RHEIN.-WESTF. TECHN. HOCHSCHULE AACHEN
IGPM
Prof. Dr. Henning Esser

Aachen, den 14.02.2008

1. Klausur zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (15 Punkte)
Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Aufgabe 2 (15 Punkte)
Berechnen Sie alle komplexen Lösungen z der Form $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, der folgenden Gleichung:

$$z^4 = -8 + i8\sqrt{3}.$$

Aufgabe 3 (15 Punkte)
Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die rekursiv definierte Folge

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{3}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe 4 (15 Punkte)
Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\downarrow 1} \frac{\log(x-1)}{\tan(\frac{\pi x}{2})}.$$

Aufgabe 5 (15 Punkte)
Zeigen Sie: Es gibt kein $c \in \mathbb{R}$, für das die Gleichung $x^3 - 3x + c = 0$ zwei Lösungen zwischen 0 und 1 besitzt.

Hinweis: Man kann z.B. den Mittelwertsatz anwenden.

Aufgabe 6 (15 Punkte)
Bestimmen Sie:

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$$

Aufgabe 7 (10 Punkte)
Bestimmen Sie den Wahrheitswert, wahr oder falsch, der folgenden Aussagen und notieren Sie Ihre Antwort auf dem **Deckblatt** der Klausur. Eine Begründung ist jeweils nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort gibt es 2 Punkte, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen (solange die Gesamtsumme für diese Aufgabe nicht negativ wird).

(1) Für eine konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gilt immer $a_n \to 0$ für $n \to \infty$. W

(2) Die Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n+1}, \frac{1}{2^n}\right)$ ist offen. F

(3) Wenn $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von e^x ist, dann gilt $x_0 < 0$. W

(4) Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$, so gilt auch für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(2n)$. W

(5) Unstetige Funktionen auf offenen Mengen nehmen ihren Minimalwert an. F