqrt{n^2} - n \leq \sqrt{2+2} - n = b_n \leq \sqrt{n^2+2+\frac{1}{n^2}} - n = \sqrt{(n+\frac{1}{n})^2 - n} = n + \frac{1}{n} - n = \frac{1}{n} = c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wähle also $n_0 = 1$.

Nach dem Sandwich-Lemma gilt dann, dass (b_n) konv. und...

9 Reihen

Praktisch alle interessanten mathematischen Objekte (z.B. Funktionen) können durch Reihen beschrieben werden.

Definition: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge. Die zugeordnete *Reihe* ist die Folge der Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, d.h. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \hat{=} (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, ...)$. Für den Grenzwert schreiben wir: $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

9.1 Wichtige Reihen

1. Die *arithmetische Reihe*: $\sum_{k=1}^{\infty} k$. Offenbar gilt $s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ und $\lim_{n\to\infty} s_n \to \infty$
2. Die *geometrische Reihe*: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + ...$ mit $q \in \mathbb{R}$.
   Für die Partialsumme gilt $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
   Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert falls $|q| < 1$, denn $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\lim q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$
3. Die *harmonische Reihe*: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ divergiert.
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) \to 1$: „Teleskop-Summe”
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$. Es gilt: $\frac{1}{4} < \frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{9} < \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{16} < \frac{1}{3\cdot 4}$. allgemein: $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$
   Partialsumme $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$
   also $s_n < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \overset{Tel.S.}{=} 1 + 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow s_n < 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n < 2 \Rightarrow$ Konvergenz

Bemerkung:

- Für Konvergenz muss offenbar $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein (notwendig)
- Wegen der Rechenregeln für Grenzwerte gilt: Aus $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$, und $\sum_{k=a}^{\infty} b_k = b$ folgt $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha a + \beta b \quad \alpha, \beta$ beliebig
- Für $a_k > 0$ ist $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ monoton wachsend. Dann gilt:
  - Falls s_n beschränkt ist, dann konvergiert $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (d.h. die Reihe)

9.2 Konvergenz

Definition: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$eine monoton fallende Nullfolge mit $a_k > 0$. Dann konvergiert die *alternierende Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$

Warnung: Zwar lässt sich mit Reihen rechnen, aber im Allgemeinen spielt die Summationsreihenfolge eine Rolle.

Beispiel: $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$, $\frac{3}{2}\ln 2 = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7}....$ Dies sind die gleichen Summanden wie in $\ln 2$ aber in anderer Reihenfolge. Diese alternierende Reihe kann so umsortiert werden, dass (fast) ein beliebiger Wert entsteht.

Definition: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Bemerkung:

1. Es lässt sich zeigen: Bei absolut konvergierenden Reihen ändert sich der Grenzwert nicht bei Veränderung der Summationsreihenfolge.
2. Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

Kriterien für absolute Konvergenz Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut kovnergent, falls eine der folgenden Bedingungen gilt:

1. Es existiert eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ mit $c_k \geq 0$ und $|a_k| \leq c_k, \forall k \geq N \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ heißt *Majorante*.
2. Wurzelkriterium: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q < 1$
3. Quotientenkriterium: $\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = q < 1$

Beweis:

1. klar
2. benutzt (1): $c_k = q^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ ist Majorante, d.h. $|a_k| \overset{?}{\leq} c_k \Rightarrow q^k \overset{?}{\geq} |a_k| \Rightarrow \lim_{k\to\infty} q \geq \lim_{k\to\infty} |a_k| \Rightarrow q \geq \sqrt[k]{|a_k|}$
3. benutzt (1): $c_k = a_0 q^k$ ist Majorante.

Bemerkung:

- Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit $b_k \geq 0$ heißt *Minorante* von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, falls $0 \leq b_k \leq |a_k|, \forall k \geq N \in \mathbb{N}$. Falls zu einer Reihe eine divergente Minorante existiert, so divergiert auch die Reihe.
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$: $|a_k| \leq q^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist Majorante
- $|a_k| \leq q^k \Leftrightarrow \sqrt[k]{|a_k|} \leq q$
- $|a_k| \leq |a_0| q^k \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq q$

9.3 Partialbruchzerlegung

Beispiel: Berechne den Wert der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+5)}$.

Ansatz: Finde $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{(2k+1)(2k+5)} = \frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k+5} \Leftrightarrow 1 = a(2k+5) + b(2k+1) \Leftrightarrow k(2a + 2b) + (5a + b)$, Lösung mit LGS $\Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}$

$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2(k+1)(2k+5)} = \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+5})) = \frac{1}{4}(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k+5})$

$= \frac{1}{4}(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2k+5} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k+5}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{2k+5} - (\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{2k+5} + \frac{1}{2(n-1)+5} + \frac{1}{2n+5})$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{2(n-1)+5} - \frac{1}{2n+5}\right)$

$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{5} + \frac{1}{7}) = \frac{3}{35}$

9.4 Exponentialreihe

Definition: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ für $x \in \mathbb{C}$ heißt *Exponentialreihe.*

9.4.1 Konvergenz

Satz: Die Exponentialreihe konvergiert absolut.

Beweis: $\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to\infty} |\frac{\frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}}{\frac{1}{k} x^k}| = \lim_{k\to\infty} |\frac{k! x^{k+1}}{(k+1)! x^k}| = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0$

9.4.2 Euler'sche Zahl

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + ...$
Es gilt: $f(a) \cdot f(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} b^j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^k b^j}{k! j!} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k+j=r} \frac{a^k b^j}{k! j!} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{r} \frac{a^k b^{r-k}}{k!(r-k)!}$
Binomische Formel: $\sum_{k=0}^{r} \begin{pmatrix} r \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$
$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{r} \frac{a^k b^{r-k}}{k!(r-k)!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a+b)^r}{r!} = f(a+b)$
Damit folgt:
$f(a) \cdot f(b) = f(a+b) \Rightarrow f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot f(1) = f(1)^2$
$f(3) = f(2+1) = f(1)^3$
$f(p) = f(1)^p, p \in \mathbb{N}$. f exponiert p zur Basis $f(1)$.
Weiter gilt:
$f(0) = 1 \Rightarrow f(x-x) = f(x) \cdot f(-x) = f(0) \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}$
$f(p) = f(1)^p, p \in \mathbb{Z}$.
außerdem:
$f(1) = f(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) \cdot f(\frac{1}{2}) \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = \sqrt{f(1)}$

$f(\frac{p}{q}) = f(1)^{\frac{p}{q}}$
$f(p) = f(1)^p, p \in \mathbb{Q}$.

Definition: Die *Euler'sche Zahl* e ist definiert durch $f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} = 2.8... =: e$.
Wir verallgemeinern $e^x := f(x), x \in \mathbb{C}$.

9.4.3 Komplexe Argumente

Sei $x \in \mathbb{C}, x = a + b\imath$.
$f(x) = f(a + b\imath) = f(a) \cdot f(b\imath)$

Satz: $|e^{\imath b}| = 1 \forall b \in \mathbb{R}$.

Beweis: $|z| = \sqrt{z - \overline{z}}$. Sei $x \in \mathbb{C}$.
$\overline{f(x)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \overline{x}^k = f(\overline{x})$.
Damit:
$|f(\imath b)| = \sqrt{f(\imath b) \cdot \overline{f(\imath b)}} = \sqrt{f(\imath b) \cdot f(\overline{\imath b})} = \sqrt{f(\imath b) \cdot f(-\imath b)} = \sqrt{f(0)} = 1 \quad \square$

9.4.4 geometrische Funktionen

In $e^{\imath t}$ wird $t \in \mathbb{R}$ abgebildet auf einen Winkel α. Es folgt $e^{\imath t} = \cos(\alpha) + \imath \sin(\alpha)$

Satz: Unter der Funktion $f(\imath \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{\imath t}$ wird die reelle Achse ($t \in \mathbb{R}$) längentreu und monoton auf den Einheitskreis abgewickelt.
Es gilt also: $e^{\imath t} = \cos(t) + \imath \sin(t)$.
insbesondere: $e^{\imath \pi} = -1$

Satz: Die geometrischen Funktionen lassen sich darstellen als
$\sin(t) = \Re(e^{\imath t})$
$\cos(t) = \Im(e^{\imath t})$
also:
$e^{\imath t} = \cos(t) + \imath \sin(t)$. Dies genügt zur Reihendarstellung:
$\cos(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{t^{2j}}{(2j)!}$
$\sin(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}$
Beweis:

Einsetzen von $x = \imath t$ in $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \quad \square$

Bemerkung: Es gilt:

1. $\cos(t) = \Re(e^{\imath t}) = \frac{1}{2}(e^{\imath t} + e^{-\imath t})$
2. $\sin(t) = \Im(e^{\imath t}) = \frac{1}{2\imath}(e^{\imath t} - e^{-\imath t})$

Definition:

1. *cosinus hyperbolicus:* $\cosh(t) := \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$
2. *sinus hyperbolicus:* $\sinh(t) := \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$

Bemerkung: Es gilt:

1. $\cos(\imath t) = \cosh(t)$
2. $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$
3. $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$

9.5 Logarithmus

Satz: Für die Fakultät $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ gilt

1. $\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$
2. Als Fakultät $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist exp bijektiv

Definition: Die Fakultät $\exp^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ heißt *natürlicher Logarithmus* (ln)

Bemerkung: Es gilt

- $\ln(\exp(x)) = \ln(e^x) = x$
- $e^{\ln x} = x$
- $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ wegen $\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$
- $\ln x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \ln x$

Definition: Die allgemeine Exponentialfunktion zur Basis $a \in \mathbb{R}$, d.h. a^x, ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert als $a^x := (e^{\ln(a)})^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

10 Reelle Funktionen

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$

Definition:

- f ist beschränkt, falls $\forall x \in D, M > 0 : |f(x)| \leq M$
- f ist gerade, falls $\forall x \in D : f(-x) = f(x)$
- f ist ungerade, falls $\forall x \in D : f(-x) = -f(x)$
- f ist monoton fallend, falls $\forall x_{1,2} \in D, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$
- f ist monoton wachsend, falls $\forall x_{1,2} \in D, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$
- f ist periodisch mit der Periode L, falls $\forall x \in D : f(x + L) = f(x)$

Beispiel:

1. $f(x) = \sin x$ ist periodisch mit $L = 2\pi$, ungerade, beschränkt durch $M = 7$ oder $M = 1$
2. $f(x) = \sinh x$ ist unbeschränkt, nicht periodisch, ungerade, streng monoton wachsend

10.1 Grenzwerte von Funktionen

Wir benutzen Folgen!

Definition: Eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert von f* bei $a \in D$ wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$

Bemerkung:

1. b muss nicht der Funktionswert $f(a)$ sein
2. $\pm\infty$ sind mögliche Grenzwerte
3. Werden nur Folgen mit $x_n < a$ betrachtet, heißt der Grenzwert *linksseitig*, wir schreiben $\lim_{x\to a-} f(x)$
4. Werden nur Folgen mit $x_n > a$ betrachtet, heißt der Grenzwert *rechtsseitig*, wir schreiben $\lim_{x\to a+} f(x)$

Beispiel:

1. $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$
   $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$
   $\lim_{x\to 1} f(x)$ existiert nicht (manche Folgen liefern $b = 1$, andere $b = 2 \lightning$)
   $\lim_{x\to 1+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1-} f(x) = 1$
2. $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \\ 2 & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$
   $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 1 \neq f(\frac{\pi}{2}) = 2$
3. $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$
   $\lim_{x\to 2} f(x) =?$
   Wähle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2$, einsetzen.
   Betrachte die Folge $f(x_n) = \frac{x_n^2-4}{x_n-2} = \frac{(x_n-2)(x_n+2)}{x_n-2} = x_n+2$, d.h. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n+2) = 4$
4. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
   $\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x\to a} f(x)$ existiert nicht. (manche Folgen liefern $b = 1$, andere $b = 0 \lightning$)
5. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$
   $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$
   $\lim_{x\to 0-} f(x) = \infty$
   $\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.
6. $f(x) = \frac{1}{x-2}$
   $\lim_{x\to 2+} f(x) = +\infty$
   $\lim_{x\to 2-} f(x) = -\infty$
   $\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)$ existiert nicht.
7. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{\sin x}{x}$
   $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \pm, ...$
   $\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \pm ...}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 \pm ...$
   $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

10.1.1 uneigentlicher Grenzwert

$\lim_{x\to a} f(x)$ mit $a = \infty$ oder $a = -\infty$ heißt *uneigentlicher Grenzwert.*

Beispiel:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
2. $\lim_{x\to\infty} \sin x$ existiert nicht.
3. $p \in \mathbb{N} : \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty$, da $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + ...$ (e^x wächst schneller als jedes Polynom)
4. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0$, ln wächst langsamer als jedes Polynom.
5. $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin(x) \overset{x=\frac{1}{y}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{\sin y}{y} = 0$

Lemma: Seien $a < x_0 < b$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $(a, x_0) \subset D$ und $(x_0, b) \subset D$. Der Limes $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn die Limiten $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ existieren und übereinstimmen. ($\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x)$)

10.2 Stetigkeit

Idee: Wenn x wenig variiert, soll auch $f(x)$ wenig variieren.

