III. Zur Diskussion am 02.05.00 (I+P)

Die Aufgaben mit * sind nur Zusatzaufgaben (wenn genug Zeit ist).

0. Vorwort (bitte sagen)

Es ist vorausgesetzt, daß jede(r) Student(in), der/die mit der Differentialgleichungen beschäfigt ist, keine Probleme mit dem Integrieren der einfachsten Funktionen hat.

Die "einfachsten" Funktionen sind nicht nur

$$e^x, \quad x^k, \quad \sin x$$

sondern auch

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{x}{1+x^2}, \quad x^k e^x, \quad e^x \sin x, \quad \frac{1}{x \ln^k x}, \quad e^{\sin x} \cos x, \quad \ldots$$

1. Richtungsfeld, Integralkurven, Lösungsschar (eine kurze geometrische Darstellung)

Wir beschäftigen uns nur mit sog. expliziten DGLs

$$y' = f(x, y), \tag{1.1}$$

wobei f auf einer Menge D der (x, y)-Ebene erklärt ist.

Die Funktion $y = \phi(x)$ ist eine **Lösung** von (1.1) in einem Intervall J, wenn y diffbar ist und

$$\phi'(x) \equiv f(x, \phi(x)), \quad x \in J,$$

gilt.

Durch (1.1) wird die Steigung $y'(x_*) = f(x_*, y_*)$ der durch den Punkt (x_*, y_*) gehenden Lösungskurve $y(x)$ vorgeschrieben. Man kann diese Steigung durch einen Vektor darstellen.

Die Gesamtheit aller Elemente der Form $(x, y, f(x, y))$ ist ein **Richtungsfeld**.

Die (stetig diffbare) Kurve, die in jedem Punkt (x, y) die gegebene Richtung hat, ist eine **Integralkurve**.

Der Graph einer Lösung von (1.1) ist eine Integralkurve, aber nicht umgekehrt (Beispiele s.u.).

Wenn der Anfangswert (x_0, y_0) gegeben ist, kann man im Prinzip den Graph einer Lösung in einer Umgebung von (x_0, y_0) rekonstruiren (aber nicht unbedingt eindeutig).

1.1: Beispiele des Richtungsfeldes bzw. der Lösungsschar

ganz kurz, nur die Skizzen (ein paar Skizzen für Informatiker),
kein ausfürlicher Kommentar (der hier für die HiWis gegeben ist)

Um Punkte (x, y) zu bestimmen, für die der Richtungsvektor eine bestimmte Steigung c hat, setzt man $y' = c$ und löst nach y oder x auf.

a) $y' = \frac{y}{x} = c \quad \Leftrightarrow \quad y = cx,$

d.h., (x, y) liegt auf einer Geraden durch den Ursprung mit Steigung c. Die Integralkurven erhält man durch die Beziehung

$$ax + by = 0, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

(da die rechte Seite von a) unbestimmt ist). Die Lösungsschar ist dieselbe, außer der y-Achse.

b) $y' = -\frac{x}{y} = c \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{c}\,x,$

d.h., (x, y) liegt auf einer Geraden durch den Ursprung mit Steigung $-1/c$. Die Integralkurven sind die Kreise

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Die Lösungsschar sind die Funktionen

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R < x < R.$$

c) $y' = \frac{1}{1+x^2}$, i.a. $y' = f(x)$.

Das Richtungsfeld ist unabhägig von y. Es ist bekannt, daß eine der Lösungen die (Stamm-) Funktion

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

ist. Alle übrigen Lösungen erhält man aus dieser durch Parallelverschiebung in y-Richtung, d.h.

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C,$$

wobei C eine beliebige Konstante ist. Gilt die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, muß C geeignet gewählt werden, und das Anfangsproblem besitzt in diesem Fall genau eine Lösung.

d) $y' = -2y$, i.a. $y' = g(y)$

Das Richtungsfeld ist unabhängig von x. Formale Berechnung der Lösung:

$$\int \frac{y'}{g(y)} dx + C_1 = \int 1\,dx + C_2,$$

oder mit der Substitutionsregel

$$\int \frac{dy}{g(y)} = x + C.$$

Hierdurch wird, falls $g \neq 0$, eine Funktion $x(y)$ definiert, deren Umkehrfunktion $y(x)$ eine Lösung der DGL darstellt. Für $g(y) = -2y$ ist die Lösungsschar

$$y = e^{-2(x-C)} = C_1 e^{-2x}.$$

2. Trennung der Variablen

Die DGL

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

läßt sich formal als

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + C$$

lösen. (Der exakte Beweis wird vielleicht in der Großübung gegeben.)

Aufgabe 2.1: Das AWP $y' = x(y^2 + 2y)$, mit $\begin{cases} A)\ y(0) = 0; \\ B)\ y(0) = -2; \\ C)\ y(0) = \frac{2e^{-1}}{1-e^{-1}}; \\ D)\ y(0) = \frac{2e}{1-e}. \end{cases}$

0) Die trivialen Lösungen:

$$f(x,y) \equiv 0\ \forall x \quad \Rightarrow \quad y^2 + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y \equiv 0, \quad \text{oder} \quad y \equiv -2.$$

1) Trennung der Variablen:

$$\int \frac{dy}{y^2 + 2y} = \int x\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+2} = 2\int x\,dx + C_1,$$

d.h.

$$\ln|y| - \ln|y+2| = x^2 + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = \ln Ce^{x^2}.$$

2) Die Lösungsschar (die allgemeine Lösung):

$$\frac{y}{y+2} = Ce^{x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2Ce^{x^2}}{1 - Ce^{x^2}}$$

(die $y \equiv 0$ beinhaltet), dazu $y \equiv -2$.

3) Bestimmung der Konstanten und des Existenzintervalls: Nun folgt

$$\begin{array}{llll}
A)\ y(0) = 0; & \Rightarrow & y(x) \equiv 0, & x \in \mathbb{R}; \\[2ex]
B)\ y(0) = -2 & \Rightarrow & y(x) \equiv -2, & x \in \mathbb{R}; \\[2ex]
C)\ y(0) = \dfrac{2e^{-1}}{1 - e^{-1}} & \Rightarrow & y(x) = \dfrac{2e^{x^2-1}}{1 - e^{x^2-1}}, & x \in (-1, 1); \\[2ex]
D)\ y(0) = \dfrac{2e}{1 - e} & \Rightarrow & y(x) = \dfrac{2e^{x^2+1}}{1 - e^{x^2+1}}, & x \in \mathbb{R}.
\end{array}$$

3. Eindeutigkeit und maximale Lösung

Aufgabe 3.1: Lösung des AWP's $y' = 2\sqrt{|y|}$ mit $\begin{cases} A) & y(1) = 0; \\ B) & y(1) = 1. \end{cases}$

1a) Die triviale Lösung ist $y \equiv 0$.

1b) Trennung der Variablen. Wenn $y < 0$,

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{-y}} = \int dx \quad \Rightarrow \quad 0 > -\sqrt{-y} = x - c_1 \quad \Rightarrow \quad y = -(x - c_1)^2, \quad x < c_1.$$

Wenn $y > 0$,

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx \quad \Rightarrow \quad 0 < \sqrt{y} = x - c_2 \quad \Rightarrow \quad y = (x - c_2)^2, \quad x > c_2.$$

1c) Die allgemeine Lösung ist deshalb

$$y(x) = \begin{cases} -(x - c_1)^2, & x < c_1; \\ 0 & c_1 \le x \le c_2; \\ (x - c_2)^2, & c_2 < x, \end{cases}$$

wobei c_1, c_2 auch die Werte $\pm\infty$ annehmen können.

2A) Für $y(1) = 0$ gibt es unendlich viele (lokale) Lösungen vom Typ (1c) mit

$$c_1 \le 1 \le c_2.$$

2B) Wenn $y(1) = 1$, dann ist y auf $\mathbb{R}_+$ eindeutig bestimmt,

$$y(x) = x^2, \quad x > 0,$$

aber das AWP hat auch unendlich viele Lösungen vom Typ

$$y(x) = \begin{cases} -(x - c_1)^2, & x < c_1; \\ 0 & c_1 \le x \le 0; \\ x^2, & 0 < x, \end{cases}$$

3) Der Grund ist, daß die rechte Seite $f(x, y) := \sqrt{|y|}$ lokal (und zwar in $y = 0$) nicht Lipschitz-stetig ist.

I.a. wird sowohl die Eindeutigkeit als auch die Existenz der maximalen Lösung nur für lokal Lipschitz-stetige Funktionen garantiert.

Aufgabe 2.2*: Das AWP $y' = e^y \sin x, \quad y(0) = -\ln 2.$

1) Trennung der Variablen:

$$\int e^{-y}\,dy = \int \sin x\,dx \quad \Rightarrow \quad -e^{-y} = -\cos x - C,$$

d.h.

$$y(x,C) = -\ln(\cos x + C)$$

ist die Lösungsschar der DGL.

2) Bestimmung der Konstanten:

$$y(0) = -\ln 2 \quad \Rightarrow \quad C = 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = -\ln(\cos x + 1).$$

3) Das Existenzintervall.
Diese Lösung existiert in $(-\pi, \pi)$ und ist nicht über dieses Intervall hinaus fortsetzbar.

4^*. Anhang

Der exakte Beweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x)g(y), \quad y_0 = y(x_0)$$

(in einer Umgebung von x_0) ist der Folgende.

Sei $x_0 \in J$. Dann gilt

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y)}\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Substitutionsregel:

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{g(s)}\, ds = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Ist G eine Stammfunktion von $1/g$, F eine von f, dann

$$G(y(x)) - G(y(x_0)) = F(x) - F(x_0).$$

Da $G' = 1/g \neq 0$, besitzt G eine Umkehrfunktion G^{-1}, und

$$y(x) = G^{-1}[F(x) - F(x_0) + G(y(x_0))].$$

Im allgemeinen ist die Lösungsschar

$$y(x) = G^{-1}[F(x) + C],$$

und man kann C durch die Anfangsbedingung bestimmen.

