Probeklausur Musterlösung

Georg Böhm

17. Februar 2006

Es handelt sich bei diesem Dokument um eine Abschrift.
Ich garantiere nicht für die Richtigkeit.

Aufgabe 1: (12 Punkte)
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle n $\in$ mit $n \geq 2$ gilt.

$$\frac{n^n}{(n-1)!} \geq 2^n$$

Beweis:

A(n) : $\frac{n^n}{(n-1)!} \geq 2^n$, n≥2.

Induktionsanfang: n=2 $\frac{2^2}{(2-1)!} = 4 \geq 2^2$ Also ist A(n) wahr.

Induktionsschluss: A(n) $\Rightarrow$ A(n+1)

Sei A(n)≥2 und A(n) wahr für n , d.h. $\frac{n^n}{(n-1)!} \geq 2^n$.

Es gilt:

$\frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n)!} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{n\cdot(n-1)!} \geq_{IV} \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n)} \cdot \frac{2^n}{n^n} = 2^n \cdot (\frac{n+1}{n})^{n+1} = 2^n \cdot (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

Mit Bernoullischer Ungleichung
$\geq 2^n(1 + \frac{n+1}{n}) \geq 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$

$\Rightarrow$ A(n+1) ist auch wahr.
Nach Induktionsprinzip ist A(n) wahr für alle n≥2

Aufgabe 2: (15 Punkte)
Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen z der Form z = z +iy, z,y $\in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichung:

$$z^3 = \frac{(3+4i)(1+7i)}{25-25i}$$

Lösung: Es gilt:

$\frac{(3+4i)(1+7i)}{25-25i} = \frac{1}{25} \cdot \frac{(3+4i)(1+7i)}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1}{25} \cdot \frac{(3+4i)(-6+8i)}{2} = \frac{1}{25} \cdot \frac{-2\cdot(3+4i)\cdot(3-4i)}{2}$
= -1 = 1 $(\cos\pi + i\sin\pi)$

Mit z = r$(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gilt:
r=$1^{\frac{1}{3}}$=1

$\varphi = \frac{\pi+2k\pi}{3}$, k=0,1,2 $\Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \varphi_2 = \pi, \varphi_3 = \frac{5\pi}{3}$

Die Lösungen sind:
$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
$z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$
$z_3 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Aufgabe 3: (15 Punkte)
Die Folge $(a_{n=1}^{\infty})$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 0 \text{ und } a_{n+1} = \frac{1}{12}(a_n^2 + 2a_n + 16)$$

Untersuchen Sie die Folge $(a_{n=1}^{\infty})$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $0 \leq a_n \leq 2$ für alle n$\in \mathbb{N}$

Lösung:
Beh.(a): $0 \leq a_n \leq 2 \forall$ n $\in \mathbb{N}$ = A(n)

Induktionsanfang: $a_1 = 0 \leq 2 \Rightarrow$ A(1) wahr.

Induktionsschluss: A(n) $\Rightarrow$ A(n+1)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und A(n) wahr, d.h. $0 \leq a_n \leq 2$. Dann gilt:

$a_{n+1} = \frac{1}{12}(a_n^2 + 2a_n + 16) \leq \frac{1}{12}(2^2 + 2 \cdot 2 + 16) = 2 \Rightarrow_{Vollst.Ind.} 0 \leq a_n \leq 2 \forall$ n $\in \mathbb{N}$

Beh.(b): a_n ist monoton steigend.

$a_2 = \frac{1}{12} \cdot 16 > 0 = a_1$
$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{12}(a_n^2 + 2a_n + 16) - a_n = \frac{1}{12}(a_n^2 - 10a_n + 16) = \frac{1}{12}(a_n - 2)(a_n - 8) \geq 0$
(Beh.(a) $a_n \leq 2 \Rightarrow a_n - 2 \leq 0 a_n - 8 \leq 0$)

$\Rightarrow (a_n)$ ist monoton steigend.

a),b), Monotonieprinzip $\Rightarrow (a_n)$ ist konvergent.
Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Es gilt $0 \leq a_n \leq 2$
$a = \frac{1}{12}(a_n^2 + 2a_n + 16) \Leftrightarrow a_n^2 - 10a_n + 16 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a-8) = 0$
$\Rightarrow a = 2, a = 8 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 2$