Definition: Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$, wenn $\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$, sodass gilt: $\forall x \in D : |x - x_0| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$.
Zu jeder gewünschten Genauigkeit ε der Auswertung $f(x_0)$, findet sich eine erlaubte Abweichung δ von x_0.

Bemerkung: Auswertung von stetigen Funktionen (z.B. im Computer) sind *stabil* oder *robust*.

Satz: Ist f stetig bei $x = a$, dann gilt $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, d.h. der Grenzwert ist der Funktionswert. gilt auch umgekehrt!

Beispiel:

1. Die Funktionen $x, x^2, \sin(x), e^x$ sind alle stetig in ihrem Definitionsbereich.
   Beweis für $f(x) = x^2$.
   (a) zu zeigen: $\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0$ mit $|x - x_0| \le \delta \Rightarrow |x^2 - x_0^2| \le \varepsilon$
   Sei $|x - x_0| \le \delta = \frac{\varepsilon}{2|x_0|+\sqrt{\varepsilon}}$, also $|x^2 - x_0^2| \le |(x - x_0)(x + x_0)| \le |x - x_0||x + x_0| \le |x - x_0|(|x - x_0| + 2|x_0|)$
   $\le \frac{\varepsilon}{2|x_0|+\sqrt{\varepsilon}}(\frac{\varepsilon}{2|x_0|+\sqrt{\varepsilon}} + 2|x_0|) = \frac{\varepsilon}{2|x_0|+\sqrt{2}}(\frac{(2|x_0|)^2+2|x_0|\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon}{2|x_0|+\sqrt{\varepsilon}})$
   $\le \frac{\varepsilon}{2|x_0|+\varepsilon}(\frac{(2|x_0|)^2+4|x_0|\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon}{2|x_0|+\varepsilon}) = \frac{\varepsilon}{2|x_0|+\sqrt{\varepsilon}} \frac{(2|x_0|+\sqrt{\varepsilon})^2}{2|x_0|+\varepsilon} = \varepsilon$
   (b) Wir fragen $x^2 - x_0^2 = \varepsilon$ (ohne Betrag)
   Sei x_0 gegeben. Setze $x = x_0 + h$, d.h. $(x_0 + h)^2 - x_0^2 = 2hx_0 + h^2 \overset{!}{=} \varepsilon$
   Abweichung h liefert exakt $x^2 - x_0^2 = \varepsilon$
   $h = -x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} \Rightarrow \delta = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|$
2. $\frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
3. $\ln(x)$ ist stetig für $x > 0$.
4. $f(x) = \sqrt{x}, x \ge 0$ ist stetig. Wir teilen $x_0 = 0$ und $x_0 > 0$
   $x_0 = 0$. Sei $\delta_\varepsilon := \varepsilon^2$ also $|x - x_0| \le \varepsilon^2$, also $|x - x_0| \le \varepsilon^2 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x} \le \varepsilon$
   $x_0 > 0$. Wir benutzen Folgen. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $x_n \to x_0$. s. Grenzwertsätze

5. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Die *stetige Fortsetzung* $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Es gilt jetzt $\lim_{x\to 2} g(x) = g(2)$
6. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Stetige Fortsetzung $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

Bemerkung:

1. Gilt nur $\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$ so heißt f *rechtsseitig stetig.*
2. Gilt nur $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$ so heißt f *linksseitig stetig.*

Satz: Seien f und g stetig bei x_0. Dann sind $\alpha f + \beta g (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g} (g(x_0) \neq 0$ auch stetig bei x_0. Ist f stetig bei $g(x_0)$ und g stetig bei x_0, dann ist $f \circ g$ auch stetig.

Beispiel:

1. $f(x) = \frac{e^{1-(\ln(x))^2} \arccos(\frac{1}{1+x^2})}{\ln(3+\sin(1+e^x))}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Kombinationen von elementaren Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich)
2. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ist nirgends stetig.

10.2.1 Folgenkriterium

f ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0)$

Dreiecks-Ungleichung $\forall x, y \in \mathbb{C} : |x + y| \leq |x| + |y|$

10.2.2 Verfeinerte Stetigkeitsbegriffe

Definition:

1. f heißt *gleichmäßig stetig*, falls $\forall y \in D : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ mit $\forall x \in D : |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Dabei hängt δ nicht vom Ort (d.h. y bzw. x_0) ab!
2. f heißt *Lipschitz-stetig*, falls $\forall x, y \in D : \exists L > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

Bemerkung:

1. Alle Lipschitz-stetigen Funktionen sind gleichmäßig stetig.
2. Alle gleichmäßig stetigen Funktionen sind stetig.
3. Lipschitz-Funktionen verlaufen überall in einem „Kegel" mit maximaler Steigung $\pm L$.

Beispiel:

1. $f(x) = 3x$ ist Lipschitz-stetig: $|f(x) - f(y)| = |3x - 3y| = 3|x - y| \leq L|x - y|$ mit $L = 3$
2. $f(x) = \sqrt{x}$ mit $x \geq 0$ ist nicht Lipschitz-stetig. Es existiert kein L so, dass $|\sqrt{x}| \leq Lx$ für $x \to 0$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf $(0,1]$, aber nicht gleichmäßig stetig.
   Stetigkeit: $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}| \leq \varepsilon$. Auflösen nach x. $x \geq \frac{x_0}{\varepsilon x_0 + 1} \Leftrightarrow x_0 - x \leq x_0 - \frac{x_0}{\varepsilon x_{0+1}} = x_0 \frac{\varepsilon x_0}{\varepsilon x_0 + 1}$
   ...
4. $f : (0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$. stetig mit $\delta(\varepsilon, x_0) = x_0 \frac{\varepsilon x_0}{\varepsilon x_0 + 1}$. nicht gleichmäßig stetig, denn $\delta(\varepsilon, x_0) \to 0$
5. $f : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2$. stetig mit $\delta(\varepsilon, x_0) = \frac{\varepsilon}{2|x_0| + \sqrt{\varepsilon}}$. gleichmäßig stetig mit $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2|x^\cdot| + \sqrt{\varepsilon}}, x^\cdot = \max(|a|, |b|)$

Satz: Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall ist gleichmäßig stetig.

Bemerkung: *beschränkt* bedeutet $\exists M > 0, |x| \leq M \forall x \in [a,b]$

Satz (Nullstellensatz von Bolzano): Sei f auf $[a,b] \subset \mathbb{R}$ stetig und $f(a) < 0, f(b) > 0$. Dann hat f in $[a,b]$ eine Nullstelle. $\xi \in [a,b], f(\xi) = 0$

Beweis: Bisektion Algorithmus: $a_0 = a, b_0 = b$
Für $k = 0, 1, 2.... : t = \frac{a_k + b_k}{2}$.
$a_{k+1} = \begin{cases} t & f(t) < 0 \\ a_k & f(t) > 0 \end{cases}, b_{k+1} = \begin{cases} b_k & f(t) < 0 \\ t & f(t) > 0 \end{cases}$
Erklärung:
$(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}^{a \in [a,b]}$ ist monoton steigend. $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}^{b \in [a,b]}$ monoton fallend.
monoton + beschränkt $\Rightarrow \exists$Grenzwert. $b_k - a_k| \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$
$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} b_k = \xi$.
Wäre $f(\xi) > 0$ dann $\exists \delta > 0 : |x - \xi| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| \leq \varepsilon$. zusätzlich wählen wir $f > 0$ in δ-Umgebung von ξ. Aber $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ muss ein $a_k$enthalten, denn $a_k \to \xi$ (von unten). $\lightning$ $\Rightarrow$ $f(\xi) = 0$

Satz (Zwischenwertsatz): Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $[a,b]$ abgeschlossen und beschränkt. Dann existiert $\max_{x \in [a,b]} f(x)$ und $\min_{x \in [a,b]} f(x)$. (Eventuell ohne waagerechte Tangente, z.B. am Rand oder auch mehrdeutig.)

11 Differentialrechnung

Idee: Ableitung als *lineare Approximation* (lässt sich später besser verallgemeinern).
Wir wollen f an der Stelle x_0 durch eine lineare Funktion $g(x)$ approximieren, d.h. $g(x_0) = f(x_0)$ und g linear
$\Rightarrow g(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$
Sei h ein beliebiger Punkt auf der x-Achse.
$\Delta f(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$
$\Delta g(h) = g(x_0 + h) - g(x_0) = ah$
Es gilt $\Delta f(h) = ah + r(h)$.
$r(h)$ soll klein sein, am besten kleiner als ah, zumindest für kleine h.
$\Rightarrow r(h) \ll ah \Rightarrow \frac{r(h)}{ah} \ll 1$
Idee: $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{ah} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} \overset{!}{=} 0$.

Dies liefert uns a, also die beste Approximation, denn:
$\Delta f(h) = f(x_0+h)-f(x_0) = ah+r(h) \Rightarrow a = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{r(h)}{h} \Rightarrow \lim_{h\to 0} a = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+ \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} \Rightarrow a = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Definition: Eine Funktion f heißt differenzierbar bei x_0, falls es eine Konstante a gibt, sodass gilt $f(x_0+h) = f(x_0) + ah + r(h)$ mit $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. a hängt von f und x_0 ab und heißt *Ableitung*.
Es gilt: $a = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} := f'(x_0)$

Bemerkung:

1. alternative Schreibweise: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
2. $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ „Differentialquotient"
3. Jede differenzierbare Funktion ist stetig bei x_0.
   Beweis:
   z.z.: $\forall \varepsilon > 0 : |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$
   setze $x = x_0 + h$. $|h| \leq \delta \Rightarrow |f'(x_0)h + r(h)| \leq \varepsilon$
   $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h)$
   Wähle $|h| \leq \frac{\varepsilon}{|f'(x_0)+1}$, sodass $r(h) < h$.$\Rightarrow |f'(x_0)h+r(h)| \leq |f'(x_0)h+|r(h)| \leq |f'(x_0)|+1h \leq h \leq \varepsilon$

Beispiele:

1. $f(x) = \text{konstant} \Rightarrow f'(x) = 0$
2. $f(x) = ax \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{ax-ax_0}{x-x_0} = a \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = a$
3. $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \underline{2x_0}$

11.1 Rechenregeln für Differenzierung

Satz: Für f, g differenzierbar bei x_0 gilt

1. $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. Produktregel: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
3. Quotientenregel: $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \quad g(x_0) \neq 0$
4. Kettenregel: $(g \circ f)'(x_0) = \frac{d}{dx} g(f(x))|_{x=x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0)$
5. Umkehrregel: $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ mit $y_0 = f(x_0)$

Beweis Kettenregel: $\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Im Grenzwert $x \to x_0$ gilt $y \to y_0$ folgt

$g'(y_0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

Beweis Umkehrregel: $f^{-1}(f(x)) = x$

Ableiten mit Kettenregel bei $x = x_0$:

$\Rightarrow g'(f(x_0) \cdot f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(\frac{f(x_0)}{y_0}) = \frac{1}{f'(x_0)} = f^{-1}(y_0)$

Beispiel:

1. $g(x) = \ln(x) = \exp^{-1}(x)$
   $g'(x) = (\exp^{-1})'(x) = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$

2. $f(x) = x^\alpha = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln(\alpha)}$
   doppelte Verknüpfung mit $\begin{cases} a(x) = \ln(x) \\ b(y) = \alpha y \\ c(z) = e^z \end{cases} \Rightarrow f(x) = c(b(a(x))$
   Kettenregel:
   $f'(x)c'(b(a(x)) \cdot \frac{d}{dx} b(a(x)) = c'(b(a(x)) \cdot b'(a(x)) \cdot a'(x) = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$

3. $f(x) = \cos(x) = \Re(e^{\imath x}) = \frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2}$
   $f'(x) = \frac{1}{2}(\imath e^{\imath x} + (-\imath)e^{-\imath x}) = \imath \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath} \overset{\imath = -\frac{1}{\imath}}{=} \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath} = -\Im(e^{\imath x}) = -\sin(x)$
   analog:
   (a) $\sin'(x) = \cos(x)$
   (b) $\cosh'(x) = \sinh(x)$
   (c) $\sinh'(x) = \cosh(x)$

Satz:

1. $f'(x) = 0, \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow$ f ist konstant in $[a, b]$
2. $f'(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow$ f ist monoton wachsend in $[a, b]$
3. $f'(x) \leq 0, \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow$ f ist monoton fallend in $[a, b]$
4. $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow$ f ist streng monoton wachsend in $[a, b]$
5. $f'(x) < 0, \forall x \in [a, b] \Leftrightarrow$ f ist streng monoton fallend in $[a, b]$

11.2 höhere Ableitungen

Definition: Die n-te Ableitung einer Funktion f in Punkt x_0 ist *rekursiv* definiert. d.h.: Es existiert der Grenzwert $\lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} =: f^{(n)}(x_0)$ (z.B. $n = 3 : f'''(x_0)$). Wir schreiben $f, f', f'', f''', f^{(iv)}, ..., f^{(n)}$.
Existiert $f^{(k)}(x_0)$ für $k = 0, 1, 2, ..., n$, dann heißt f *n-mal differnzierbar in* x_0.

Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Die Menge $C^n(I) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f^{(k)}$ stetig für $x \in I, k = 0, 1, ..., n\}$ enthält die n-mal stetig differenzierbare Funktionen auf I.

Ist $f^{(k)}$ stetig für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ so heißt f *unendlich oft differenzierbar* oder *glatt.* $f \in C^\infty(I)$

Beispiel:

1. $x \in [-1, 1]$
   (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \neq C^0$
   (b) $f(x) = \text{sgn}(x) \notin C^0$
   (c) $f(x) = |x| \in C^0$
2. Für Polynome p mit Grad n gilt $p \in C^\infty$

11.3 Konvexität & Konkavität

Definition:

- Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Gilt für alle $x_1, x_2 \in I$ und $\lambda \in (0,1) : f((1-x)x_0 + \lambda x_1) \leq (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1)$ so heißt f *konvex.*
- Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Gilt für alle $x_1, x_2 \in I$ und $\lambda \in (0,1) : f((1-x)x_0 + \lambda x_1) < (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1)$ so heißt f *streng konvex.*
- Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Gilt für alle $x_1, x_2 \in I$ und $\lambda \in (0,1) : f((1-x)x_0 + \lambda x_1) \geq (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1)$ so heißt f *konvkav.*
- Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Gilt für alle $x_1, x_2 \in I$ und $\lambda \in (0,1) : f((1-x)x_0 + \lambda x_1) > (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1)$ so heißt f *streng konkav.*

Bemerkung:

- Konvexe Funktionen liegen immer unterhalb (oder auf) ihrer Sekante.
- Konkave Funktionen liegen immer oberhalb (oder auf) ihrer Sekante.
- Ist f konvex, so ist sie *linksgekrümmt.*
- Ist f konkav, so ist sie *rechtsgekrümmt.*

Satz:

- Für $f \in C^2(I)$ gilt: f ist konvex auf $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
- Für $f \in C^2(I)$ gilt: f ist konkav auf $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

11.4 Kurvendiskussion

Definition:

- Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a,b)$ gegeben. Falls eine Umgebung U von x_0 (z.B. $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$) existiert, sodass $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in U$, dann hat f ein *lokales Maximum* in x_0.
- Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a,b)$ gegeben. Falls eine Umgebung U von x_0 (z.B. $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$) existiert, sodass $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U$, dann hat f ein *lokales Minimum* in x_0.

Definition: Ein Extremum ist ein Maximum oder ein Minimum.

Satz: Sei $f \in C^2$.

1. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$ (notwendige Bedingung)
2. Falls zusätzlich $f''(x_0) < 0$ (streng konkav), dann gilt f hat ein Maximum. (hinreichende Bedingung)
3. analog: Minimum

Beweis: zu zeigen: $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in U \Rightarrow f'(x_0) = 0$

$f(x) - f(x_0) \leq 0$: Differenzenquotient: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} \geq 0 & x \leq x_0 \\ \leq 0 & x > x_0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} = \begin{cases} \leq 0 & x \to x_{0-} \\ \geq 0 & x \to x_{0+} \end{cases}$

Aber f ist differenzierbar, d.h. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ muss existieren $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0 \quad \square$

11.5 Wendestellen

Definition:

- Eine Stelle, an der die Krümmung wechselt, heißt *Wendestelle*.
- Ein Punkt, in dem die Krümmung wechselt, heißt *Wendepunkt*.

11.6 Mittelwertsatz

Satz: Sei f eine Funktion stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b). Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$.

Beweis: Betrachte $h(x) = (f(b) - f(a)) \cdot x - (b - a)f(x)$. h ist stetig und differenzierbar.

Es gilt: $h(a) = f(b)a - f(a)b = h(b)$.

zu zeigen: $\exists \xi \in (a, b) : h'(\xi) = 0$, denn $h'(x) = (f(b) - f(a)) - (b - a)f'(x)$

1. Fall: $h(x) = \text{const} = h(a) = h(b) \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow \xi = x$

2. Fall: h variiert, z.B. $h(x) > h(a) = h(b)$. Wegen Stetigkeit: $\exists \xi : h(\xi)$ ist Maximum. Wegen Differenzierbarkeit gilt dort $h'(\xi) = 0$.

3. Fall: $h(x) < h(a) = h(b) \Rightarrow$Minimum $\square$

Bemerkung:

1. Man kann schreiben $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$. $b-a$ ist die Steigung der Sekante. $f'(\xi)$ ist die Steigung der Tangente.
2. Für zusätzlich $f(a) = f(b)$ gilt offenbar $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi) = 0$ (Satz von Rolle)

11.7 Satz von L'Hospital

Seien f, g differenzierbar und $\lim_{x\to a} f(x) = 0, \lim_{x\to a} g(x) = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ falls existent.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{R}$. f, g differenzierbar $\Rightarrow f, g$ stetig, also $f(a) = 0, g(a) = 0$.

$x \neq a : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)-f(x)}{g(a)-g(x)} \overset{\text{MWS mit Intervall } [a,x]}{=} \frac{(a-x)f'(\xi_1)}{(a-x)g'(\xi_2)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$ mit $\xi_1, \xi_2 \in [a, x]$

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, d.h. $\xi_1 \to a, \xi_2 \to a$ für $x \to a$ $\square$

Beispiel:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\ln(\cos(2x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x)}(-\sin(x)}{\frac{1}{\cos(2x)}(-\sin(2x)\cdot 2} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{2\tan(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{2\frac{1}{\cos^2(x)}\cdot 2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(2x)}{4\cos^2(x)} = \frac{1}{4}$
3. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \tan(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\tan(x)}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\frac{1}{tan^2(x)}\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}\frac{1}{\cos^2(x)}} = -1$

4. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^x = \lim_{x\to\infty}\exp(x\ln(1+\frac{\alpha}{x})) = \exp(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{\alpha}{x})}{\frac{1}{x}}) = \exp(\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\alpha}{x}}\cdot(-\frac{\alpha}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}) = \exp(\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha}{1+\frac{\alpha}{x}}) = e^\alpha$

11.8 Taylor-Entwicklung

Wie können wir eine Funktion f approximieren, wenn wir nur ihre Ableitungen an einer Stelle kennen?

Beispiel:

- gegeben: $f(x_0), f'(x_0)$. gesucht: $g(x) \approx f(x)$

  $\Rightarrow g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-(x_0)$
- besser: gleicher Wert + Steigung + Krümmung:

  $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0)$ gegeben.

  Ansatz: $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

  Gleichungen für a_0, a_1, a_2 mit $x_0 = 0$:
  - $a_0 = g(0) = f(0)$
  - $a_1 = g'(0) = f'(0)$
  - $a_2 = g''(0) = f''(0)$

Definition: Für $f \in C^n(I)$ und $x_0 \in I, n \in N$ heißt $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ die Taylor-Entwicklung oder (Taylor-Polynom) n-ter Ordnung zu f um den Punkt x_0.

Beispiel:

1. $f(x) = e^x, f^{(k)}(x) = e^x, f^{(k)}(x_0) = 1$

   $\Rightarrow T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k$
2. $f(x) = x^2 - 2x + 3, f'(x) = 2x - 2, f''(x) = 2, f^{(k)}(x) = 0 \quad k \geq 3$

   $x_0 = 1, f(1) = 2, f'(1) = 0, f''(1) = 2, f^{(k)}(1) = 0$

   $T_3(x) = 2 + 0\cdot(x-1) + \frac{1}{2}\cdot 2(x-1)^2 + \frac{1}{6}\cdot 0(x-1) = x^2 - 2x + 3$
3. $f(x) = \sin(x), x_0 = 0$

   $T_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

Satz von Taylor: Sei $f \in C^n([x_0, x])$ und $f^{(n+1)}$ stetig in (x_0, x). Dann existiert ein $\xi \in (x_0, x)$ sodass $f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. Den Fehler $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ nennt man *Lagrange-Restglied*.

Bemerkung:

- Für $n = 0$ ist das Lagrange-Restglied der Mittelwertsatz:

  $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x-x_0)$
- Oft wird die Taylor-Entwicklung angewendet in der Form $f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \overset{x=x_0+h}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k$. Dies wird typischerweise geschrieben als $f(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k$

Beispiel: $f(x) = \sin(x)$. Es gilt: $r_5 = f(x) - T_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x - x_0) = -\frac{\sin(\xi)}{720}x^6$ mit $\xi \in (0, x)$

Abschätzung:

$|r_5(x)| = \frac{1}{720}|x^6 \sin\xi| \leq \frac{1}{720}|x|^6 \approx \begin{cases} 10^{-3} & x = 1 \\ 1 & x = 3 \end{cases}$

Dies ist eine konservative Abschätzung, tatsächlicher Fehler: $|r_5(x)| \approx \begin{cases} 10^{-4} & x = 1 \\ 0.4 & x = 3 \end{cases}$

Taylor-Reihe: Für $f \in C^\infty(I)$ dürfen wir in der Taylor-Entwicklung $n \to \infty$ setzen.

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ heißt *Taylor-Reihe*. Die Taylor-Reihe konvergiert genau dann, wenn $\lim_{x\to\infty} |r_n(x)| = 0$

Beispiel:

1. $f(x) = \ln(1 + x), x_0 = 0$

   $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, k \geq 1$

   $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{1^k} = (-1)^{k-1}(k - 1)!$

   $T_\infty(x) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$

   Fehler:

   $|r_0(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = |\frac{n!}{(n+1)!}\frac{x^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} = |\frac{1}{(n+1)}(\frac{x}{1+x})^{n+1}| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

2. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

   $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

   Man kann zeigen: $f \in C^\infty(\mathbb{R}), f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

   $\Rightarrow T_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0}{k!}x^k = 0$ bei $x_0 = 0$

12 Integration

Frage: Fläche zwischen $y = f(x)$ und der x-Achse für $a \leq x \leq b$

1. Wähle eine Zerlegung $Z = (x_0, x_1, ..., x_n)$ von $[a, b]$ mit $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, d.h. n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, ...n$
2. Wähle in jedem Teilintervall eine Zwischenstelle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
3. $A \preceq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

   Manche ξ_i sind ausgezeichnet.

Definition:

1. Wähle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ so, dass $f(\xi_i) = \min_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, dann heißt $U(f, Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ *Untersumme.*
2. Wähle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ so, dass $f(\xi_i) = \max_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, dann heißt $O(f, Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ *Obersumme.*

Offenbar gilt für Z_2 feiner als Z_1 immer $U(f, Z_2) \geq U(f, Z_1)$ und $O(f, Z_2) \leq O(f, Z_1)$.

Definition: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Sei $\mathcal{Z}$ die Menge aller möglichen Zerlegungen Z von $[a, b]$, also beliebig fein.