IV. Zur Diskussion am 9. Mai 2000 (I+P)

Die Aufgaben mit $*$ sind nur Zusatzaufgaben (wenn genug Zeit ist).

1. Homogene DGL

Eine DGL der Form $y' = f(y/x)$, $x \neq 0$ heißt homogen.
Mit dem Ansatz $z = y/x$ erhält man eine DGL in z mit getrennten Variablen:

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{1}{x}\Big(y' - \frac{y}{x}\Big) = \frac{1}{x}\Big(f(z) - z\Big) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{f(z) - z}\, dz = \int \frac{1}{x}\, dx.$$

Aufgabe 1.1: Lösung des AWPs $\quad y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{3y^2}, \quad x, y > 0, \quad y(1) = 1.$

1) Trennung der Variablen:

$$f(z) = z + \frac{1}{3z^2} \quad \Rightarrow \quad \int 3z^2\, dz = \int \frac{1}{x}\, dx$$
$$\Rightarrow \quad z^3 = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt[3]{\ln|x| + C}$$

2) Bestimmung der Konstanten:

$$z(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt[3]{\ln|x| + 1}.$$

3) Resubstitution:

$$y(x) = x \cdot z(x) = x\,\sqrt[3]{\ln|x| + 1},$$

4) Existenzintervall. Die Bedingung $x, y > 0$ erfordert

$$\ln x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1/e.$$

Das Existenzintervall (das $x = 1$ beinhaltet) ist $x \in (1/e, \infty)$.

Aufgabe 1.2*. Lösungsschar der DGL $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

0) Triviale Lösung: $y \equiv 0$.
1) Für $x \neq 0$ schreiben wir die DGL wie folgt um

$$y' = \frac{2y/x}{1+(y/x)^2}$$

2) DGL mit getrennten Variablen:

$$z' = \frac{1}{x}[f(z) - z] = \frac{1}{x}\left[\frac{2z}{1+z^2} - z\right] = \frac{1}{x}\frac{z-z^3}{1+z^2}.$$

2a) Triviale Lösungen sind $z - z^3 = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} z &= 0 \quad &\Rightarrow \quad &y = 0, \quad \text{(schon gefunden)} \\ z &= 1 \quad &\Rightarrow \quad &y = x, \\ z &= -1 \quad &\Rightarrow \quad &y = -x. \end{aligned}$$

2b) Trennung der Variablen:

$$\int \frac{1+z^2}{z-z^3}\,dz = \ln|x| + C.$$

Berechnung des Integrals:

$$\int \frac{1-z^2+2z^2}{z(1-z^2)}\,dz = \int \frac{1}{z}\,dz + \int \frac{2z}{1-z^2}\,dz = \ln|z| - \ln|1-z^2|.$$

Also

$$\ln\left|\frac{z}{1-z^2}\right| = \ln|x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{1-z^2} = Cx.$$

3) Resubstitution $z = y/x$:

$$\frac{y}{x^2-y^2} = C := \frac{1}{2c} \quad \Rightarrow \quad y^2 + 2cy - x^2 = 0.$$

4) Lösungschar:

$$y = -c \pm \sqrt{c^2+x^2} \quad \text{dazu} \quad y = \pm x, \quad y = 0.$$

2. Lineare DGL, Variation der Konstanten

Eine DGL der Form

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2.1}$$

heißt lineare DGL.
1) Man löst zuerst die homogene lineare DGL

$$y'(x) = a(x)y(x), \tag{2.2}$$

also

$$y(x) = Ce^{\int a(x)\,dx} \quad \text{– die allgemeine Lösung.} \tag{2.3}$$

2) Jetzt bestimmt man die Lösung der imhomogenen DGL (2.1) durch die sog. Variation der Konstanten in (2.3):

$$y(x) = C(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = C'(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} + a(x)y(x)$$

Bestimme $C(x)$ so, daß

$$C'(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} = b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

gelten, z.B.

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-\int_{x_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}\,dt + y_0$$

3) Nun folgt, daß

$$y(x) = \left[\int_{x_0}^{x} b(t)e^{-\int_{x_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}\,dt + y_0\right] e^{\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt} \tag{2.4}$$

die Lösung des Anfangswertproblems (2.1) ist.

Aufgabe 2.0. Lösung von $y' = y + e^x, \quad y(0) = 0.$

1) Lösung der homogenen DGL:

$$y' = y \quad \Rightarrow \quad y = Ce^x.$$

2) Variation der Konstanten

$$y = C(x)e^x \quad \Rightarrow \quad C'(x)e^x = e^x \quad \Rightarrow \quad C(x) = x + C_1.$$

3) Allgemeine Lösung

$$y(x) = C(x)e^x = (x + C_1)e^x.$$

4) Bestimmung der Konstante.

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.$$

Also, ist die Lösung gegeben durch

$$y(x) = xe^x.$$

Aufgabe 2.1*. Lösung von $y' = y\cos x + \sin 2x, \quad y(0) = 1.$

Man kann sofort die Lösung aus der allgemeinen Formel (2.4) entnehmen

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \left(\int_{x_0}^{x} \sin 2t \; e^{-\int_{x_0}^{t}\cos\tau\, d\tau}\, dt + y_0\right) e^{\int_{x_0}^{x}\cos t\, dt} \\
&= \left(\int_{0}^{x} \sin 2t \; e^{-\sin t}\, dt + 1\right) e^{\sin x}.
\end{aligned}
$$

Wenn man sich aber an diese Formel nicht errinnert, geht man alle Schritte durch.

1) Lösung der homogenen DGL:

$$y' = y\cos x \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{\sin x}.$$

2a) Variation der Konstanten

$$C'(x)e^{\sin x} = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad C'(x) = \sin 2x \cdot e^{-\sin x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \int \sin 2x \; e^{-\sin x}\, dx + C_1$$

2b) Berechnung des Integrals:

$$
\begin{aligned}
\int \sin 2x \; e^{-\sin x}\, dx &= \int 2\sin x\cos x \; e^{-\sin x}\, dx = \int 2\sin x \; e^{-\sin x}\, d\sin x \\
&= \int 2z \; e^{-z}\, dz = -2(z+1)e^{-z}\Big|_{z=\sin x} \\
&= -2(\sin x + 1)e^{-\sin x}.
\end{aligned}
$$

3) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = C(x)e^{\sin x} = -2(\sin x + 1) + C_1 e^{\sin x}$$

4) Bestimmung der Konstante:

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 3.$$

Aufgabe 2.2*: Lösung von $y' \sin x - y = 1 - \cos x, \quad y(\frac{\pi}{2}) = \pi.$

0) Umschreibung an eine lineare DGL:

$$y' = \frac{y}{\sin x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{y}{\sin x} + \tan\frac{x}{2}.$$

1) Lösung der homogenen DGL

$$y' = \frac{y}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \ln C \quad \Rightarrow \quad y = C\tan\frac{x}{2}.$$

2) Variation der Konstanten:

$$C'(x)\tan\frac{x}{2} = \tan\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad C(x) = x + C_1$$

3) Allgemeine Lösung:

$$y = (x + C_1)\tan\frac{x}{2}.$$

4) Bestimmung der Konstante

$$y(\frac{\pi}{2}) = \pi \quad \Rightarrow \quad (\tan\frac{\pi}{4} = 1) \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\pi}{2}$$

5) Existenzintervall (das $x = \frac{\pi}{2}$ beinhaltet)

$$-\pi < x < \pi$$

3. Bernoulli-DGl

Die DGL

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, 1,$$

wird durch den Ansatz $z = y^{1-\alpha}$ auf die lineare DGl

$$z' = (1-\alpha)\big[a(x)z + b(x)\big]$$

reduziert.

Aufgabe 3.1. Lösung von $y' = 3y - x\sqrt[3]{y}, \quad y(0) = \frac{1}{8}$.

0) Triviale Lösung: $y \equiv 0$.

1a) Bernoulli-DGL mit $\alpha = 1/3 \quad \Rightarrow \quad$ Substitution: $z = y^{2/3}$ $(z \geq 0)$

1b) Lineare DGL:

$$z' = 2z - \frac{2}{3}x, \quad z(0) = \frac{1}{4}.$$

2) Lösung der homogenen DGL:

$$z' = 2z \quad \Rightarrow \quad z = Ce^{2x}.$$

4) Variation der Konstanten:

$$C'(x)e^{2x} = -\frac{2}{3}x \quad \Rightarrow \quad C'(x) = -\frac{2}{3}xe^{-2x} \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{1}{3}e^{-2x}\Big(x + \frac{1}{2}\Big) + c_1.$$

5) Allgemeine Lösung

$$z(x) = C(x)e^{2x} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} + c_1 e^{2x}, \quad \text{wenn } z(x) > 0.$$

6) Bestimmung der Konstante:

$$z(0) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{12}.$$

7) Resubstitution

$$y(x) = \begin{cases} [z(x)]^{3/2} = \left[\frac{1}{12}e^{2x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right]^{3/2}, & \text{wenn } z(x) > 0; \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

8) Da $z'(x) = \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{3} > 0$ und $z(\pm\infty) = \pm\infty$, existiert es genau ein x_*, so daß

$$z(x_*) = \tfrac{1}{12}e^{2x_*} + \tfrac{1}{3}x_* + \tfrac{1}{6} = 0$$

Bemerkung. Wäre die Anfangsbedingung

$$y(x_0) = 0, \quad \text{mit einem beliebigen } x,$$

hätten wir *unendlich* viele Lösungen.