Aufgabe 4: (12 Punkte)
Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert, falls dieser existiert:

$$\lim_{x\to 0}(\frac{x^2-2x+1}{x^2-x})^x$$

Lösung: Da $(\frac{x^2-2x+1}{x^2-x}) \to_{x\to 0} \infty$, ist $(\frac{x^2-2x+1}{x^2-x})^x$ von Typ ∞^0
Es gilt $(\frac{x^2-2x+1}{x^2-x})^x = e^{x\log(\frac{x^2-2x+1}{x^2-x})}$ $\lim_{x\to 0} x\log(\frac{x^2-2x+1}{x^2-x}) =_{0\cdot\infty} \lim_{x\to 0} \frac{\log(x^2-2x+1-\log(x^2-x)}{\frac{1}{x}}$
$=^{\frac{\infty}{\infty}}{}_{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x-2}{x^2-2x+1}-\frac{2x-1}{x^2-x}}{-\frac{1}{x^2}}$ $\lim_{x\to 0}(-\frac{(2x-2)x^2}{x^2-2x+1}+\frac{2x-1}{x^2-x}\cdot x^2) = \lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{(x-1)}x =$
0

Somit gilt wegen der Stetigkeit von e^x:

$\lim_{x\to 0}(\frac{x^2-2x+1}{x^2-x})^x = e^{\lim_{x\to 0} x\log(\frac{x^2-2x+1}{x^2-x})} = e^0 = 1$

Aufgabe 5: (12 Punkte)
Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3x)^n}{n^3}?$$

Lösung: Mit $a_n = \frac{(-3)^n}{n^3}$ gilt:

$$\varsigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mid a_n \mid} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(3)^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{(\sqrt[n]{n})^3} = 3$$

Also ist $\frac{1}{3}$ der Konvergenzradius, d.h. ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergent für $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ und divergent für $\mid x \mid > \frac{1}{3}$

Falls x=$\frac{1}{3}$, gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$

Falls x=$-\frac{1}{3}$, gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n^3}$

Da $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ konvergiert, ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergent für x=$\pm\frac{1}{3}$

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergent auf $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

Aufgabe 6: (12 Punkte)

$$\text{Berechnen Sie} \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})dx$$

Lösung: Sei $y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq \pi^2$, dann gilt: $x = y^2$ und $dx = 2y \cdot dy$

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})dx = \int_0^{\pi} \sin(y) \cdot 2y \text{ dy } =^{PI} - \cos \cdot 2y \mid_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos y) \cdot 2dy$$

$$= 2\pi + \int_0^{\pi} 2\cos y \text{ dy} = 2\pi + 2\sin y \mid_0^{\pi} = 2\pi + 0 = 2\pi$$

Aufgabe 7: (12 Punkte)
Zeigen Sie mir Hilfe der Differentialrechnung

$$2\arctan\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin(2x), \text{ falls } \mid x \mid < \frac{1}{2}.$$

Lösung: Sei f(x)=$2\arctan\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} + \arcsin(2x)$
Dann gilt für x $\in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$f'(x) = 2(\arctan\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}})' + (\arcsin(2x))' =$
$2 \cdot \frac{\frac{1}{2}\frac{-2(1+2x)-2(1-2x)}{(1+2x)^2}}{(1+\frac{1-2x}{1+2x}) \cdot \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}} + \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{-4}{\frac{2}{1+2x} \cdot \frac{\sqrt{1-4x^2}}{1+2x} \cdot (1+2x)^2} + \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} =$
0
$\Rightarrow \delta$ ist eine konstante Funktion auf (-0,5, 0,5)
f(x) = f(0) = 2arctan(1) + arcsin(0) = 2 $\frac{\pi}{4}$ + 2 = $\frac{\pi}{2}$

Aufgabe 8: (10 Punkte)
Bestimmen Sie den Wahrheitswert, wahr oder falsch, der folgenden Aussagen und notieren Sie Ihre Antwort auf dem Deckblatt der Klausur. Eine Begründung ist jeweils nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort gibt es 2 Punkte, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen (solange die Gesamtsumme für diese Aufgabe nicht negativ wird).

(1) Gilt für alle n $\in \mathbb{N}$ die Aussage A(n), so gilt auch für alle n$\in \mathbb{N}$ die Aussage A(2n). [**W**]
(2) Unstetige Funktionen auf offenen Mengen nehmen ihren Minimalwert ein. [**F**]
(3) Es sei f stetig auf (0,1]. Falls das uneigentliche Integral $\int_0^1 f(x)dx$ existiert, dann existiert auch $\int_0^1 f^2(x)dx$ [**F**]
(4) Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$, so ist auch $\|\cdot\|^2$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ [**F**]
(5) Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge ist. [**F**]