1. Der Wert $O(f) = \inf\{O(f, Z) \mid Z \in \mathcal{Z}\}$ *die Obersumme von* f.
2. Der Wert $U(f) = \sup\{U(f, Z) \mid Z \in \mathcal{Z}\}$ *die Untersumme von* f.
3. f heißt *Riemann-integrierbar*, falls $O(f) = U(f)$. Wir schreiben $O(f) = U(f) = \int_a^b f(x)dx$

Bemerkung:

1. Es ist auch möglich, über Folgen von Zerlegungen $\{Z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty}$ Feinheit von $Z_k = 0$ die Ober- bzw. Untersumme zu definieren.
2. nicht jede Funktion ist Riemann-integrierbar, z.B.

   $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ auf $[0, 1]$, $O(f) = 1 \neq U(f) = 0$
3. Es gibt eine Integral-Verallgemeinerung: Lebesque-integrierbar
4. Wenn f stetig auf $[a, b]$ ist, dann ist f auf $[a, b]$ integrierbar.
5. f ist Riemann-integrierbar, falls f endlich viele oder abzählbar unendlich viele Sprungstellen enthält.
6. Für stetige f dürfen wir eine Zerlegung wählen und per Grenzwert das Integral ausrechnen.

   Beispiel:

   $f(x) = x^2$ auf $[0, b], b \geq 0$. Wähle Z_n mit $x_i = i\frac{b}{n}$ äquidistant $n \in \mathbb{N}$.

   $O(f, Z_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (i\frac{b}{n})^2 \frac{b}{n} = (\frac{b}{n})^3 \sum_{i=1}^n i^2 = (\frac{b}{n})^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   $\lim_{n\to\infty} O(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} b^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}b^3 = \lim_{n\to\infty} U(f, Z_n)$

   $\Rightarrow \int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3}b^3$

12.1 Rechenregeln für Integrale

Seien f und g integrierbar auf $I = [a, b]$. Dann gilt

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in [a, b]$
2. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3. $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
4. $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq |f|_\infty (b - a) = \max_{[a,b]} |f(x)|$

Bemerkung:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b -f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(k)dk$

Mittelwertsatz der Integralrechnung: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\xi \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$

Hauptsatz der Integralrechnung:

1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $x, x_0 \in [a, b]$ und $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$. Dann ist f differenzierbar und es gilt $F'(x) = \frac{d}{dx}(\int_{x_0}^x f(t)dt) = f(x)$
2. Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $F \in C^1([a, b])$ mit $F'(x) = f(x)$ für $x \in (a, b)$ gegeben. Dann ist $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x) \mid_a^b$

   Beweis:

   (a) Differenzen-Quotient: $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$

   $F(x + h) - F(x) = \int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt \overset{\text{MWS}}{=} f(\xi)h \quad \xi \in [x, x + h] \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x)$

   (b) Definie $G(x) := \int_a^x f(t)dt$ mit $G(a) = 0$, $G(b) = \int_a^b f(t)dt$ und $G'(x) = f(x)$. Also sind G und F gleich bis auf eine Konstante (da sie die gleiche Ableitung haben).

   $\Rightarrow F'(x) - G'(x) = (F - G)'(x) = 0 \Rightarrow F - G = \text{const}$

   $\Rightarrow F(a) - G(a) = F(b) - G(b) = F(x) - G(x) \quad \forall x \in [a, b]$

   $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) - F(b) - F(a) \quad \square$

Bemerkung:

1. Ein $F \in C^1$ mit $F' = f$ heißt *Stammfunktion von* f oder *unbestimmtes Integral* $\int f(x)dx := F(x)$ (ohne Grenzen).
2. Stammfunktionen sind nur bis auf eine Konstante bestimmt. Also: $F(x)$ ist Stammfunktion $\Rightarrow \overline{F}(x) + C$ ist Stammfunktion $\quad C \in \mathbb{R}$

12.2 Wichtige Stammfunktionen

1. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, C \in \mathbb{R}$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
5. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
6. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$
7. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$
8. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|)$

12.3 Standard-Techniken zur Umformung von $\int f(x)dx$

Partielle Integration Aus $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ (Produktregel) folgt $\int (f \cdot g)'dx = f(x)g(x) + C = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$

also $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx + C$

Beispiele:

1. $\int t^2e^tdt = t^2e^t - \int 2te^tdt = t^2e^t - (2te^t - \int 2e^tdt) = (t^2-2t+2)e^t + C$
2. $\int 1 \cdot \ln(x)dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - x + C$
3. $I := \int e^x\cos(x)dx = e^x\cos(x) - \int e^x(-\sin(x))dx = e^x\cos(x) + (e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)dx)$

   Es folgt: $I = e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - I \Rightarrow I = \frac{1}{2}e^x(\cos(x) + \sin(x) + C$

Substitution Sei $F' = f$. Für $F(\phi(t))$ gilt: $\frac{d}{dt}F(\phi(t)) = F'(\phi(t)) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$. Also $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int f(x)dx|_{x=\phi(t)}$

2 Möglichkeiten zur Anwendung:

1. Gegeben $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt$. Ersetze $\phi(t) = x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \phi'(t) \Rightarrow dx = \phi'(t)dt$
2. Gegeben $\int f(x)dx$. Ersetze $x = \phi(t)$. auch hier: $dx = \phi'(t)dt$

Achtung: Grenzen werden auch substituiert!

$\int_{t=a}^{t=b} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{x=\phi(a)}^{x=\phi(b)} f(x)dx$ bzw. $\int_{x=x_0}^{x=x_1} f(x)dx = \int_{t=\phi^{-1}(x_0)}^{t=\phi^{-1}(x_1)} f(\phi(t))\phi'(t)dt$

Beispiele:

1. $\int(\sin^3(t) + e^{\sin(t)})\cos(t)dt = \int(x^3 + e^x)dx = \frac{1}{4}x^4 + e^x + C = \frac{1}{4}\sin^4(t) + e^{\sin(t)} + C$

   mit Grenzen: $\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}(\sin^3(t) + e^{\sin(t)})\cos(t)dt = \int_0^1(x^3 + e^x)dx = (\frac{1}{4}x^4 + e^x)_0^1 = \frac{1}{4} + e - 1$
2. $\int\sin(\sqrt{x})dx = \int\sin(t)2tdt = 2\int t\sin(t)dt = -2t\cos(t) + 2\sin(t) + C = -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\sin(\sqrt{x}) + C$

   Wir subsitutieren $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow dx = 2tdt$

Standard-Substitutionen:

1. Potenzen von e^x (z.B. e^{2x}, e^{-x}). Wir substituieren $t = e^x, dt = e^xdx \Rightarrow dx = \frac{1}{t}dt$
2. Potenzen von x und $\sqrt[n]{ax+b}, t = \sqrt[n]{ax+b}, dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$
3. Potenzen von x und $\sqrt{1-x^2}$, $x = \sin(t)$, $dx = \cos(t)dt$
4. Potenzen von x und $\sqrt{x^2-1}$, $x = \cosh(t)$, $dx = \sinh(t)dt$
5. Potenzen von x und $\sqrt{x^2+1}$, $x = \sinh(t)$, $dx = \cosh(t)dt$

Beispiele:

1. $\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \overset{t=e^x}{=} \int\frac{t}{1+t^2}\frac{1}{t}dt = \arctan(t) + C = \arctan(e^x) + C$
2. $\int_{x=5}^{x=10}\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx \overset{t=\sqrt{x-1}}{=} \int_{t=2}^{t=3}\frac{t^2+1}{t}2tdt = 2\int_2^3(t^2+1)dt = \frac{44}{3}$
3. $\int\sqrt{1-x^2}dx \overset{x=\sin t}{=} \int\cos^2(t)dt = \cos(t)\sin(t) + \int\sin(t)\sin(t)dt = \cos(t)\sin(t) + \int\sin^2(t)dt = \cos(t)\sin(t) + \int 1dt - \int\cos^2(t)dt$

   $\Leftrightarrow \int\cos^2(t)dt = \frac{1}{2}(\cos(t)\sin(t) + t) + C\ |_{t=\arcsin(x)} = \frac{1}{2}(\cos(\arcsin(x)) \cdot x + \arcsin(x) + C = \int\sqrt{1-x^2}dx$
4. $\int\frac{1}{\sqrt{y^2-4}}dy = \int\frac{1}{\sqrt{4((\frac{y}{2})^2-1)}}dy = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{(\frac{y}{2})^2-1}}dy \overset{x=\frac{y}{2}}{=} \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}2dx \overset{x=\cosh(t)}{=} \int\frac{1}{\sinh(t)}\sinh(t)dt$

   $= t + C\ |_{t=\operatorname{arcosh}(x)}|_{x=\frac{y}{2}} = \operatorname{arcosh}(x) + C\ |_{x=\frac{y}{2}} = \operatorname{arcosh}(\frac{y}{2}) + C$

5. $2\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx = 2\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx \overset{x=\sinh(t)}{=} 2\int \frac{\cosh^2(t)}{\sinh(t)}dt = 2\int \frac{(\frac{1}{2}(e^t+e^{-t}))^2}{\frac{1}{2}\cdot e^t - e^{-t}}dt = \int \frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{e^t-e^{-t}}dt \overset{y=e^t}{=}$
$\int \frac{y^2+2+y^{-2}}{y-y^{-1}}\frac{1}{y}dy \overset{\text{Erw. } y^2}{=} \int \frac{y^4+2y^2+1}{y^4-y^2}dy$
$= \int \frac{y^4-y^2}{y^4-y^2}dy + \int \frac{3y^2+1}{y^4-y^2}dy = y + \int \frac{3y^2+1}{y^4-y^2}dy + C \Rightarrow$ Partialbruchzerlegung:

   $y^4 - y^2 = y^2(y^2-1) \Rightarrow x_{1,2} = 0$ (doppelte Nullstelle), $x_3 = -1, x_4 = 1$. Betrachte $\frac{3y^2+1}{y^4-y^2} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{C}{y-1} + \frac{D}{y+1}$.

   $\Leftrightarrow 3y^2+1 = y^3(A+C+D) + y^2(B+C-D) + yA - B \Rightarrow A+C+D = 0, B+C-D = 3, A = 0, B = -1 \Leftrightarrow A = 0, B = -1, C = 2, D = -2$

   $\Rightarrow \frac{3y^2+1}{y^4-y^2} = -\frac{1}{y^2} + 2\frac{1}{y^2-1} - 2\frac{1}{y+1} \Rightarrow 2\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx = y + \int \frac{3y^2+1}{y-1}dy + C = y + \int -\frac{1}{y^2}dy + 2\int \frac{1}{y-1}dy - 2\int \frac{1}{y+1}dy + C$

   $= y + \frac{1}{y} + 2\ln|y-1| - 2\ln|y+1| + C \,|_{y=e^t}|_{t=\operatorname{arsinh}(x)} = e^{\operatorname{arsinh}(x)} + e^{-\operatorname{arsinh}(x)} + 2\ln|e^{\operatorname{arsinh}(x)} - 1 - 2\ln(e^{\operatorname{arsinh}(x)}+1) + C$

Bemerkung: Es gibt Integrale, die nicht „elementar" gelöst werden können. (d.h. mit den Methoden, die wir kennen)

Beispiel: $\int_0^a e^{-t^2}dt$

Per Potenzreihe wird definiert:

$Erf(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^x e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}dt \doteq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^x t^{2k}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

$Erf(x)$ heißt Fehlerfunktion.

Achtung: Integrale und Reihen dürfen im Allgemeinen nicht einfach vertauscht werden. Hier ist es allerdings erlaubt (Stichwort: gleichmäßige Konvergenz)

12.4 Uneigentliche Integrale

Definition:

1. Es sei $f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a,b]$ integrierbar.

   Wir definieren $\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ als *uneigentliches Integral von f über (a,∞)*

2. Es sei $f : [a,b] \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ bei x_0 unbeschränkt und integrierbar auf jedes Intervall, welches x_0 nicht enthält.

   Wir definieren: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to x_0-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to x_0+}\int_t^b f(x)dx$ als *uneigentliches Integral von f.*

Bemerkung:

1. Uneigentliche Integrale sind entweder konvergent (wenn der Grenzwert existiert) oder divergent.
2. analog zu (1) definieren wir $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ und $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$ wenn jeder Summand existiert.
3. Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$
4. Bei (2) ist die typische Situation eine Singularität am Rand, d.h. $x_0 = a$ oder $x_0 = b$.