Aufgabe 3.1*. Lösung von $y' = 3x^2(y - y^2), \quad y(0) = 1/2.$

0) Triviale Lösungen sind $y \equiv 0$ und $y \equiv 1$.
1) Bernoulli-DGL mit $\alpha = 2 \quad \Rightarrow \quad$ Substitution $z = 1/y \quad \Rightarrow \quad$ lineare DGL

$$z' = -3x^2 z + 3x^2, \quad z(0) = 2.$$

3) Lösung der homogenen DGL

$$z' = -3x^2 z \quad \Rightarrow \quad z = Ce^{-x^3}$$

4) Variation der Konstante

$$C'(x)e^{-x^3} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad C(x) = e^{x^3} + C_1.$$

5) Allgemeine Lösung

$$z(x) = 1 + C_1 e^{-x^3}.$$

6) Bestimmung der Konstante

$$z(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1.$$

7) Resubstitution

$$y(x) = 1/z(x) = \frac{1}{1 + e^{-x^3}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

V. Zur Diskussion am 16.05.00 (P)

Aufgabe 1: Skalares Fixpunktproblem für $f(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$

Aufgabe 1a. Zeigen Sie, daß f im Intervall $[0,1]$ und im Intervall $[4,5]$ jeweils genau einen Fixpunkt besitzt.

A) Überprufung der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes für $D = [2,3]$

1) D ist offensichtlich abgeschlossen. $\boxed{1}$

2) f ist selbstabbildend auf $[0,1]$:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{2}\sqrt{e} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1. \\ f \text{ ist monoton wachsend, d.h. } f(0) \le f(x) \le f(1) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f([0,1]) \subset [0,1] \qquad \boxed{1}$$

3) f ist kontrahierend auf $[0,1]$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{4}e^{x/2} \quad \text{ist positiv und monoton wachsend:} \\ 0 < f'(0) < f'(1) = \sqrt{e}/4 = 0.412 < 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| \le L := 0.42.$$

$\boxed{1}$

Nach dem Mittelwertsatz gelten dann die folgende Ungleichungen:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \le \max_{\xi \in I} |f'(\xi)||x-y| \le L|x-y|.$$

4) Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat f in $[0,1]$ genau einen Fixpunkt.

B) Überprufung der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes für $D = [4,5]$:

f ist keine Selbstabbildung auf $[4,5]$, da $f(5) = e^{5/2}/2 = 6.09 > 5$. Trick:

$$f(x) := e^{x/2}/2 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\ln(2x) =: g(x), \quad x > 0.$$

2) g ist selbstabbildend auf $[4,5]$, da

$$\left.\begin{array}{l} g(4) = 2\ln 8 = 4.156, \quad g(5) = 2\ln 10 = 4.605 \\ g \text{ ist monoton wachsend} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad g([4,5]) \subset [4,5]. \qquad \boxed{1}$$

3) g ist kontrahierend auf $[4,5]$:

$$\left.\begin{array}{l} g'(x) = \frac{2}{x} \text{ ist positiv und monoton fallend} \\ 0 < g'(5) < g'(4) = 1/2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \max_{x \in [4,5]} |g'(x)| \le L := 0.5. \qquad \boxed{1}$$

4) Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat g bzw. f in $[6,7]$ genau einen Fixpunkt.

Aufgabe 1b. Welche Iterationsvorschrift ist zur Berechnung des zweiten Fixpunktes geeignet?

Nach obigem ist

$$x_{n+1} = 2\ln(2x_n) \quad \text{mit} \quad x_0 \in [4,5]$$

eine geeignete Iterationsfolge (die gegen des Fixpunktes konvergiert). $\boxed{1}$

Aufgabe 1c. 1) Wieviele Schritte ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ sind laut a-priori-Abschätzung höchstens nötig, um den ersten Fixpunkt mit einer Genauigkeit von $\epsilon = 10^{-2}$ zu approximieren?

2) Wieviele Schritte genügen tatsächlich (berechnen Sie mehrere Iterierte und wenden Sie die a-posteriori-Abschätzung an)?

1) Die a-priori Abschätzung für $f(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$ auf $[0,1]$ lautet

$$\begin{aligned} |x^* - x_n| &\le \tfrac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| && \text{mit } x_0 := 0,\ x_1 = 0.5,\ L := 0.42 \\ &\le \tfrac{(0.42)^n}{0.58} \cdot 0.5 && \text{mit einer Genauigkeit } \epsilon = 10^{-2} \\ &\le 10^{-2}. \end{aligned}$$ $\boxed{1}$

Das gibt

$$(0.42)^n \le \frac{0.58}{0.5} \cdot 10^{-2} = 0.0116 \quad \Rightarrow \quad n \ge \frac{\ln(0.0116)}{\ln(0.42)} = 5.137.$$ $\boxed{1}$

Also genügen 6 Schritten.

2) Die a-posteriori Abschätzung ist

$$|x^* - x_n| \le \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|.$$

Nach dem folgenden MAPLE-Program

```
x[1] := 0.;
x[2]:=0.5;
for i from 2 to 6
  while abs(x[i]-x[i-1])*0.42/0.58 > 0.01
  do x[i+1]:=0.5*exp(0.5*x[i])
od;
```

```
x[3] := 0.642
x[4] := 0.689
x[5] := 0.705
x[6] := 0.711
```

genügen 5 Schritten.

Aufgabe 2: Nichtlineares Gleichungssystem

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + \frac{3}{4}) \\ y &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \qquad \text{in} \quad D = \{(x,y) :\ |x|, |y| \le \tfrac{1}{2}\}$$

0) Eine Lösung des Gleichungssystems ist ein Fixpunkt der Funktion $F(x,y)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x^2 - y^2 + \frac{3}{4} \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1}$$

Überprüfung der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes:

1) D ist offensichtlich abgeschlossen. $\boxed{1}$

2) F ist selbstabbildend, da für $|x|, |y| \le \frac{1}{2}$ gilt

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}) \le & \frac{1}{2}(x^2 - y^2 + \frac{3}{4}) & \le \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}) = \frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot(-1) \le & \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 1) & \le \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1) = -\frac{1}{4}, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad F(D) \subset D.$$

3) Kontraktivität von F. Wegen Mittelwertsatz

$$L := \sup_{(x,y)\in D} \|F'(x,y)\| < 1 \quad \Rightarrow \quad F \text{ ist kontrahierend.}$$

Wir haben
$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ x & y \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

Anwendung der l_∞- oder l_1-Norm von F' hilft aber nicht:

$$\sup_{(x,y)\in D} \|F'(x,y)\|_\infty = \sup_{(x,y)\in D} \|F'(x,y)\|_1 = 1.$$

Wir schätzen die l_2-Norm ab:

$$\|F'(x,y)\|_2^2 := \text{der größte Eigenwert von } F'\,F'^*.$$

Es gilt

$$F'\,F'^* = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 & x^2 + y^2 \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{aligned} \det(F'\,F'^* - \lambda I) &= \lambda^2 - 2(x^2 + y^2)\lambda + 4x^2y^2 \\ &= (\lambda - 2x^2)(\lambda - 2y^2) \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\max} = 2\max(x^2, y^2) \le \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\max_{(x,y)\in D} \|F'(x,y)\|_2 = \frac{1}{2} =: L < 1$$

4) Nach dem B. Fixpunktsatz folgt, daß F auf D genau einen Fixpunkt besitzt.

VI. Zur Diskussion am 16.05.00 (I+P)

Lösung des DGL-Systems

Aufgabe 1. Das AWP $Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} Y + \underbrace{\begin{pmatrix} 2e^t \\ \frac{1}{t}e^t \end{pmatrix}}_{F(t)}, \quad Y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e \end{pmatrix}.$

1. Berechnung von Hauptvektoren für A.

1a) Berechnung der Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

1b) Bestimmung der Eigenvektoren [der Hauptvektoren der Stufe 1].

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad (A - I)\, v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gibt keinen anderen Eigenvektor v_2 zu $\lambda = 1$, so daß die Vektoren $\{v_1, v_2\}$ ein linear unabhängiges System in $\mathbb{R}^2$ bilden. Deshalb

1c) Bestimmung $\underbrace{\text{der Hauptvektoren der Stufe 2}}_{\text{[die die Gleichheit } (A-\lambda I)^2 v = 0 \text{ erfüllen]}}$ $\underbrace{\text{durch Lösung } (A - \lambda I)\, v_2 = v_1}_{\text{[Dann gilt } (A-\lambda I)^2 v_2 = (A-\lambda I)\, v_1 = 0]}$

$$(A - I)\, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Berechnung des Fundamentalsystems und einer Wronski-Matrix

$$Y_1 = e^t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \quad Y_2 = e^t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} + te^t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad W(t) = [Y_1, Y_2] = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Für ein Fundamentalsystem zum DGL-System $Y'(t) = AY(t)$ gilt

$$Y_k = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j\, v_k,$$

wobei p die Stufe des Hauptvektors v_k zum Eigenwert λ ist. Daraus folgt

$Y_1(t) = e^{\lambda t} v_1,$ für die Hauptvektoren v_1 der Stufe $p = 1$;
$Y_2(t) = e^{\lambda t}(v_2 + t v_1),$ für die Hauptvektoren v_2 der Stufe $p = 2$.

