Aufgabenübersicht

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

gilt.

Aufgabe 2 Skizzieren Sie die Menge aller Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt

$$|z+2|^2 > |z-2\mathrm{i}|^2 + 1.$$

Aufgabe 3 Sei $p \in \mathbb{N}_0$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{n^p + 2n^2}{pn^2 + n}$ eine Folge.

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ mit $p = 1$.

(b) Für welche $p \in \mathbb{N}_0$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

Aufgabe 4 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) Falls diese Reihe konvergiert, geben Sie zusätzlich den Grenzwert an:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^{k+1}}{4^k},$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(k!)^2}.$$

Aufgabe 5 Sei $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{2x^3 + x^2 + x\sin x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}.$$

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D der Funktion f an.

(b) Untersuchen Sie die Funktion f auf stetige Fortsetzbarkeit in den Definitionslücken und geben Sie eine stetige Fortsetzung sowie deren Definitionsbereich an.

Aufgabe 6 Gegeben sei die Funktion $f(x) = (\mathrm{e}^{-x} - 2)^2$.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von f und berechnen Sie die erste und zweite Ableitung.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von f. Handelt es sich bei den Extrema um Minima oder Maxima?

(c) In welchen Bereichen ist die Funktion f konvex, in welchen ist sie konkav?

Aufgabe 7 Berechnen Sie die Integrale

$$\text{(a)} \quad \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2t}} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 x^2 \sin(\pi x) \,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 8

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $\mathrm{D}f(x,y)$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \sin(x+y) \\ x + y \cdot \ln(2x) \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung vom

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) = y \cdot \mathrm{e}^{x+2z} + z \cdot \mathrm{e}^{-y},$$

im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ in Richtung $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 9 Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Gleichung

$$x = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

genau eine Lösung im Intervall $\left[\frac{1}{10}, 1\right]$ besitzt. Geben Sie zudem noch eine Formel zur näherungsweisen Berechnung dieser Lösung an.

Aufgabe 10 Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{y} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$$

für $y(x)$ mit $y(0) = 1$.

Name: ____________________ **Matr.-Nr.:** ____________

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

gilt.

4 Punkte

Name: ______________________ **Matr.-Nr.:** ______________

Aufgabe 2. Skizzieren Sie die Menge aller Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt

$$|z+2|^2 > |z-2\mathrm{i}|^2 + 1.$$

3 Punkte

Name: ______________________________ **Matr.-Nr.:** ____________________

Aufgabe 3. Sei $p \in \mathbb{N}_0$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \dfrac{n^p + 2n^2}{pn^2 + n}$ eine Folge.

(a) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ mit $p = 1$.

(b) Für welche $p \in \mathbb{N}_0$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

1 + 2 Punkte

Name: ______________________________ **Matr.-Nr.:** ____________________

Aufgabe 4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) Falls diese Reihe konvergiert, geben Sie zusätzlich den Grenzwert an:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^{k+1}}{4^k},$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(k!)^2}.$$

2 + 3 Punkte

Name: ______________________________ **Matr.-Nr.:** _______________

Name: ____________________________ **Matr.-Nr.:** ________________

Aufgabe 5. Sei $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{2x^3 + x^2 + x \sin x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}.$$

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D der Funktion f an.

(b) Untersuchen Sie die Funktion f auf stetige Fortsetzbarkeit in den Definitionslücken und geben Sie eine stetige Fortsetzung sowie deren Definitionsbereich an.

1 + 6 Punkte

Name: ______________________ **Matr.-Nr.:** ______________

Aufgabe 6. Gegeben sei die Funktion $f(x) = (\mathrm{e}^{-x} - 2)^2$.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von f und berechnen Sie die erste und zweite Ableitung.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen von f. Handelt es sich bei den Extrema um Minima oder Maxima?

(c) In welchen Bereichen ist die Funktion f konvex, in welchen ist sie konkav?

2,5 + 3 + 2,5 Punkte

Name: ______________________________ **Matr.-Nr.:** ____________________

Aufgabe 7. Berechnen Sie die Integrale

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2t}} \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,$ (b) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x.$

2,5 + 4,5 Punkte

Name: ______________________ **Matr.-Nr.:** ______________

Name: ______________________ **Matr.-Nr.:** ______________

Aufgabe 8.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $\mathrm{D}f(x,y)$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\sin(x+y) \\ x + y \cdot \ln(2x) \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung vom

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) = y \cdot \mathrm{e}^{x+2z} + z \cdot \mathrm{e}^{-y},$$

im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ in Richtung $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 + 2 Punkte

Name: ______________________________ **Matr.-Nr.:** ____________________

Aufgabe 9. Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Gleichung

$$x = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

genau eine Lösung im Intervall $\left[\frac{1}{10}, 1\right]$ besitzt. Geben Sie zudem noch eine Formel zur näherungsweisen Berechnung dieser Lösung an.

6 Punkte

Name: ________________________________ **Matr.-Nr.:** ________________

Aufgabe 10. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{y} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$$

für $y(x)$ mit $y(0) = 1$.

3 Punkte

Name: ______________________________ **Matr.-Nr.:** ____________________

Name: ______________________________ **Matr.-Nr.:** ____________________