   Beispiel:

   $\int_{x_0}^b f(x)dx = \lim_{t\to x_0+}\int_t^b f(x)dx = F(b) - \lim_{t\to x_0+} F(t)$

Beispiel:

1. $\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}(-e^{-x})\mid_0^b = \lim_{b\to\infty} -e^{-b} + e^0 = 1$
2. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = 2\lim_{b\to\infty}\arctan(x)\mid_0^b$
   $= 2(\lim_{b\to\infty}\arctan(b) - \arctan 0 = 2\frac{\pi}{2} = \pi$
3. Betrachte $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Es gilt $\int_a^b x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} & \alpha \neq -1, a, b \in \mathbb{R} \\ \ln|x| \mid_a^b & \alpha = -1, a\cdot b \neq 0 \end{cases}$
   (a) $\int_1^\infty x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}(\lim_{b\to\infty} b^{\alpha+1} - 1) & \alpha \neq -1 \\ \lim_{b\to\infty}\ln|b| - 0 & \alpha = -1 \end{cases}$

   $\lim_{b\to\infty} b^{\alpha+1} = \begin{cases} \infty & a+1>0 \Leftrightarrow a > -1 \\ 0 & a+1<0 \Leftrightarrow a<-1 \end{cases}$

   also $\int_1^\infty x^\alpha dx$ konvergiert, falls $\alpha < -1$ mit $\int_1^\infty x^\alpha dx = -\frac{1}{\alpha+1}, \alpha < -1$

   (b) $\int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} 0 - \lim_{b\to 0} & \alpha = -1 \\ \frac{1}{\alpha+1}(1 - \lim_{b\to 0} b^{\alpha+1} & \alpha \neq -1 \end{cases}$

   $\lim_{b\to 0} x^{\alpha+1} = \begin{cases} \infty & \alpha+1<0 \\ 0 & \alpha+1>0 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 x^\alpha dx$ konvergiert, falls $\alpha > -1$ mit Wert $\frac{1}{\alpha+1}$

Es folgt:

1. $\int_1^\infty x^\alpha dx = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha+1} & \alpha < -1 \\ \text{divergent} & \alpha \geq -1 \end{cases}$
2. $\int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} & \alpha > -1 \\ \text{divergent} & \alpha \leq -1 \end{cases}$

Bemerkung: Sei f stetig in $[a,b] \setminus \{x_0\}$ und hat bei x_0 eine Polstelle (unbeschränkt). Gilt in einer Umgebung von x_0

1. $|f(x)| \leq C\frac{1}{|x-x_0|^p}$ mit $p<1, C>0$, dann konvergiert $\int_a^b f(x)dx$
2. $|f(x)| > C\frac{1}{|x-x_0|^p}$ mit $p \geq 1, C>0$, dann divergiert $\int_a^b f(x)dx$

Analog:

Falls $|f(x)| \leq g(x), x \in [a,\infty)$, dann gilt $\exists \int_a^\infty g(x)dx \Rightarrow \exists \int_a^\infty f(x)dx$

Beispiel: Konvergiert $\int_1^\infty (1+\sin t)e^{-t}dt$? Es gilt $|(1+\sin t)e^{-t}| \leq 2|e^{-t}|$ und $\exists 2\int_1^\infty e^{-t}dt$. Damit existiert $\int_1^\infty (1+\sin t)e^{-t}dt$

Satz (Integralvergleich für Reihen): Sei $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}^+$ stetig, monoton fallend. Dann gilt $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ konvergiert $\Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)dx$ existiert

Beispiel: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\beta}$, Vergleich mit $\int_1^\infty \frac{1}{x^\beta}$ konvergiert für $\beta > 1$. Damit divergiert $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$, aber $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\frac{1001}{1000}}}$ konvergiert.

Bemerkung: Die Werte von Integral und Reihen sind im Allgemeinen verschieden.

12.5 Parameter-Integrale

Sei $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, t) \mapsto f(x, t)$ eine Funktion in x mit Parameter t. Für feste t sei $f(\cdot, t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Das Integral $g(t) = \int_a^b f(x, t)dx$ heißt *Parameter-Integral* und ist eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Beispiel: Gamma-Funktion Betrachte $I(n) = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx,\ f(x, n) = x^n e^{-x}$.

$I(0) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$

$I(1) = \int_0^\infty xe^{-x}dx = x(-e^x)\ |_0^\infty - \int_0^\infty 1(-e^{-x})dx = 0 + \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$

allg.: $I(n) = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx = -x^n e^{-x}\ |_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = nI(n-1) = n(n-1)I(n-2) \Rightarrow I(n) = n! \quad n \in \mathbb{N}$

Beachte: $I(n)$ ist auch für $n \in \mathbb{R}^+$ definiert. Damit lassen sich Fakultäten $r! \quad r \in \mathbb{R}^+$ berechnen.

Was ist mit $n < 0$? In der Nähe von $x = 0$ gilt: $|x^n e^{-x}| \leq Cx^n \Rightarrow \int x^n e^{-x}$ konvergiert für $n > -1$

$I(n)$ divergiert für $n \leq 1$, $I(n)$ konvergiert für $n > -1$

Definition (Gamma-Funktion): $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}, a \mapsto \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ heißt Γ-Funktion. Es gilt: $\Gamma(a + 1) = (a + 1)\Gamma(a) \quad \forall a \in (0, \infty)$

Bemerkung:

1. $\Gamma(a)$ ist die Verallgemeinerung von der Fakultätsfunktion für reelle Zahlen. Es gilt $\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}_0$
2. Es gibt viele Funktionen, die $f(n+1) = (n+1)f(n)$ erfüllen, aber nur Γ ist glatt und konvex.
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\sin(\pi x) = \frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}$

13 Lineare Algebra

Die definierenden Eigenschaften von Vektoren $\underline{u}, \underline{v}$ sind

- die Addition $\underline{u} + \underline{v} = \underline{w}$
- die skalare Multiplikation $\alpha\underline{u} = \underline{\widetilde{w}}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. Streckung oder Stauchung von $\underline{u}$. α heißt *Skalar*.

Beispiel:

1. Richtungen in der Ebene, z.B. $\underline{u} = \binom{1}{2}, \underline{v} = \binom{-1}{-1}$. Wir schreiben $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$
   - $\underline{u} + \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
   - $3 \cdot \underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
   - $3\underline{u} + 4\underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. Richtungen im Raum, z.B. $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \underline{w} = \begin{pmatrix} \pi \\ -e \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

3. allgemein „im n-Dimensionalen": $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}, \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

   Es gilt: $\alpha\underline{u} + \beta\underline{v} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n + \beta v_n \end{pmatrix}$

Definition: Sei mit $\mathbb{R}^n$ ein Vektorraum gegeben. Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+, \underline{u} \mapsto \|\underline{u}\|$ heißt *Norm*, falls gilt:

1. $\|\underline{u}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{u} = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$
2. $\|\underline{u}\| \geq 0$ für $\underline{u} \neq 0$
3. $\|\alpha\underline{u}\| = |\alpha|\|\underline{u}\|, \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|\underline{u} + \underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$ (Dreiecksungleichung)

Beispiel:

1. Euklidische Norm oder Länge in $\mathbb{R}^n$: $\|\underline{u}\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} n_k^2}$

   $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \|\underline{u}\|_2 = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$
2. $\underline{u} \in \mathbb{R}^n, \|\underline{u}\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |u_k|$ ist die 1-Norm.

   $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \|\underline{u}\|_1 = |1| + |-2| + |-3| = 6$
3. $\underline{u} \in \mathbb{R}^n, \|\underline{u}\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |u_k|$ ist die ∞-Norm.

   $\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \|\underline{u}\|_\infty = \max\{|1|, |-2|, |-3|\} = 3$

Bemerkung:

1. Das Aussehen des „Einheitskreises" hängt von der Norm ab! Der Einheitskreis ist dabei bestimmt durch alle Vektoren mit der „Länge" 1, d.h. $\|\underline{u}\| = 1$
2. Die Normen sind äquivalent in $\mathbb{R}^n$, also austauschbar bis auf eine Konstante.

   $C_1\|\underline{u}\|_p \leq \|\underline{u}\|_q \leq \|\underline{u}\|_p \quad q, p \in \{1, 2, \infty\}$ mit $C_{1,2} > 0$
3. $\|\underline{u}\|_p := \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |u_k|^p}$

14 Analysis im $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad n, m \in \mathbb{N}$.

14.1 Lineare Abbildungen

Definition: Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt linear, falls gilt: $\varphi(\alpha\underline{u} + \beta\underline{v}) = \alpha\varphi(\underline{u}) + \beta\varphi(\underline{v})$

Bemerkung:

- Für $m = n = 1$ hat φ die Form $\varphi(x) = ax \quad a \in \mathbb{R}$, denn $\varphi(\alpha x + \beta y) = a(\alpha x + \beta b) = \alpha ax + \beta by = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$
- Für allgemein m, n hat $\underline{v} = \varphi(\underline{u})$ mit $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ die Form

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{2n}u_n \\ \vdots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \cdots + a_{mn}u_n \end{pmatrix} \text{ mit } a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Beispiel: $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \underline{u} \mapsto \underline{v} = \varphi(\underline{u})$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 + 2u_2 \\ u_2 \end{pmatrix}, \text{ also } a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{21} = 1, a_{22} = 2, a_{31} = 0, a_{32} = 1$$

Definition:

1. Ein Zahlenschema $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ heißt *Matrix*. Wir schreiben $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. m ist die Anzahl der de Zeilen, n die Anzahl der Spalten.
2. Das Matrix-Vektor-Produkt ist definiert durch $A\underline{u} := \underline{v} = \varphi(\underline{u})$

Bemerkung: Eine lineare Abbildung hat also die Form $\underline{v} = A\underline{u}$ wobei wenn $\underline{u} \in \mathbb{R}^n, \underline{v} \in \mathbb{R}^m$ muss $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sein.

Beispiel:

1. $n = m = 2, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \varphi(\underline{u}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u_1, u_2) \\ \varphi_2(u_1, u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ -u_1 - 2u_2 \end{pmatrix}$

   φ ist linear: $\varphi(\alpha\underline{u}+\beta\underline{w}) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta w_1 \\ \alpha u_2 + \beta w_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta w_1 + \alpha u_2 + \beta w_2 \\ -(\alpha u_1 + \beta w_1) - 2(\alpha u_2 + \beta w_2) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ -u_1 - 2u_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ -w_1 - 2w_2 \end{pmatrix} = \alpha\varphi(\underline{u}) + \beta\varphi(\underline{w})$

   Die Matrix zu φ ist $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, d.h. $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

   Gerechnet wird nach der Regel „Zeile * Spalte": $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ -u_1 - 2u_2 \end{pmatrix}$
2. $n = 3, m = 1, \mathbb{R}^1 \ni y = \varphi(\underline{x}) = x_1 + 2x_2 - x_3$

Matrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ denn $y = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2 - x_3$

$\varphi(\underline{x}) = 0$: Dieses $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ beschreibt eine Ebene mit Normalenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $n = 2, m = 3, \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$

Satz und Definition: Seien $\varphi_A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ und $\varphi_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ zwei lineare Abbildungen mit Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Dann ist die Verknüpfung $\varphi_C = \varphi_A \circ \varphi_B$ auch linear und gegeben durch die Matrix $C = A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit dem Matrizenprodukt $c_{ij} := \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$, wobei $i = 1, ..., m \quad j = 1, ..., n$.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$. Achtung: $A \cdot B \neq B \cdot A$

Bemerkung: Nicht jede lineare Abbildung ist invertierbar.

Definition: Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n . \underline{x} \mapsto \varphi(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt invertierbar, falls eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert, sodass gilt: $B \cdot A = A \cdot B = I$ mit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wir schreiben $A^{-1} := B$ und $\varphi^{-1}(x) = A^{-1}x$

Beispiel:

1. $n = 1, \varphi(x) = ax \quad a \in \mathbb{R} \quad \varphi^{-1}(x) = \frac{1}{a}x$. geht nur für $a \neq 0$
2. $n = 2, \varphi(\underline{x}) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

   $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}A = AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. geht nur für $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

   $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$ ist invertierbar, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht invertierbar.