3) Spezielle Lösung des Systems (Variation der Konstanten) (fällt aus, wenn $F(t) \equiv 0$ ist).

$$Y_s' = AY_s + F, \quad Y_s(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_s(t) = W(t) \int_{t_0}^{t} \underbrace{W^{-1}(x)F(x)}_{c'(x)} \, dt.$$

3a) Berechnen von $c'(t) = W^{-1}(t)F(t)$ als Lösung des Systems $W(t)c'(t) = F(t)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^t & te^t & 2e^t \\ 0 & e^t & e^t/t \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad c'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/t \end{pmatrix}.$$

2b) Integrieren: $\quad c(t) = \displaystyle\int_1^t c'(x)\, dx = \begin{pmatrix} t-1 \\ \ln t \end{pmatrix}.$

3) Die allgemeine Lösung: $\quad Y(t) = W(t) \Big[c(t) + c \Big] \qquad (\text{mit } c(t_0) = 0).$

4) Bestimmung von c als Lösung des Systems $W(t_0)\, c = Y_0$ (fällt aus, wenn $Y_0 = 0$ ist).

$$\left(\begin{array}{cc|c} e & e & 0 \\ 0 & e & -e \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5) Endliches Berechnen von $Y(t)$:

$$\begin{aligned} Y(t) = W(t) \Big[c(t) + c \Big] \quad &= \quad \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (t-1)+1 \\ \ln t - 1 \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} te^t + te^t\,(\ln t - 1) \\ e^t\,(\ln t - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t \ln t \\ e^t\,(\ln t - 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2a*. Das AWP $Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}}_{A} Y, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

1) Berechnung der Eigenwerte von A:

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 5 & -4-\lambda \end{pmatrix} = -(4-\lambda)(4+\lambda) + 15 = \lambda^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

2) Bestimmung der Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3) Berechnung des Fundamentalsystems und einer Wronski-Matrix:

$$y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad W(t) = \begin{pmatrix} e^t & 3e^{-t} \\ e^t & 5e^{-t} \end{pmatrix}.$$

4) Die allgemeine Lösung: $Y(t) = W(t)\, c$

5) Bestimmung der Konstante als Lösung von $W(t_0)\, c = Y_0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2b*. Das AWP $Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}}_{A} Y + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4e^t \end{pmatrix}}_{F(t)}, \quad Y(0) = 0.$

4′) Spezielle Lösung des Systems (Variation der Konstanten)

$$Y_s' = AY_s + F, \quad Y_s(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_s(t) = W(t) \int_{t_0}^{t} \underbrace{W^{-1}(x) F(x)}_{c'(x)}\, dt.$$

$4a'$) Berechnen von $c'(t) = W^{-1}(t)F(t)$ als Lösung des Systems $W(t)c'(t) = F(t)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^t & 3e^{-t} & 0 \\ e^t & 5e^{-t} & 4e^t \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} e^t & 3e^{-t} & 0 \\ 0 & 2e^{-t} & 4e^t \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad c'(t) = \begin{pmatrix} -6 \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

$4b'$) Integrieren: $c(t) = \int_0^t c'(x)\, dx = \begin{pmatrix} -6t \\ e^{2t} - 1 \end{pmatrix}.$

5′) Berechnen von $Y_s(t)$:

$$Y(t) = W(t)\, c(t) = \begin{pmatrix} e^t & 3e^{-t} \\ e^t & 5e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6t \\ e^{2t} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6te^t + 3e^t - 3e^{-t} \\ -6te^t + 5e^t - 5e^{-t} \end{pmatrix}.$$

VII. Zur Diskussion am 23.05.00 (I+P)

Aufgabe 1: Fund.-System zur DGL n-ter Ordnung

1a) Das charakteristische Polynom zu $L(y) = y'' - 5y' + 6y = 0$ ist

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2. \qquad \boxed{1}$$

Das Fund.-System ist also $\qquad S = \{e^{3t}, e^{2t}\}$.

1b) Das charakteristische Polynom zu $L(y) = y'' + 2y' + y$ ist

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1. \qquad \boxed{1}$$

Das Fund.-System ist also $\qquad S = \{e^{-t}, te^{-t}\}$.

1c) Das charakteristische Polynom zu $L(y) = y'' + y$ ist

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = +i, \quad \lambda_2 = -i \qquad \boxed{1}$$

Das Fund.-System ist also $\qquad S = \{\cos t, \sin t\}$.

1d)* Das charakteristische Polynom zu $L(y) = y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ ist

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -i. \qquad \boxed{1}$$

Das Fund.-System ist also $\qquad S = \{\cos t, t\cos t, \sin t, t\sin t\}$

1e)* Das charakteristische Polynom zu $L(y) = y'' - 2y' + 2y$ ist

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{12} = 1 \pm i \qquad \boxed{1}$$

Das Fund.-System ist also $\qquad S = \{e^t \cos t, e^t \sin t\}$.

Zur Erinnnerung: $\quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{12} = \frac{\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - ac}}{a}$

1f)* Das charakteristische Polynom zu $L(y) = y^{(4)} - y'''$ ist

$$\lambda^4 - \lambda^3 = \lambda^3(\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 1. \qquad \boxed{1}$$

Das Fund.-System ist also $\qquad S = \{1, t, t^2, e^t\}$.

Aufgabe 2: Das AWP $y'' - y = -2t, \quad y(0) = y'(0) = 0$

(Lösung mittels des äquivalenten Systems)

1) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = +1. \qquad \boxed{1}$$

2a) Ein Fundamentalsystem: $\{e^t, e^{-t}\}$ $\boxed{1}$

2b) Wronski-Matrix W und die rechte Seite F des äquivalenten Systems

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

3) Allgemeine Lösung $y_A(t) = W(t)\,c$

Wegen der Nullanfangsbedingungen $y(t_0) = 0$ braucht man keine Berechnungen dazu

4) Spezielle Lösung des Systems: $Y_s(t) = \underbrace{W(t)c(t)}_{\text{Variation der Konst.}} = W(t)\int_{t_0}^{t} \underbrace{W^{-1}(x)F(x)}_{c'(x)}\,dx$

Variation der Konstante (d.h. die Substitution $Y(t) = W(t)c(t)$ im ursprünglichen DGL-System $Y'(t) = AY(t) + F(t)$) ergibt:

$$W(t)c'(t) = F(t) \quad \Rightarrow \quad c'(t) = W^{-1}(t)F(t) \quad \Rightarrow \quad c(t) = \int_{t_0}^{t} W^{-1}(x)F(x)\,dx$$

4a) Berechnen von $c'(x)$ als Lösung $W(x)c'(x) = F(x)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^t & e^{-t} & 0 \\ e^t & -e^{-t} & -2t \end{array}\right) \overset{(2)-(1)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & -2e^{-t} & -2t \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad c'(t) = \begin{pmatrix} -te^{-t} \\ te^t \end{pmatrix} \qquad \boxed{1}$$

4b) (Partielles) Integrieren: $$c(t) = \int_0^t c'(x)\,dx = \begin{pmatrix} (t+1)e^{-t} - 1 \\ (t-1)e^t + 1 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{2}$$

5) Lösung der ursprünglichen DGL:

$$\begin{aligned} y_s(t) &= [Y_s(x)]_1 = [W(t)\,c(t)]_1 = (e^t, e^{-t}) \begin{pmatrix} (t+1)e^{-t} - 1 \\ (t-1)e^t + 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1} \\ &= [(t+1) - e^t] + [(t-1) + e^{-t}] = -e^t + e^{-t} + 2t. \end{aligned}$$

Die spezielle Lösung y_s der ursprünglichen DGL ist die 1-ste Komponente der speziellen Lösung Y_s des äquivalenten Systems:

$$y_s(x) := [Y_s(x)]_1 \quad (= \text{die 1-ste Komponente von } Y_s(x)), \qquad y_s(t_0) = y_s'(t_0) = 0.$$

Wegen der Nullanfangsbedingungen des AWP's ist dieses y_s die geforderte Lösung.

Aufgabe 3: Das AWP $y'' - y = -2t, \quad y(0) = y'(0) = 0$

(Lösung durch den Ansatz der speziellen Lösung)

1) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$p_L(\lambda) := \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1. \qquad \boxed{1}$$

2a) Ein Fundamentalsystem: $\{e^t, e^{-t}\}$ $\boxed{1}$

3a) Spezielle Lösung des Systems: $y_s(t) = at + b$

Die rechte Seite $f(t) = -2t$ hat die Form $r(t)e^{\lambda t}$, wobei $r(t) = -2t$ ein Polynom vom Grad 1 ist und $\lambda = 0$ nicht zu den Nullstellen des char. Polynoms p_L gehört. Deshalb hat eine spezielle Lösung die Form $y_s(t) = q(t)e^{\lambda t}$, wobei $q(t)$ ein Polynom vom Grad $1 + 0 = 1$ ist, also $y_s(t) = at + b$.

3b) Bestimmung der Koeffizienten a, b:

$$y_s(t) = at + b, \qquad y_s''(t) \equiv 0$$
$$L(y_s) := y_s'' - y_s = -(at + b) =: -2t \quad \Rightarrow \quad a = 2, \quad b = 0. \qquad \boxed{1}$$

4a) Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(t) = y_A(t) + y_s(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + 2t.$$

4b) Bestimmung der Koeffizienten c_i entspechend den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} + 2t, \qquad & y(0) &= 0; \\ y'(t) &= c_1 e^t - c_2 e^{-t} + 2, \qquad & y'(0) &= 0; \end{aligned} \qquad \boxed{1}$$

d.h. Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 + 2 = 0 \end{cases}$$

oder

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \overset{(2)-(1)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

4c) Die Lösung des AWP's ist also

$$y(t) = -e^t + e^{-t} + 2t.$$

Aufgabe 4*

Das AWP $\quad y'' + y = 4\sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0$

(Lösung mittels des äquivalenten Systems)

1) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i. \qquad \boxed{1}$$

2a) Ein Fundamentalsystem: $\quad \{\cos t, \sin t\}$ $\qquad \boxed{1}$

2b) Wronski-Matrix W und die rechte Seite F des äquivalenten Systems

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

3) Allgemeine Lösung $y_A(t) = W(t)\,c$

4) Spezielle Lösung des Systems: $Y_s(t) = W(t)\int_{t_0}^t \underbrace{W^{-1}(x)F(x)}_{c'(x)}\,dx$

4a) Berechnen von $c'(x)$ als Lösung $W(x)c'(x) = F(x)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 4\sin t \end{array}\right) \overset{(2)\cdot\cos t + (1)\cdot\sin t}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & \cos^2 t + \sin^2 t = 1 & 4\sin t\cos t \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad c'(t) = \begin{pmatrix} -4\sin^2 t \\ 4\sin t\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos 2t - 2 \\ 2\sin 2t \end{pmatrix} \qquad \boxed{1}$$

4b) Integrieren: $\qquad c(t) = \int_0^t c'(x)\,dx = \begin{pmatrix} \sin 2t - 2t \\ -\cos 2t + 1 \end{pmatrix}.$ $\qquad \boxed{2}$

5) Lösung der ursprünglichen DGL:

$$\begin{aligned} y_s(t) &= [Y_s(x)]_1 = [W(t)\,c(t)]_1 = (\cos t, \sin t)\begin{pmatrix} \sin 2t - 2t \\ -\cos 2t + 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\cos t\sin 2t - \sin t\cos 2t}_{\sin(2t-t)=\sin t} - 2t\cos t + \sin t = -2t\cos t + 2\sin t. \end{aligned} \qquad \boxed{1}$$

Aufgabe 5*: Das AWP $\quad y'' + y = 4\sin t, \quad y(0) = y'(0) = 0$

(Lösung durch den Ansatz der speziellen Lösung)

1) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$p_L(\lambda) := \lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i. \qquad \boxed{1}$$

2a) Ein Fundamentalsystem: $\quad \{\cos t, \sin t\}$ $\boxed{1}$

3a) Spezielle Lösung des Systems: $\quad y_s(t) = t(a\cos t + b\sin t)$

Die rechte Seite $f(t) = 4\sin t$ hat die Form $r(t)\Im(e^{\lambda t})$, wobei $r(t) = 4$ ein Polynom vom Grad 0 ist und $\lambda = \lambda_{12}$ die 1-fache komplexe Nullstelle des char. Polynoms p_L ist. Deshalb hat eine spezielle Lösung die Form

$$y_s(t) = q(t)\left[a\Im(e^{\lambda t}) + b\Re(e^{\lambda t}\right],$$

wobei $q(t)$ ein Polynom vom Grad $0 + 1 = 1$ ist, also

$$y_s(t) = (t + c)(a\cos t + b\sin t).$$

Da $L(a\cos t + b\sin t) \equiv 0$ ist, kann man nach einer Lösung der Form

$$y_s(t) = t(a\cos t + b\sin t)$$

suchen.

3b) Bestimmung der Koeffizienten a, b:

$$y_s(t) = at\cos t + bt\sin t, \qquad y_s''(t) = a(-t\cos t - 2\sin t) + b(-t\sin t + 2\cos t)$$
$$L(y_s) := y_s'' + y_s = -2a\sin t + 2b\cos t =: 4\sin t \quad \Rightarrow \quad a = -2, \quad b = 0. \qquad \boxed{1}$$

4a) Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(t) = y_a(t) + y_s(t) = c_1\cos t + c_2\sin t - 2t\cos t.$$

4b) Bestimmung der Koeffizienten c_i entspechend den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1\cos t + c_2\sin t - 2t\cos t, & y(0) &= 0; \\ y'(t) &= -c_1\sin t + c_2\cos t - (2\cos t - 2t\sin t), & y'(0) &= 0; \end{aligned} \qquad \boxed{1}$$

d.h.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

4c) Die Lösung des AWP's ist also

$$y(t) = 2\sin t - 2t\cos t.$$

VIII. Zur Diskussion am 30.05.00 (I+P)

Aufgabe 1: Euler-Cauchy-Verfahren

zur DGL $\begin{cases} y'' - 2xy' + 2y = 0, \\ y(1) = y'(1) = 1. \end{cases}$

Näherungswerte für $y(2), y'(2)$ (mit Schrittweite $h = 1$).

1) Transformation auf ein System 1. Ordnung:

$$z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}, \quad z^{(0)} = z(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das äquivalente System ist $z'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ 2xz_2(x) - 2z_1(x) \end{pmatrix} =: f(x, z(x))$.

a.) Euler-Cauchy-Verfahren:

$$z^{(n+1)} = z^{(n)} + hf(t_n, z^{(n)}).$$

Wir starten bei $n = 0$, $t_0 = 1$, $h = 1$ und setzen $z^{(0)} = z(1)$:

$$z^{(1)} = z^{(0)} + hf(t_0, z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Die Näherungswerte sind also $\begin{pmatrix} y(2) \\ y'(2) \end{pmatrix} = z^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Allgemein ($t_n = n + 1$, $h = 1$)

$$z^{(n+1)} = z^{(n)} + hf(t_n, z^{(n)}) = \begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cdot (n+1) \cdot 1 - 2 \cdot (n+1) = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also gilt für die Näherung für $y^{(k)}(n)$

$$\begin{array}{rcccl} y(n) & \sim & z_1^{(n-1)} & = & n, \\ y'(n) & \sim & z_2^{(n-1)} & = & 1, \\ y''(n) & \sim & 2 \cdot n \cdot z_2^{(n-1)} - 2z_1^{(n-1)} & = & 0, \end{array}$$

und man sieht, daß unsere Näherung

$$y(x) \sim x$$

ist, was tatsächlich die exakte Lösung ist.

2b. Rückwärtiges Euler-Cauchy-Verfahren:

$$z^{(n+1)} = z^{(n)} + hf(t_{n+1}, z^{(n+1)}).$$

Wir starten bei $t_0 = 1$, $t_1 = 2$, $h = 1$ und setzen $z^{(0)} = z(1) = (1,1)^T$.

$$\begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} z_2^{(1)} \\ 2\,t_1 z_2^{(1)} - 2\,z_1^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2^{(1)} \\ 2 \cdot 2 \cdot z_2^{(1)} - 2\,z_1^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Um $z^{(1)}$ zu bestimmen, muß ein Gleichungssystem gelöst werden, und zwar

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & z_1^{(1)} \\ 2 & -3 & z_2^{(1)} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{(2)-2\cdot(1)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & z_1^{(1)} \\ 0 & -1 & z_2^{(1)} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad z^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemein (mit $h = 1$, $t_{n+1} = n + 2$):

$$\begin{pmatrix} z_1^{(n+1)} \\ z_2^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(n)} \\ z_2^{(n)} \end{pmatrix} + h \underbrace{\begin{pmatrix} z_2^{(n+1)} \\ 2\,t_{n+1} z_2^{(n+1)} - 2\,z_1^{(n+1)} \end{pmatrix}}_{f(t_{n+1}, z^{(n+1)})}.$$

Pro Schritt muß ein Gleichungssystem gelöst werden, und zwar

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & z_1^{(n)} \\ 2 & -(2n+3) & z_2^{(n)} \end{array}\right)$$

oder

$$\overset{(2)-2\cdot(1)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & z_1^{(n)} \\ 0 & -(2n+1) & z_2^{(n)} - 2z_1^{(n)} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1^{(n+1)} \\ z_2^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(2n+3)z_1^{(n)} - z_2^{(n)}}{2n+1} \\ \frac{2z_1^{(n)} - z_2^{(n)}}{2n+1} \end{pmatrix}.$$

Nun erhält man

$$z^{(0)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad z^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad z^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad z^{(n)} = \begin{pmatrix} n+1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h. dieselbe Näherung wie mit dem expliziten Euler-Cauchy-Verfahren, die tatsächlich die exakte Lösung ist.

Bemerkung. Das rückwärtige Euler-Cauchy Verfahren ist im allgemeinen besser als das explizite Verfahren. Daß in unserer Aufgabe beide Verfahren diesselbe Näherung geliefert haben, ist eine Ausnahme.

Aufgabe 2*: Runge-Kutta-Verfahren zur $y' = y - t, \quad y(0) = 1.$
Näherungswert für $y(1)$ zur Schrittweite $h = 1$.

Hier sind

$$t_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad h = 1, \quad f(t, y) = y - t.$$

Also haben wir

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_0, y_0) && = f(0, 1) && = 1, \\
k_2 &= f(t_0 + \tfrac{1}{2}h,\, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_1) && = f(0 + \tfrac{1}{2}, 1 + \tfrac{1}{2}) && = 1, \\
k_3 &= f(t_0 + \tfrac{1}{2}h,\, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_2) && = k_2 && = 1, \\
k_4 &= f(t_0 + h,\, y_0 + hk_3) && = f(0 + 1, 1 + 1) && = 1,
\end{aligned}$$

so daß

$$k = \frac{1}{6}\, h\, (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,$$

und

$$y(1) = y_1 = y_0 + k = 2.$$

Bemerkung. Die exakte Lösung ist $y(t) = t + 1$.

Aufgabe 3*: Picard-Iteration zur $y' = y - x, \quad y(0) = 1.$ Berechnung einer lokalen Lösung.

Die Picard-Iteration lautet

$$y_0(x) = y_0, \quad y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_k(t)\right)\, dt.$$

Hier haben wir

$$f(t,y) = y - t, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt \\ &= 1 + \int_0^x (1 - t)\, dt = 1 + x - \frac{1}{2}x^2, \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1)\, dt \\ &= 1 + \int_0^x (1 - \frac{1}{2}t^2)\, dt = 1 + x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3, \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1})\, dt \\ &= 1 + \int_0^x (1 - \frac{1}{n!}t^n)\, dt = 1 + x - \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}. \end{aligned}$$

Für jedes feste x haben wir

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = 1 + x$$

und nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist diese Konvergenz in einer Umgebung von x_0 gleichmäßig, so daß

$$y(x) = 1 + x$$

eine lokale Lösung des AWP's ist.

X. Zur Diskussion am 20.06.99 (P+I).
Newton-Verfahren

Aufgabe 1: Newton-Verfahren.