Bemerkung: Invertierbarkeit ergibt am meisten Sinn, wenn Definitionsmenge und Bildmenge identisch sind ($\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

14.2 Stetigkeit

Definition: Sei $f : f : D \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in D$. f heißt stetig in x_0, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0) \leq \varepsilon$.

f heißt stetig in D, falls stetig $\forall x \in D$.

Bemerkung:

1. Dies geht für $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$. Es verändern sich δ, ε nur leicht.
2. Die Norm $\|x - x_0\|$ ist die Norm in $\mathbb{R}^n$, die Norm $\|f(x) - f(x_0)\|$ ist die Norm in $\mathbb{R}^m$!
3. Es gilt: f ist stetig $\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(\lim_{k\to\infty} x^{(k)})$ für alle Folgen $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$
4. Statt rechts- und linksstetig, gibt es nun ∞ viele Richtungen

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. Ist f stetig bei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Test: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{100} \\ \frac{1}{100} \end{pmatrix}, f(x, y) = \frac{2\frac{1}{100^2}}{\frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^2}} = 1$

Betrachte die Folge $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ mit α fest.

$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\frac{1}{n^2}\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{1}{n^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{n^2}\sin^2\alpha} = \lim_{n\to\infty} 2\cos\alpha\sin\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha$

$f(0, 0)$ ist beschränkt, aber nimmt alle Werte zwischen -1 und 1 auf der z-Achse an.

Satz: Für eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt

1. $\|\varphi(x)\| \leq C\|x\|$
2. φ ist stetig

Beweis:

1. Wähle $\|\cdot\|_1$ und $\varphi(x) = Ax$. $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix}$ bzw. $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad i = 1, ..., m$

   $\|\varphi(x)\|_1 = \|y\|_1 = \sum_{i=1}^m |y_i| = \sum_{i=1}^m |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j|$

   $\leq \max(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|) \sum_{j=1}^n |x_j| \leq C\|x_1\|$ mit $C = \max_{j=1,...,n}(\sum_{i=1}^m |a_{ij}|)$

2. $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \|x - x_0\|\delta \Rightarrow \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| \overset{?}{\leq} \varepsilon$

   linear: $\|\varphi(x - x_0)\| \leq C\|x - x_0\| \leq C\delta \overset{?}{\leq} \varepsilon$.

   (1) mit $x \to x - x_0$. Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ $\square$

14.3 Differenzierung

Wie in 1D als Approximation.

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (total) differenzierbar, falls $\forall\xi \in \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert mit $f(x_0+\xi) = f(x_0)+\varphi(\xi)+r(\xi)$ wobei $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine nicht lineare Abweichung ist für die gilt: $\lim_{\xi\to 0} \frac{\|r(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0$

Sowohl φ als auch r hängen von x_0 ab.

φ ist linear (Tangentialebene, Tangential-Hyperebene)

Wir nennen $\varphi =: f'(x_0)$ oder $A =: Df(x_0)$ die Ableitung von f bei x_0.

Bemerkung:

1. $Df(x_0)$ entspricht der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gehörend zu φ.

   $A = \left(a_{ij}\right)_{i=1,\dots,m.j=1,\dots,n}$ sodass $f_i(x_0+\xi) = f_i(x_0) + \sum_{k=1}^n a_{ik}\xi_i + r_i(\xi)$
2. Für $m=n=1$ ist der Fall aus 1D: $f(x_0+\xi) = f(x_0) + a\xi + r(\xi)$
3. Für $n=2$ und $m=1$ entspricht die lineare Abbildung φ der verschobenenen Tangentialebene im Punkt x_0 an den Graphen von $f(x,y)$.

Wie berechnen wir die Komponenten der Matrix? In Komponenten $f_i(\underline{x_0}+\underline{\xi}) = f_i(\underline{x_0}) + \sum_{k=1}^n a_{ik}\xi_i + r_i(\underline{\xi})$

Betrachte $\underline{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}$

$f_i(x_1, x_2, ..., x_j+h, x_{j+1}, ...x_n) = f_i(x_1, ...x_j, ...x_n) + a_{ij}h + r_i(h)$

$\Rightarrow \frac{f_i(x_1,x_2,...x_j+h,...x_n)}{h} = a_{ij} + \frac{r_i(h)}{h}$

$\Rightarrow a_{ij} = \lim_{h\to 0} \frac{f_i(x_1,x_2,...,x_j+h,...x_n)}{h}$, da $\lim_{h\to 0}\frac{r_i(h)}{h} = 0$

Definition: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{f_i(x_1,x_2,...,x_j+h,...x_n)}{h} =: \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ heißt partielle Ableitung. Falls der Grenzwert existiert, heißt f partiell differenzierbar.

Bemerkung:

1. Für z.B. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto f(x_1,x_2,x_3)$ ist $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \lim_{h\to 0} \frac{f_i(x_1,x_2,...,x_j+h,...x_n)}{h}$, d.h. x_1, x_3 werden als konstant angenommen und dann nach $x_2$abgeleitet.
2. Für $m > 1, n > 1$ heißt die Matrix $(a_{ij})_{i=1,...,m;j=1,...n} = (\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j})_{i=1,...,m;j=1,...,n}$ Jacobi-Matrix $Df(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, d.h. $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$
3. Für $m=1, n=3, f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto f(x,y,z)$ heißt der Vektor $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ der Gradient von f: grad f oder ∇f.
4. Andere häufige Variante des Gradients:

   $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}$, z.B. Geschwindigkeitsfeld.

   $Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$ Jacobi-Matrix, div $\underline{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$

Beispiel:

1. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + xy - y^2$

   $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x + y, -2y + x)$

2. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(r,\varphi) \\ f_2(r,\varphi) \end{pmatrix}$

   $Df(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \cdot \cos\varphi \end{pmatrix}$

3. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \underline{x} \mapsto \|\underline{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$

   $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{j=1}^n x_j^2) = \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^n x_j^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{j=1}^n x_j^2) = \frac{1}{2\|\underline{x}\|} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\|\underline{x}\|}$

   $\nabla f = \left(\frac{x_1}{\|x\|}, \frac{x_2}{\|x\|}, ..., \frac{x_n}{\|x\|}\right)$ (Jacobi-Matrix $\in \mathbb{R}^{1\times n}$)

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$

   $Df(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   $(x,y) \neq (0,0): \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x, \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y\right)$

   $(x,y) = (0,0): \frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(0,0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \; \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = 0$

   d.h. die partiellen Ableitungen existieren für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, aber es existiert keine Tangentialebene, also ist f nicht total differenzierbar.

Satz: Falls für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in einer Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x_0 die partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, so ist f in U total differenzierbar (es existiert eine Tangentialebene) und die Jacobi-Matrix Df ist stetig.

14.3.1 Kettenregel

Satz: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ und $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ differenzierbar in $f(x_0) \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $g \circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ differenzierbar in x_0 mit $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \cdot Df(x_0)$, d.h. die Matrix $D(g \circ f) \in \mathbb{R}^{l\times n}$ ist das Matrix-Produkt von $Dg(f(x_0)) \in \mathbb{R}^{l\times m}$ und $Df(x_0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Beispiel:

1. $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ ein Pfad in $\mathbb{R}^3$. $\psi(x_1, x_2, x_3)$ ein Temperaturfeld.

   Wie ändert sich ψ entlang des Pfades $\underline{x}(t)$?

   $\psi_t := \psi(x_1(t), x_2(t), x_3(t) = (\psi \circ \underline{x})(t)$

   $\frac{d\psi_t}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t} = D\psi \cdot Dx$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ \sin t \end{pmatrix}$

   $Df(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ \cos t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$

   $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \cdot y \\ \ln x + e^y \end{pmatrix}$

   $Dg(t) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{x} & e^y \end{pmatrix}$

   $h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto g(f(t))$

   $Dh(t) = Dg\big|_{f(t)} Df\big|_t = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{x} & \frac{\partial g_1}{y} \\ \frac{\partial g_2}{x} & \frac{\partial g_2}{y} \end{pmatrix} \Big|_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(t)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{pmatrix} \Big|_t = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial g_2}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \cdot 2t + x \cos t \\ \frac{1}{x} 2t + e^y \cos t \end{pmatrix} \Big|_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(t)} =$
   $\begin{pmatrix} \sin t \cdot 2t + t^2 \cos t \\ \frac{1}{t^2} \cdot 2t + e^{\sin t} \cos t \end{pmatrix}$

Definition: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $x_n \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und $\underline{\nu} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nu\|_2 = 1$ eine Richtung. Wir nennen $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ die *Richtungsableitung* von f mit $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{\nu}) - f(\underline{x}_0)}{h}$

Bemerkung:

1. Für $\underline{\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $(x_i = 1)$ (Koordinatenrichtung) ist $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

2. $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ ist die Steigung von f in Richtung ν.

Beispiel: In welcher Richtung $\underline{\nu}$ ändert sich f bei x_0 am meisten? d.h. $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0)$ ist maximal?

Sei $\underline{\xi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \underline{\xi}(t) = \underline{x}_0 + t\underline{\nu}$ ein Pfad in $\mathbb{R}^n$. Betrachte $h(t) = f(\underline{\xi}(t))$

Es gilt $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0) = \frac{d}{dt} h(t)\big|_{t=0} \overset{\text{Kettenregel}}{=} Df(\underline{\xi}(t)) \cdot D\underline{\xi}(t)\big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial t} \end{pmatrix} =$
$\nabla f \cdot \underline{\nu}$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \nu} = 0$ falls $\underline{\nu} \perp \nabla f$ und $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ maximal in Richtung des Gradienten.

14.4 Extrema

Definition: Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ lokales Extremum, falls in einer Umgebung $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ mit Radius r gilt $\forall x \in B_r(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$ (lokales Maximum) bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ (lokales Mimimum).

Bemerkung: Die Funktion $h(t) = f(x_0 + t\nu)$ mit einer beliebigen Richtung $\nu \in \mathbb{R}^n$ hat bei $t = 0$ ein Extremum. $\Rightarrow h'(0) = 0$, d.h. $\nabla f \cdot \underline{\nu} = 0 \forall \underline{\nu} \in \mathbb{R}^n$

Satz: Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind solche $x_0 \in \mathbb{R}^n$ Kandidaten für lokale Maxima/Minima für die gilt $\nabla f(x_0) = 0$, d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) = 0, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$

Bemerkung: $\nabla f = 0$ liefert n Gleichungen für die n Komponenten von $\underline{x}_0$.

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x$

$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (2x + y + 1, 2y + x) \stackrel{!}{=} (0, 0)$

Bemerkung: $\nabla f = 0$ ist nur notwendig, für die hinreichende Bedingung wird die „zweite Ableitung" benötigt.

14.5 Der Satz von Banach

Definition: Für $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt $\underline{x}^\cdot$ ein Fixpunkt falls gilt $\Phi(\underline{x}^\cdot) = \underline{x}^\cdot$

Definition: Eine Menge M heißt vollständig, falls alle Cauchy-Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ einen Grenzwert in M haben.

Bemerkung: Endliche, abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ sind vollständig.

Satz von Banach: Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ vollständig und für $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ gelte

1. $x \in E \Rightarrow \Phi(x) \in E$
2. $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq k\|x - y\|$ mit $k < 1$ (Kontraktion)

Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt $\underline{x}^\cdot \in E$ mit $\underline{x}^\cdot = \Phi(\underline{x}^\cdot)$.

Bemerkung: k kann bestimmt werden mit dem Mittelwertsatz. Dabei gilt $l = \sup_{x\in[a,b]} f'(x)$.

Beweis: Wir betrachten irgendein $\underline{x}^{(0)} \in E$ und die Folge $\underline{x}^{(n+1)} = \Phi(\underline{x}^{(n)}$. Wir zeigen $(\underline{x}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge: $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 : \|\underline{x}^{(m)} - \underline{x}^{(n)}\| \leq \varepsilon \quad m, n > n_0$.