Näherungslösung der nichtlinearen Gleichung $x^2 = 5$

0) Newton-Verfahren für die numerische Berechnung von Nullstellen von f:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

1) Wir haben

$$f(x) := x^2 - 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 5}{2x_n}$$

und nehmen

$$x_0 = 3.0$$

2) Das MAPLE-program gibt

```
> x[0] := 3.0; x[1] := x[0]-(x[0]^2-5)/2/x[0];
```

$$x[0] = 3.0$$

$$x[1] = \mathbf{2}.333333334$$

```
> for i from 1 to 10 while abs (x[i]-x[i-1]) > 10^(-9) do
    x[i+1]:=x[i]-(x[i]^2-5)/2/x[i]
  od;
```

$$x[2] = \mathbf{2.23}8095238$$

$$x[3] = \mathbf{2.236068}8896$$

$$x[4] = \mathbf{2.236067977}$$

$$x[5] = \mathbf{2.236067977}$$

Das Newton-Verfahren hat i.a. die Konvergenzordnung 2, was bedeutet, dass bei jedem Schritt die Anzahl der genauen Stellen verdoppelt wird.

Geometrische Interpretation. Die nächste Näherung x_{n+1} wird bestimmt als Nullstelle der Tangente an die Funktion im Punkt $f(x_n)$. (Skizze).

Vergleich mit der Banach'schen Iteration. Die Newton'sche Iteration ist eine Banach'sche Iteration:

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \quad \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Bemerkung. Das Newton-Verfahren benötigt einen guten Startwert, da es nur lokal konvergent ist. Z.B. gilt für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} x_n (x_n^2 + 1) = \frac{1}{2} x_n (1 - x_n^2).$$

1) für $|x_0| < \sqrt{3}$ konvergiert die Folge $\{x_n\}$ gegen $x = 0$;

2) für $|x_0| = \sqrt{3}$ alterniert die Folge $\{x_n\}$ zwischen $\pm\sqrt{3}$;

3) für $|x_0| > \sqrt{3}$ divergiert die Folge $\{x_n\}$ gegen $x = \pm\infty$

   und in diesem Fall kann man z.B. das gedämpte Newton-Verfahren benutzen.

Aufgabe 2. Newton-Verfahren.

Näherungslösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} 2x^3 - 3y^2 &= -1 \\ 3x^2 - 4y^3 &= 1 \end{cases} \quad \text{mit dem Startwert } (1,1)$$

1) Suche nach einer Nullstelle der Funktion $F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^3 - 3y^2 + 1 \\ 3x^2 - 4y^3 - 1 \end{pmatrix}$

2) Newton-Verfahren: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(n)} - \left(F'[(x,y)^{(n)}]\right)^{-1} F[(x,y)^{(n)}].$

2a) Äquivalente Formulierung:

$$F'[(x,y)^{(n)}] \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}^{(n)} = F[(x,y)^{(n)}], \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(n)} - \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}^{(n)}.$$

Dadurch wird die Invertierung von $F'[(x,y)^n]$ vermieden und pro Schritt nur ein Gleichungssystem gelöst.

3) Jacobi Matrix: $F'(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 & -6y \\ 6x & -12y^2 \end{pmatrix}$

1. Schritt.

a) Berechnung von $F(z^0)$, $F'(z^0)$

$$F(1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad F'(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}.$$

b) Lösung des Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -6 & 0 \\ 6 & -12 & -2 \end{array}\right) \overset{(2)-(1)}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x^{(0)} \\ \Delta y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

c) Die nächste Näherung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3*: LR–Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 14 & 17 & 35 \end{pmatrix}$

Wir haben

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 14 & 17 & 35 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (2)-(1)\cdot(\mathbf{-2}) \\ (3)-(1)\cdot\mathbf{7} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \mathbf{-2} & 5 & 4 \\ \mathbf{7} & 10 & 28 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (3)-(2)\cdot\mathbf{2} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \mathbf{-2} & 5 & 4 \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} & 20 \end{pmatrix}$$

Also gilt

$$A = LR$$

mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Liegt die LR–Zerlegung einer Matrix A vor, so löst man das System

$$Ax = b$$

zu gegebener rechter Seite b durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad LRx = b \quad \Leftrightarrow \quad L\underbrace{Rx}_{y} = b.$$

Man löst

$$Ly = b \qquad \text{durch Vorwärtseinsetzen}$$

und dann

$$Rx = y \qquad \text{durch Rückwärtseinsetzen}$$

Z.B. die Gleichung

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}$$

löst man folgendermaßen.

1) Vorwärtseinsetzen: $Ly = b$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 1 & 13 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 + 2\cdot 3 = 6 \\ 13 - 7\cdot 3 - 2\cdot 6 = -20 \end{pmatrix}.$$

2) Rückwärtseinsetzen: $Rx = y$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 20 & -20 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2)/2 = 1 \\ (6 - 4 \cdot (-1))/5 = 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Schließlich ist

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

die Lösung von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 14 & 17 & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

XI. Zur Diskussion am 27.07.00 (P+I)

Aufgabe 1. Anzahl der Lösungen von $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6+\alpha \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 13+\beta \end{pmatrix}$

Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6+\alpha & 13+\beta \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & \alpha & 1+\beta \end{array}\right)$$

Fall 1: $\alpha \neq 0$. Es ex. genau eine Lösung $x = \begin{pmatrix} 4 - 2(1+\beta)/\alpha \\ (1+\beta)/\alpha \end{pmatrix}$.

Fall 2: $\alpha = 0$, $\beta \neq -1$. Es ex. keine Lösung (der Gleichung $0 \cdot x = 1 + \beta$)

Fall 3: $\alpha = 0$, $\beta = -1$. Es ex. unendlich viele Lösungen

(die die Gleichung $x_1 + 2x_2 = 4$ erfüllen):

$$x = \begin{pmatrix} 4 - 2\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2: Cholesky-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 3 & 3a & 9 \\ 3a & 3a^2+a & 10a \\ 9 & 10a & a+31 \end{pmatrix}$;

Bestimmung (abhängig von a), wenn A positiv definit ist

LR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3a & 9 \\ 3a & 3a^2+a & 10a \\ 9 & 10a & a+31 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3a & 9 \\ \mathbf{a} & a & a \\ \mathbf{3} & a & a+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3a & 9 \\ \mathbf{a} & a & a \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & 4 \end{pmatrix}$$

Also gilt

$$A = LR = LDL^T$$

mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{a} & 1 & 0 \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = DL^T = \begin{pmatrix} 3 & 3a & 9 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D = \operatorname{diag}(3, a, 4)$$

1) $a = 0$: A ist singulär (denn $\det A = \det D = 12a = 0$ ist)

2) $a \neq 0$: A ist regulär (denn $\det A = \det D = 12a \neq 0$ ist)

2a) $a > 0$: A ist positiv definit (da alle Diagonalelemente von D positiv sind)

2b) $a < 0$: A ist indefinit (da nicht alle Diagonalelemente von D das gleiche Vorzeichen haben)

Wenn eine Matrix A symmetrisch ist und die LR-Zerlegung von A durchführbar ist, gilt die Zerlegung:

$$A = LR = LDL^T,$$

die Cholesky-Zerlegung heißt. Hier ist D die Diagonalmatrix, die mit den Diagonalelementen von R übereinstimmt. In diesem Fall ist A genau dann positiv (negativ) definit, wenn alle Diagonalelemente von D positiv (negativ) sind.

Man bekommt die Cholesky-Zerlegung durch die ganz normale LR-Zerlegung. Es gibt eine Modifikation des LR-Algorithmus, die aufgrund der Symmetrie etwa halb so viele Operationen braucht, aber dies macht nur Sinn für relativ größe Matrizen. Dies wird hier nicht weiter vertieft.

Wenn A eine symmetrische positiv definite Matrix ist, dann ist die LR-Zerlegung immer durchführbar, und (mit $C := L\sqrt{D}$) gilt die Zerlegung

$$A = CC^T,$$

die auch Cholesky-Zerlegung heißt und die hier auch nicht vertieft wird.

Aufgabe 3: Lösung der Gleichung $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 3 & 4 & 10 \\ 9 & 10 & 31 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$

(die oben gegebene Matrix A mit $a = 1$).

Man löst die Gleichung $Ax = b$ als

$$Ax = L \underbrace{Rx}_{y} = b \quad \Rightarrow \quad Ly = b, \quad Rx = y.$$

Wir haben

$$Ly = b \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 13 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

und

$$Rx = y \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4* (für Physiker). Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & 21 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -14 \\ -15 \\ 78 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von A und lösen Sie die Gleichung $Ax = b$.

Lösung 4. Wir haben

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & 21 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ \mathbf{3} & 3 & 6 \\ \mathbf{-1} & 6 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ \mathbf{3} & 3 & 6 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & 2 \end{pmatrix}}_{R}$$

Also gilt

$$A = LDL^T$$

mit

$$D = \operatorname{diag}(2,3,2), \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man löst die Gleichung $Ax = b$ als

$$Ax = L\underbrace{DL^T x}_{y} = b \quad \Rightarrow \quad Ly = b, \quad L^T x = D^{-1}y.$$

Wir haben

$$Ly = b \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -14 \\ 3 & 1 & 0 & -15 \\ -1 & 2 & 1 & 78 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -15 + 3 \cdot 14 = 27 \\ 78 - 2 \cdot 27 - 14 = 10 \end{pmatrix},$$

und

$$D^{-1}y = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix},$$

und

$$L^T x = D^{-1}y \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

5^*. LR-Zerlegung mit Permutationsmatrizen (für Physiker)

Aufgabe 5. Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 26 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 32 \end{pmatrix},$$

Da A regulär ist, existiert eine LR-Zerlegung von PA mit einer geeigneten Permutationsmatrix P.

a) Berechnen Sie L, R und P;

b) Lösen Sie $Ax^{(i)} = b^{(i)}$.