(Cauchy-Folgen konvergieren für $n \to \infty$ gilt $\underline{x}^{(n)} \to \underline{x}^\cdot$,mit $\underline{x}^\cdot = \Phi(\underline{x}^\cdot)$, wegen Vollständigkeit ist $\underline{x}^\cdot \in E$)

$\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| = \|\Phi(x^{(n)}) - \Phi(x^{(n-1)})\| \leq k\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| \leq k^n\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = k^n e_0$ wobei $e_0 := \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

Sei $n < m$:

$\|x^{(m)} - x^{(n)}\| = \|x^{(m)} - x^{(m-1)} + x^{(m-1)} - x^{(n)}\| \leq \|x^{(m)} - x^{(m-1)}\| + \|x^{(m-1)} - x^{(n)} \leq k^{m-1}e_0 + \|x^{(m-1)} - x^{(m-2)}\| + \|x^{(m-2)} - x^{(n)}\|$

$\leq (k^{m-1} + k^{m-2} + ... + k^n)e_0$

$k^{m-1} + k^{m-2} + ... + k^n \leq \sum_{i=n}^{\infty} k^i = \sum_{i=0}^{\infty} k^i - \sum_{i=0}^{n-1} k^i = \frac{k^n}{1-k}$ (geometrische Reihe)

Wähle ε, n_0 sodass $\frac{k^{n_0}}{1-k} \leq \varepsilon \Rightarrow \|x^{(m)} - x^{(n)}\| \leq \frac{k^n}{1-k} \leq \varepsilon$, d.h. $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x^\cdot \quad \Box$

Eindeutigkeit:

Seien $x^\cdot, x'$ ywei Fixpunkte $0 < \|x^\cdot - x'\| = \|\Phi(x^\cdot) - \Phi(x')\| \leq k\|x^\cdot - x'\| < \|x^\cdot - x'\| \Rightarrow \|x^\cdot - x'\| = 0 \quad \Box$

14.6 Implizite Funktionen

Definition: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ und $F : U \to \mathbb{R}^n, (\underline{x}, \underline{y}) \mapsto F(\underline{x}, \underline{y})$ stetig differenzierbar. Die Funktion $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n, x \mapsto y = T(x)$ mit $F(x, y) = 0$, d.h. $F(x, T(x)) = 0$ heißt *implizit definiert.*

Bemerkung:

1. impliziert definierte Funktionen müssen nicht existieren oder eindeutig sein.
2. Für $p = n = 1$ beschreibt $F(x, y) = 0 \in \mathbb{R}$ eine „Höhenlinie" in der x-y-Ebene. $y = T(x)$ beschreibt die Linie als Funktion.

Beispiel:

1. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $F(x, T(x)) = 0 \Rightarrow T(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$

   Fixiere $(x_0, y_0) = (0, -1) \Rightarrow$in einer Umgebung gilt $T(x) = -\sqrt{1 - x^2}$

   $(x_1, y_1) = (1, 0) \Rightarrow T(x)$ existiert nicht
2. Eine Umkehrfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich schreiben als $F(f^{-1}(y), y) = 0$ mit $F(x, y) = y - f(x)$

   $F(x, y) = 0$ gibt den Graphen von $f(x)$

   $f^{-1}(y)$ kann definiert werden durch $F(f^{-1}(y), y) = 0$
3. Yodas Kutte ist eine zweidimensionale Fläche in 3D.

   $Kutte : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$

   Eine explizite Parametrisierung (u, v) ist praktisch unmöglich zu finden.

   Die Kutte wird daher implizit dargestellt, indem die „Kuttenpunkte" in $\mathbb{R}^3$ markiert werden.

   Wir definieren $F_{Kutte} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \underline{x} \mapsto F_{Kutte}(\underline{x})$ mit $F_{Kutte}(\underline{x}) = 0$ falls $\underline{x} \in$ Yodas Kutte

   Im Spezialfällen können wir die Kutte darstellen als $z = f(x, y)$. Dann gilt $F_{Kutte}(x, y, f(x, y)) = 0$

   $F(\underline{x}, T(\underline{x})) = 0$. Wir leiten ab: $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(F_i(\underline{x}, T(\underline{x})) = 0, \quad j = 1, ..., p \quad i = 1, ..., n\right.$

   $$\begin{pmatrix} F_1(\underline{x}, T(\underline{x})) \\ F_2(\underline{x}, T(\underline{x})) \\ \vdots \\ F_n(\underline{x}, T(\underline{x})) \end{pmatrix} \overset{\text{Kettenregel}}{\Rightarrow} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_k}\Big|_{(x,T(x))} \frac{\partial T_k}{\partial x_j}\Big|_{\underline{x}} = 0$$

   Wir schreiben $D_x F = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,...,n; j=1,...,p} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $D_y F = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\right)_{i=1,...n; k=1,...,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

   damit folgt:

   $D_x F(x, T(x)) + D_y F(x, T(x)) \cdot DT(\underline{x}) = 0$

   Wir lösen auf:

   $DT(x) = \left(D_y F(x, T(x))\right)^{-1} D_x F(x, T(x))$

   Wir können die Ableitung DT fast explizit bestimmen!

   Eine invertierbare $D_y F(x, y)$ ist also notwendig für differenzierbares $T(\underline{x})$

(a) Beispiel:

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \quad D_x F = \frac{\partial F}{\partial x} = 2x \quad D_y F = \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$$

$$DT = T'(x) = -(D_y F)^{-1} D_x F = -\frac{2x}{2y}\Big|_{y=T(x)} = -\frac{x}{T(x)}$$

Satz: Sei $F : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und für $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$ gelte $D_y F(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist invertierbar. Dann gibt es Umgebungen $B_r(\underline{x}) \subseteq \mathbb{R}^p$ und $B_\rho(\underline{y_0}) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Radien $r, \rho > 0$, sodass die implizite Funktion $T : B_r(\underline{x_0}) \subseteq \mathbb{R}^p \to B_\rho(\underline{y_0}) \subseteq \mathbb{R}^n, x \mapsto y = T(x)$ mit $F(x,y) = 0$ existiert, sowie eindeutig und stetig differenzierbar ist.

Beweis: Zur Einfachheit $(x_0, y_0) = (0,0)$. Wir kürzen ab $A := D_y F(0,0) = \text{const}$ und definieren $\underline{x} \in \mathbb{R}^p$ folgende Funktion: $\Phi_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \underline{y} \mapsto \Phi_x(y) := y - A^{-1} \cdot F(\underline{x}, \underline{y})$.

Es gilt: Falls y die Gleichung $F(x,y) = 0$ erfüllt, gilt auch $\Phi_x(y) = y$ (y ist Fixpunkt von Φ_x), denn $\Phi_x(y) = \underline{y} - A^{-1} \cdot F(x,y) \overset{!}{=} \underline{y} \Rightarrow A^{-1}F(x,y) = 0 \Leftrightarrow A \cdot A^{-1}F(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = 0$

Wir benutzen Banach.

zu zeigen (Voraussetzung für Banach):

1. $y \in U \Rightarrow \Phi_x(y) \in U$ (Selbstabbildung)
2. $\|\Phi_x(y^\cdot) - \Phi_x(y)\| \leq k\|y^\cdot - y\|,\ 0 < k < 1$ (Kontraktion)

zu (2):

Sei $y^\cdot = y + \xi, \xi \in \mathbb{R}^n$. Betrachte $\Phi_x(y+\xi) - \Phi_x(y)$. Definiere für die Komponente $\Phi_{x,i} \quad i = 1, ..., n$: $g(t) := \Phi_{x,i}(y + t\xi)$.

Es gilt der Mittelwertsatz: $g(1) - g(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(t)dt$

Es folgt: $|\Phi_{x,i}(y+\xi) - \Phi_{x,i}(y)| = \left|\int \frac{d}{dt}\Phi_{x,i}(y+t\xi)dt\right|$

$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \left|\int_0^1 \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_{x,i}}{\partial y_k}(y+t\xi) - \xi_k dt\right| = \left|\int_0^1 \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi_{x,i}}{\partial y_k}(y+t\xi)dt \cdot (y_k^\cdot - y_k)\right|$

$\leq \left|\sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \Phi_{x,i}}{\partial y_k}(y+t\xi)dt\right| \cdot \max_{j=1,\ldots,n} |y_j^\cdot - y_j|$

$\Rightarrow \|\Phi_x(y^\cdot) - \Phi_x(y)\|_\infty \leq \max_{i=1,\ldots,n} \left(\sum_{k=1}^n \int_0^1 \left|\frac{\partial \Phi_{x,i}}{\partial y_k}(y+t\xi)\right| dt\right) \|y^\cdot - y\|_\infty$

Es folgt: $D_y\Phi_x(y) = I - A^{-1}D_yF(x,y)$

Wir setzen ein $x = x_0 = 0, y = y_0 = 0$

$D_y\Phi_x(y)\big|_{x=0,y=0} = I - A^{-1}D_yF(0,0) = 0 \Rightarrow k = 0$ bei $x = 0, y = 0$.

$D_y\Phi_x$ ist stetig! Es existiert also eine Umgebung von y mit Radius ρ und x mit Radius r, sodass $k \leq 1$

Es folgt: Φ_x ist Kontraktion mit $k = \frac{1}{2}$ falls x, y nah genug bei $x_0 = 0, y_0 = 0$.

zu (1):

$y \in B_\rho(y_0) \Rightarrow \Phi_x(y) \in B_\rho(y_0)$, d.h. $\|\Phi_x(y)\| \leq \rho$

$\|\Phi_x(y) - \Phi_x(0) + \Phi_x(0) \leq \|\Phi_x(y) - \Phi_x(0)\| + \|\Phi_x(0)\| \leq k\|y - 0\| + \|\Phi_x(0)\|$

Es gilt: $k = \frac{1}{2},\quad \|y - 0\| \leq \rho$. zu zeigen: $\|\Phi_x(0)\| \leq \frac{1}{2}\rho$

$\Phi_x(0)\big|_{x=0} = 0 - A^{-1}F(0,0) = 0 \Rightarrow \|\Phi_x(0)\| = 0$ bei $x = 0$

und wegen Φ_x stetig: $\|\Phi_x(0)\| \leq \frac{1}{2}\rho$ ist möglich, falls x nahe genug bei $x_0 = 0$. $\Rightarrow \|\Phi_x(y)\| \leq \rho$

Insgesamt folgt: Es gibt einen einedeutigen Fixpunkt $y = \Phi_x(y)$ nach Banach. $\Rightarrow y = T(x)$ mit $F(x,y) = 0$ existiert! $\square$

Beispiel:

1. $F(x, y) = ye^{x+y} - 1$

   Ist $F(x, y) = 0$ bei $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ nach y auflösbar? $y = T(x)$? Welchen Wert hat $T'(x)\big|_{x=x_0}$?

   $T'(x) = -\frac{D_x f}{D_y f} = -\frac{y}{1+y} = -\frac{1}{2}$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \underline{x} \mapsto f(\underline{x})$

14.7 Hesse-Matrix

1. Ableitung: (Jacobi-Matrix): $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

2. Ableitung: Hesse-Matrix (Jacobi-Matrix der 1. Ableitung): $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$

15 Differentialgleichung

Viele dynamische Prozesse sind charakterisiert durch die Rate der Änderung eines Zustandes, d.h. die Ableitungen bestimmter Größen gegeben.

Definition: Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion $y(x)$ in der die unabhängige Variable $x \in \mathbb{R}$, der Funktionswert $y(x)$ und die Ableitungen $y'(x), y''(x), ...$ vorkommen.