Lösung 5.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \mathbf{0} & 2 & 3 \\ \mathbf{2} & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Also gilt

$$PA = LR$$

mit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Weiter haben wir

$$Pb^{(1)} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 26 \end{pmatrix}, \quad Pb^{(2)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 32 \end{pmatrix},$$

und

$$Ly^{(i)} = Pb^{(i)} \quad \Rightarrow \quad y^{(1)} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 36 \end{pmatrix}, \quad y^{(2)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$Rx^{(i)} = y^{(i)} \quad \Rightarrow \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

XII. Zur Diskussion am 4.07.00 (P+I)

Aufgabe 1: Polynominterpolation der Daten

x_i	-3	-1	1
$\sin\frac{\pi}{6}x_i$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Interpolationsfehler in $x = 0$

Darstellung nach Lagrange

Darstellung nach Newton (mit der zusätzlichen Stützstelle)

1) Interpolationsfehler:

$$|p(x) - f(x)| \le \frac{|f'''(\xi)|}{3!}|\omega(x)|, \qquad \omega(x) := (x+3)(x+1)(x-1).$$

$$|f'''(\xi)| := |(\sin\tfrac{\pi}{6}\xi)^{(3)}| \le (\pi/6)^3, \quad |\omega(0)| = 3 \quad \Rightarrow \quad |f(0) - p(0)| \le \tfrac{3}{6}(\pi/6)^3.$$

2a) Die Lagrangschen Grundpolynome:

$$l_{-3}(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{8}, \quad l_{-1}(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{-4}, \quad l_1(x) = \frac{(x+3)(x+1)}{8}$$

2b) Die Lagrange-Form:

$$p(x) = \sum_{i+1}^{3} f(t_i)l_{t_i}(x) = (-1)\frac{(x+1)(x-1)}{8} + (-\tfrac{1}{2})\frac{(x+3)(x-1)}{-4} + \tfrac{1}{2}\frac{(x+3)(x+1)}{8}.$$

3a) Dividierte Differenzen:

$$\begin{array}{r|llll}
-3 & -1 & & \\
 & & \frac{(-1/2)-(-1)}{(-1)-(-3)} = \frac{1}{4} & \\
-1 & -\frac{1}{2} & & \frac{1/2-1/4}{1-(-3)} = \frac{1}{16} \\
 & & \frac{1/2-(-1/2)}{1-(-1)} = \frac{1}{2} & \\
1 & \frac{1}{2} & &
\end{array}$$

3b) Die Newton-Form

$$p(x) = -1 + \frac{1}{4}(x+3) + \frac{1}{16}(x+3)(x+1)$$

4a) Dividierte Differenzen mit der zusätzlichen Stützstelle $x_4 = 0$:

$$
\begin{array}{r|ccccc}
-3 & -1 & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \\
-1 & -\frac{1}{2} & & & \frac{1}{16} & \\
 & & & \frac{1}{2} & \dots\vdots & \frac{0-1/16}{0-(-3)} = -\frac{1}{48} \\
1 & \frac{1}{2} & \dots\dots\dots\vdots & & 0 & \\
\dots & \dots\vdots & \frac{0-1/2}{0-1} = \frac{1}{2} & & & \\
0 & 0 & & & &
\end{array}
$$

4b) Die Newton-Form des neuen Interpolationspolynoms:

$$q(x) = p(x) - \frac{1}{48}(x+3)(x+1)(x-1)$$

Aufgabe 3*: Polynominterpolation der Daten

x_i	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x_i$	-1	0	1

Interpolationsfehler auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Darstellung nach Newton (mit der zusätzlichen Stützstelle)

1) Interpolationsfehler:

$$|p(x) - f(x)| \leq \frac{|f'''(\xi)|}{6} |x(x - \tfrac{\pi}{2})(x + \tfrac{\pi}{2})|. \qquad \boxed{1}$$

Bestimmung des Maximums von

$$\omega(x) = x(x - \tfrac{\pi}{2})(x + \tfrac{\pi}{2}) = x^3 - \tfrac{\pi^2}{4}x.$$

Wir haben

$$\omega'(x) = 3x^2 - \frac{\pi^2}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{12} = \pm\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Also gilt auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ wegen $\omega(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$

$$|\omega(x)| \leq |\omega(x_{12})| = |\tfrac{\pi^3}{8\cdot 3\sqrt{3}} - \tfrac{\pi^3}{8\sqrt{3}}| = \tfrac{\pi^3}{4\cdot 3\sqrt{3}}. \qquad \boxed{1}$$

Da

$$|f'''(\xi)| := |\cos\xi| \leq 1 \qquad \boxed{1}$$

ist, gilt die Abschätzung

$$|p(x) - f(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi^3}{12\sqrt{3}} = \frac{\pi^3}{72\sqrt{3}}.$$

2a) Dividierte Differenzen (mit der zusätzlichen Stützstelle $\frac{\pi}{6}$):

$$
\begin{array}{c|ccccc}
-\frac{\pi}{2} & \mathbf{-1} & & & & \\
 & & \mathbf{\frac{2}{\pi}} & & & \\
0 & 0 & & \mathbf{0} & & \\
 & & \frac{2}{\pi} & \ldots\ldots\ldots\ldots\vdots & -\frac{3}{\pi^2}\frac{3}{2\pi} = -\mathbf{\frac{9}{2\pi^3}} & \boxed{1} \\
\frac{\pi}{2} & 1 \;\ldots\ldots\ldots\vdots & & -\frac{1}{2\pi}\frac{6}{\pi} = -\frac{3}{\pi^2} & & \\
\ldots & \ldots\vdots & \frac{1}{2}\frac{3}{\pi} = \frac{3}{2\pi} & & & \\
\frac{\pi}{6} & \frac{1}{2} & & & &
\end{array}
$$

2b) Newton-Form:

$$p(x) = -1 + \tfrac{2}{\pi}(x + \tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{2}{\pi}x. \qquad \boxed{1}$$

2c) Die Newton-Form des neuen Interpolationspolynoms:

$$q(x) = \tfrac{2}{\pi}x - \tfrac{9}{2\pi^3}x(x^2 - \tfrac{\pi^2}{4}) = \tfrac{25}{8\pi}x - \tfrac{9}{2\pi^3}x^3. \qquad \boxed{1}$$

Man kann auch sofort schreiben

$$q(x) = p(x) + cx(x^2 - \frac{\pi^2}{4}) = \frac{2}{\pi}x + cx(x^2 - \frac{\pi^2}{4})$$

und die Konstante c aus die Gleichheit

$$q(\tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{1}{2}$$

bestimmen.

XIII**. Zur Diskussion am 4.07.00 (P+I)

Aufgabe 1: Approximation der Daten

t_i	-1	0	1
y_i	a	b	c

im Sinne der kleinsten Fehlerquadratmethode durch $p(x) = m + nx$

Für welche a, b, c ist die Fehlerquadratsumme minimal?

Sei $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und rang $A = n$. Die Normallösung x_* der überbestimmten Gleichung

$$Ax = b,$$

ist die Lösung der Normalgleichung

$$A^T Ax = A^T b.$$

Die Normallösung x_* erfüllt die Gleichheit

$$\|Ax_* - b\|_2 = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2,$$

d.h. dies ist eine Näherungslösung der Gleichung $Ax = b$ im Sinne der kleinsten Fehlerquadratmethode.

1) Gesucht ist ein Polynom $p(x) = m + nx$, so daß $\sum_{i=1}^{3} [p(t_i) - y_i]^2$ minimal ist.

1a) Die Koeffizienten m, n werden als Normallösung des überbestimmten Gleichungssystems $p(t_i) = y_i$ gefunden, d.h. des Systems

$$\begin{aligned} m - n &= a, \\ m &= b, \\ m + n &= c, \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{y}. \qquad \boxed{1}$$

1b) Man sucht die Normallösung, d.h. die Lösung der Gleichung

$$A^T Ax = A^T y. \qquad \boxed{1}$$

Wir haben

$$A^T Ax = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c \\ c - a \end{pmatrix} = A^T y, \qquad \boxed{1}$$

woraus

$$m = \frac{a + b + c}{3}, \quad n = \frac{c - a}{2} \quad \Rightarrow \quad p(x) = \frac{a + b + c}{3} + \frac{c - a}{2} x. \qquad \boxed{1}$$

2a) Approximationsfehler in den Stützstellen:

$$\begin{aligned} p(-1) - y_1 &= \tfrac{a+b+c}{3} - \tfrac{c-a}{2} - a = \tfrac{a+b+c}{3} - \tfrac{c+a}{2} &= \tfrac{2b-(a+c)}{6} \\ p(0) - y_2 &= \tfrac{a+b+c}{3} - b &= \tfrac{(a+c)-2b}{3} \\ p(1) - y_3 &= \tfrac{a+b+c}{3} + \tfrac{c-a}{2} - c = \tfrac{a+b+c}{3} - \tfrac{c+a}{2} &= \tfrac{2b-(a+c)}{6} \end{aligned} \qquad \boxed{1}$$

2b) Fehlerquadratsumme:

$$\sum_{i=1}^{3} [p(t_i) - y_i]^2 = \text{const} \cdot [2b - (a+c)]^2.$$

2c) Das Minimum, das $= 0$ ist, wird für $b = \dfrac{a+c}{2}$ erreicht $\boxed{1}$

Alternative

2a) Die Fehlerquadratsumme S ist immer ≥ 0.

2b) $S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p(t_i) = y_i \quad \Leftrightarrow \quad$ die Punkte (t_i, y_i) liegen auf einer Gerade: $\boxed{1}$

$$\frac{b-a}{0-(-1)} = \frac{c-b}{1-0} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{a+c}{2}. \qquad \boxed{1}$$

Aufgabe 2*:

Gegeben seien die Meßwerte

t_i	1	3	4
$f(t_i)$	2	5	7

für eine Größe $f(t)$,

die nach der Theorie einem Bildungsgesetz der Form $f(t) = 2at + bt^2$ genügen.