Allgemein: $\mathcal{F}(x, y(x), y'(x), y''(x), ...) = 0$

Beispiel:

1. $y'(x) = x^2 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{3}x^3 + C \quad C \in \mathbb{R}$
2. $y''(x) = e^x \Rightarrow y(x) = e^x + C_1 + C_2 \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$
3. $y'(x) = y(x) \Rightarrow y(x) = Ce^x \quad C \in \mathbb{R}$
4. $y'(x) = -(y(x))^2 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x+C} \quad C \in \mathbb{R}$
5. $y''(x) = -y(x) \Rightarrow y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Klassifikation

1. Differentialgleichung: Eine Gleichung für eine Unbekannte

   Differential-Gleichungssystem: Mehrere Gleichungen für eine vektorwertige Unbekannte $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

2. gewöhnliche Differential-Gleichung: nur eine abhängige Variable $x \in \mathbb{R}$

   partielle Differential-Gleichung: mehrere abhängige Variablen $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$

3. Ordnung p: Eine Differentialgleichung p-ter Ordnung enthält die Ableitungen $y', y'', y^{(p)}$

4. lineare Differential-Gleichungen: $y, y', y'', ...$ treten nur linear auf in der Form $\sum_{k=0}^{p} a_k y^{(k)}(x) = f(x) \quad a_k \in \mathbb{R} \quad k = 0, ..., p$ (p-ter Ordnung)

Beispiel:

1. $y'(x) = x^2$ ist linear, Gleichung, gewöhnlich, 1-ter Ordnung, $f(x) = x^2$
2. $y''(x) = e^x$ ist linear, Gleichung, gewöhnlich, 2-ter Ordnung, $f(x) = e^x$
3. $y'(x) = y(x)$ ist linear, Gleichung, gewöhnlich, 1-ter Ordnung, $f(x) = 0$
4. $y'(x) = -(y(x))^2$ ist nicht-linear, Gleichung, gewöhnlich, 1-ter Ordnung, $f(x) = 0$
5. $y''(x) = -y(x)$ ist linear, Gleichung, gewöhnlich, 2-ter Ordnung, $f(x) = 0$
6. System 1-ter Ordnung: $y_1'(x) = y_2(x), y_2'(x) = y_1(x)$ $\underline{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$
7. partielle Differentialgleichung: $\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0$

Bemerkung:

1. Wir betrachten jetzt ausschließlich gewöhnliche Differentialgleichungen
2. engl.: ordinary differential equation (ODE)
3. Die unabhängige Variable ist oft die Zeit $t \in \mathbb{R}^+$ und die unbekannte Funktion entspricht dem Ort $\underline{x}(t)$. Ableitungen werden dann geschrieben als $\dot{x}(t) \equiv x'(t)$
4. Eine unbekannte Funktion $y(x)$ wird durch eine ODE nicht eindeutig festgelegt. In der Lösung für $y(x)$ treten p „Integrationskonstanten" auf (für eine ODE p-ter Ordnung)

Definition: Für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \underline{y}(t)$ heißt die Differentialgleichung p-ter Ordnung $\mathcal{F}(t, y(t), y'(t), ..., y^{(p)}) = 0$ mit den p Bedingungen $y(0) = y_0, y'(0) = y_1, ..., y^{(p-1)}(0) = y_{p-1}$ Anfangswertproblem. Dabei sind $y_0, y_1, ..., y_{p-1} \in \mathbb{R}$ gegebene Anfangswerte.

Beispiel:

1. gedämpftes Federpendel:

   Kräftegleichgewicht (Newton):

   $m\ddot{x}(t) = F_{Feder} + F_{Dämpfer} \Rightarrow m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0$ (lineare ODE mit konstanten Koeffizienten m, b, c (gegeben))

2. chemische Reaktion:

   $A \xrightarrow{\lambda} B$, $B \xrightarrow{\mu} C$ (Reaktionsgleichung)

   λ, μ sind die Reaktionsgeschwindigkeiten

   $x(t)$ ist die Konzentration von A über die Zeit t

   $y(t)$ ist die Konzentration von B über die Zeit t

   $z(t)$ ist die Konzentration von C über die Zeit t

   $x'(t) = -\lambda x(t)$

   $y'(t) = \lambda x(t) - \mu y(t)$

   $z'(t) = \mu y(t)$

   Differential-System, 1-ter Ordnung

   Anfangsbedingungen: $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = 0$

3. Lorentz-Modell für instabile Konvektion („Wetter")

   $x'(t) = \sigma(y(t) - x(t))$

   $y'(t) = \rho x(t) - x(t)z(t) - y(t)$

   $z'(t) = x(t)y(t) - \beta z(t)$

   σ, ρ, β sind Materialparameter

15.1 Skalare ODEs erster Ordnung

$\mathcal{F}(x, y(x), y'(x) = 0$ für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gesucht. Wir nehmen an $\mathcal{F}(x, y(x), y'(x)) = 0$ lässt sich nach $y'(x)$ auflösen, in der Form $y'(x) = f(x, y(x))$. f heißt „rechte Seite".

Interpretation: Gesucht sind die Kurven $y(x)$ deren Ableitung/Steigung in jedem Punkt x_0, y_0 gegeben ist durch den Wert $f(x_0, y_0)$.

Formale Lösung durch Integration $y'(x) = f(x, y(x)) \Rightarrow \int y'(x)dx = \int f(x, y(x))dx$, also $y(x) + C = \int f(x, y(x)dx$. Diese Lösung ist nicht explizit in $y(x)$.

Satz und Definition: Die ODE $y'(x) = g(x) \cdot f(y(x))$ für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Differential-Gleichung mit getrennten Variablen. Für die Lösung $y(x)$ gilt die implizite Gleichung $\int \frac{1}{f(y)} dy = \int g(x)dx$.

Beweis: Es gilt $\frac{1}{f(y(x))} y'(x) = g(x)$ und nach Integration $\int \frac{1}{f(y(x))}'(x)dx = \int g(x)dx$

Substitution: $y = y(x), dy = y'(x)dx$

Es folgt: $\int \frac{1}{f(y)} dy = \int g(x)dx \quad \square$

Beispiele:

1. $y' = e^y \sin x$, d.h. $f(y) = e^y, g(x) = \sin x$

   Lösung: $\int \frac{1}{e^y} dy = \int \sin x dx \Leftrightarrow -e^{-y} + C_1 = -\cos x + C_2$

   $\Rightarrow e^{-y} = \cos x - C \Rightarrow y(x) = -\ln(\cos x + C)$

2. $y' = -y^2 = -y^2 \cdot 1$

   $g(x) = 1, f(y) = -y^2$

   Lösung: $-\int \frac{1}{y^2} dy = \int 1 dx \Leftrightarrow \frac{1}{y} + C_1 = x + C_2 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x+C}$

3. $y' = y^2 + x^2$ ↯

   nicht lösbar, da die Variablen nicht getrennt sind.

Bemerkung:

1. Leichter merkbar mit $\frac{dy}{dx} = f(y)g(x) \Leftrightarrow \int \frac{1}{f(y)} dy = \int g(x)dx$

2. Die Integrationskonstante ergibt sich z.B. aus einer Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$

   (a) zu 1): $y(0) = 0 \Rightarrow y(0) = \ln(\cos 0 + C) = 0 \Rightarrow C = 0$

   (b) zu 2): $y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = \frac{1}{0+C} = 1 \Rightarrow C = 1$

15.2 Lineare Differential-Gleichung erster Ordnung

$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$ mit $a(t), f(t)$ gegeben und $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gesucht.

Definition: Für $f = 0$ heißt diese ODE *homogen*, ansonsten *inhomogen*.

Lösungsverfahren Die allgemeine Lösung hat die Form $y(t) = y_{hom}(t) + y_{inh}(t)$, wobei $y_{hom}(t)$ die homogene Gleichung erfüllt ($f = 0$) und die Integrationskonstante enthält, und $y_{inh}(t)$ irgendeine feste Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Beweis: Durch Einsetzen $(y_{hom} + y_{inh})' + a(t)(y_{hom} + y_{inh}) = f \Leftrightarrow y'_{hom} + a(t)y_{hom} + y'_{inh} + a(t)y_{inh} = f \quad \Box$

Beispiel: $y'(t) + 2y(t) = 1$

- homogen: $y' + 2y = 0 \Rightarrow y' = -2y \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = -2 \int dt \Rightarrow y_{hom}(t) = Ce^{-2t}$
- inhomogen: $y' + 2y = 1 \Rightarrow y_{inh}(t) = \frac{1}{2}$

also: $y(t) = Ce^{-2t} + \frac{1}{2}$ ist allgemeine Lösung.

Rezept:

1. $y_{hom}(t)$ gesucht. Sei $A(t) = \int a(t)dt$ eine bestimmte Stammfunktion. $\Rightarrow y_{hom}(t) = Ce^{-A(t)}$ denn $y'_{hom} + a(t)y_{hom} = C(-A'(t))e^{-A(t)} + a(t)Ce^{-A(t)} = 0$
2. $y_{inh}(t)$ gesucht. Ansatz mit Variation der Konstanten: $y_{inh}(t) = C(t)e^{-A(t)}$

   Einsetzen: $y'_{inh} + a(t)y_{inh} = f(t)$

   $y'_{inh}(t) = C(t)e^{-A(t)} + C(t)(-A'(t))e^{-A(t)} \Leftrightarrow C(t)e^{-A(t)} - a(t)c(t)e^{-A(t)} + a(t)c(t)e^{-A(t)} = f(t)$

   $\Rightarrow C'(t) = f(t)e^{A(t)}$

Beispiel:

1. $y' + 2y = t \quad f(t) = t \quad a(t) = 2$

   $y'_{hom} + 2y_{hom} = 0 \Rightarrow y_{hom}(t) = Ce^{-2t}$

   $y_{inh}(t) = c(t)e^{-2t}$

   $y'_{inh}(t) = c'(t)e^{-2t} - 2c(t)e^{-2t}$

   Einsetzen:

   $c'(t)e^{-2t} - 2c(t)e^{-25} + 2c(t)e^{-2t} = t \Rightarrow c'(t) = te^{2t} \Rightarrow c(t) = \int te^{2t}dt \Rightarrow c(t) = (\frac{t}{2} - \frac{1}{4})e^{2t}$

   $y_{inh}(t) = (\frac{t}{2} - \frac{1}{4})e^{2t}e^{-2t} = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$

   $\Rightarrow y(t) = y_{hom}(t) + y_{inh}(t) = Ce^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$
2. $y' + 2ty = t \quad a(t) = 2t \quad f(t) = t$

   $y_{hom}(t)$ gesucht.

   Stammfunktion von $a(t)$: $A(t) = t^2 \Rightarrow y_{hom}(t) = Ce^{-t^2}$

   $y_{inh}(t) = c(t)e^{-t^2}$, $c(t)$ gesucht. Einsetzen von $c'(t)e^{-t^2} = t$

   $c'(t) = te^{t^2} \Rightarrow c(t) = \int te^{t^2}dt \Rightarrow c(t) = \frac{1}{2}e^{t^2} \quad y_{inh}(t) = c(t)e^{-t^2} = \frac{1}{2} \quad y(t) = Ce^{-t^2} + \frac{1}{2}$

3. Chemische Reaktionen: $A \xrightarrow{\lambda} B, B \xrightarrow{\mu} C$

   $x'(t) = -\lambda x(t)$, Anfangsbedingung: $x(0) = 1 \Rightarrow x(t) = e^{-\lambda t}$

   $y'(t) = \lambda x(t) - \mu y(t) \Leftrightarrow y'(t) + \mu y(t) = \lambda x(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

   $a(t) = \mu \quad f(t) = \lambda e^{-xt}$

   $y'_{hom}(t) + \mu y_{hom} = 0 \Leftrightarrow y_{hom}(t) C e^{-\mu t}$

   $y_{inh}(t) = c(t)e^{-\mu t} \rightsquigarrow c'(t)e^{-\mu t} = \lambda e^{-\lambda t} \quad c(t) = \int \lambda e^{(\mu-\lambda)t} dt$

   $c(t) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} e^{(\mu-\lambda)t}$. Anfangsbedingung: $y(0) = 0 \Leftrightarrow C \cdot 1 + \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \cdot 1 = 0 \quad C = -\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

   Spezielle Lösung für die Anfangsbedingung: $y(t) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}(-e^{-\mu t} + e^{-\lambda t})$

   $z'(t) = \mu y(t)$ durch Integration erhält man $z(t)$.

Bemerkung: Für das Anfangswertproblem $y'(t) + \alpha y(t) = f(t)$ mit $y(0) = y_0$ gilt $y_{hom}(t) = Ce^{-\alpha t}$ und $y_{inh}(t) = c(t)e^{-\alpha t}$, sowie $c'(t) = f(t)e^{\alpha t}$.

Wir schreiben als konkrete Stammfunktion $c(t) = \int_0^t f(\tau)e^{\alpha\tau} d\tau$

Mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0, y(t) = Ce^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \int_0^t f(\tau)e^{\alpha\tau} d\tau|_{t=0} = y_0$ folgt $y(0) = C = y_0$.

Insgesamt also $y(t) = y_0 e^{-\alpha t} + \int_0^t f(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau$. Wir substituieren $t - \tau = s \quad d\tau = -ds$

$\Rightarrow y(t) = y_0 e^{-\alpha t} + \int_0^t f(t-s)e^{-\alpha s} ds$. $\int_0^t f(t-s)e^{-\alpha s} ds$ ist ein „Integral über die Vergangenheit" bzw. „Gedächtnisintegral". f wird in die Vergangenheit hinein abgetastet, aber mit $e^{-\alpha s}$ schwindet die Erinnerung.