Bestimmen Sie die Parameter a, b optimal im Sinne der kleinsten Quadratmethode.

1) Überbestimmtes System: $\left\{ \begin{aligned} 2a+ \quad b &= 2, \\ 6a+ \quad 9b &= 5, \\ 8a+ \quad 16b &= 7, \end{aligned} \right.$ d.h. $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 9 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{c}.$

2) Die Normallösung, d.h. die Lösung der Gleichung $A^T A x = A^T c$:

$$A^T A x = \begin{pmatrix} 104 & 184 \\ 184 & 338 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 159 \end{pmatrix} = A^T c.$$

und es folgt

$$a = \frac{97}{108}, \quad b = -\frac{1}{54}.$$

Aufgabe 3*:

Gegeben seien die Meßwerte

t_i	-3	0	1
$f(t_i)$	5	7	8

für eine Größe $f(t)$,

die nach der Theorie einem Bildungsgesetz der Form $f(t) = at + b\cos\frac{\pi}{4}t + 5$ genügen. Bestimmen Sie die Parameter a, b optimal im Sinne der kleinsten Quadratmethode mit Hilfe der folgenden QR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{60}} \begin{pmatrix} 3\sqrt{6} & 1 \\ 0 & \sqrt{50} \\ -\sqrt{6} & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{10} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

1) Überbestimmtes System:
$$\begin{cases} -3a + & b\cos(-\frac{3\pi}{4}) & +5 = 5, \\ & b & +5 = 7, \\ a + & b\cos\frac{\pi}{4} & +5 = 8, \end{cases}$$

$$\text{d.h.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{c}.$$

2) Die Normalgleichung $A^TAx = A^Tc$ transformiert sich mittels QR-Zerlegung von A folgendermaßen:

$$A^TAx = A^Tc \quad \Rightarrow \quad R^T \underbrace{Q^TQ}_{=1} Rx = R^TQ^Tc \quad \Rightarrow \quad Rx = Q^Tc$$

Lösung des Systems $Rx = Q^Tc$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{10} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}}_{R} x = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{60}} \begin{pmatrix} 3\sqrt{6} & 0 & -\sqrt{6} \\ 1 & \sqrt{50} & 3 \end{pmatrix}}_{Q^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{c} = \frac{1}{\sqrt{60}} \begin{pmatrix} -3\sqrt{6} \\ 2\sqrt{50} + 9 \end{pmatrix}$$

und es folgt

$$b = \frac{2\sqrt{50} + 9}{6\sqrt{2}} = 2.7273, \quad a = -0.4714.$$

VIII. Zur Diskussion am 06.06.00 (I+P)

Aufgabe 1: Euler-Cauchy-Verfahren

zur nichtlinearen DGL $\begin{cases} y'' + y' - xy^2 = 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$

Näherungswerte für $y(\frac{1}{2}), y'(\frac{1}{2})$ (mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$).

1) Transformation auf ein System 1. Ordnung:

$$z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}, \quad z^{(0)} = z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Das äquivalente System ist $z'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ -z_2(x) + xz_1^2(x) \end{pmatrix} =: f(x, z(x))$.

a.) Implizites Euler-Cauchy-Verfahren:

$$z^{(1)} = z^{(0)} + hf(x_1, z^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z_2^{(1)} \\ -z_2^{(1)} + \frac{1}{2}(z_1^{(1)})^2 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$\begin{cases} z_1^{(1)} &= 1 + \frac{1}{2} z_2^{(1)} \\ z_2^{(1)} &= 2 - \frac{1}{2} z_2^{(1)} + \frac{1}{4}(z_1^{(1)})^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_1^{(1)} &= 1 + \frac{1}{2} z_2^{(1)} \\ \frac{1}{2} z_2^{(1)} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{12}(z_1^{(1)})^2 \end{cases}$$

Für $\xi := z_1^{(1)}$ haben wir eine quadratische Gleichung:

$$\xi = \frac{5}{3} + \frac{1}{12}\xi^2 \quad \Leftrightarrow \quad \xi^2 - 12\xi + 20 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1^{(1)} = 2 \quad \text{oder} \quad z_1^{(1)} = 10$$

und

$$z_2^{(1)} = \frac{4}{3} + \frac{1}{6} z_1^{(1)} \quad \Leftrightarrow \quad z_2^{(1)} = 2 \quad \text{oder} \quad z_2^{(1)} = \frac{4}{3} + \frac{50}{3} = 18$$

Aus zwei Möglichkeiten

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad z^{(1)} = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \end{pmatrix}$$

wählen wir diejenige, die $z^{(0)} = \binom{1}{2}$ am nächsten liegt, also

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b.)* Verbessertes Euler-Cauchy-Verfahren:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, z^{(n)}), \\ k_2 &= f(x_n + \tfrac{1}{2}h, z^{(n)} + \tfrac{1}{2}hk_1), \\ z^{(n+1)} &= z^{(n)} + hk_2. \end{aligned}$$

Wir starten bei $n = 0$, $x_0 = 0$, $h = \frac{1}{2}$ und setzen $z^{(0)} = z(0) = \binom{1}{2}$:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(0, z^{(0)}), \\ k_2 &= f(\tfrac{1}{4}, z^{(0)} + \tfrac{1}{4}k_1), \\ z^{(1)} &= z^{(0)} + \tfrac{1}{2}k_2. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} k_1 &= f(0, z^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 + 0 \cdot 1^2 = -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \\ z^{(0)} + \tfrac{1}{4}k_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \\ k_2 &= f\left(\tfrac{1}{4}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{1}{4}(\frac{3}{2})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{15}{16} \end{pmatrix}, \\ z^{(1)} &= z^{(0)} + \tfrac{1}{2}k_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{15}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{49}{32} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Näherungswerte sind also $\begin{pmatrix} y(\frac{1}{2}) \\ y'(\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = z^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{49}{32} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2: Lösung des Differenzen-AWP's:

$$\begin{cases} u_{n+3} - 5u_{n+2} + 8u_{n+1} - 4u_n = 0, \\ u_0 = 2, \quad u_1 = 4, \quad u_2 = 9. \end{cases}$$

1) Das zugehörige charakteristische Polynom lautet

$$p(z) = z^3 - 5z^2 + 8z - 4 = (z-1)(z^2 - 4z + 4) = (z-1)(z-2)^2.$$

Dieses hat

$$\begin{aligned} &\text{eine einfache Nullstelle bei} \quad z_1 = 1 \text{ und} \\ &\text{eine doppelte Nullstelle bei} \quad z_2 = 2. \end{aligned}$$

2) Daraus folgt (s. Satz 2.5 der Vorlesung), daß

$$u^0 = \{1^j\}_{j=0}^\infty, \quad u^1 = \{2^j\}_{j=0}^\infty, \quad u^2 = \{j\,2^{j-1}\}_{j=0}^\infty$$

ein Fundamentalsystem bilden.

3) Die allgemeine Lösung hat also die Form

$$u_j = c_1 + c_2\,2^j + c_3\,j\,2^{j-1}.$$

4) Jetzt bestimmen wir die Konstanten entsprechend der Anfangswerte:

$$\begin{aligned} u_0 &= c_1 + c_2 &&= 2, \\ u_1 &= c_1 + 2c_2 + c_3 &&= 4, \\ u_2 &= c_1 + 4c_2 + 4c_3 &&= 9. \end{aligned}$$

Wir haben

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 9 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \\ (2)-(1) \\ (3)-(1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 7 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \\ \\ (3)-3\cdot(2) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

und es gilt

$$c_1 = c_2 = c_3 = 1$$

5) Also ist die Lösung des Differenzen-AWP's gegeben durch

$$u_n = 1 + 2^n + n2^{n-1}.$$

vom 27. April **1. Übungsblatt (für Physiker und Informatiker)** bis 11. Mai, $15^{\underline{00}}$

Aufgabe 1: DGL mit getrennten Variablen $\boxed{y' = f(x)g(y)}$

Lösung. *Die allgemeine Lösung ist gegeben durch*

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C),$$

mit

$$F(x) = \int f(x)\,dx, \quad G(y) = \int 1/g(y)\,dy$$
$$G^{-1} := \text{die inverse Funktion von } G.$$

Für die Lösung des AWP's bestimmt man

$$C = G(y_0) - F(x_0)$$

aus $y(x_0) = y_0$.

Satz. *Sei* $f(x)$ *und* $g(y)$ *stetig auf* (a,b) *bzw.* (c,d), *und* $g(y) \neq 0$. *Dann ist für jedes* $x_0 \in (a,b)$ *und* $y_0 \in (c,d)$ *das AWP*

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0$$

lokal eindeutig lösbar.

Bemerkung. *Ist* $f(x,y) \equiv 0$ *für* $y = C$, *dann ist* $y \equiv C$ *eine Lösung zu* $y' = f(x,y)$.

a.) Existenzintervall.

Lösen Sie das AWP

$$y' = -2xy^2$$

mit den folgenden Anfangsbedingungen:

$$1)\ \ y(2) = 0; \quad 2)\ \ y(2) = \frac{1}{3}; \quad 3)\ \ y(2) = -\frac{1}{5}; \quad 4)\ \ y(2) = \frac{1}{5}.$$

Geben Sie jeweils die (Existenz-) Intervalle an, auf denen die Lösung definiert ist. $\boxed{5}$

b) Eindeutigkeit und maximale Lösung.

1) Finden Sie alle Lösungen des AWP's

$$y' = y^{2/3} \qquad \text{mit} \qquad \text{A)} \quad y(1) = 0; \qquad \text{B)} \quad y(1) = 1.$$

2) Bestimmen Sie im zweiten Fall das maximale Intervall, auf dem die Lösung eindeutig ist.

3) Was ist der Grund, A) daß im ersten Fall keine eindeutige lokale Lösung existiert, und
B) daß im zweiten Fall es keine eindeutige globale Lösung gibt, obwohl die lokale Lösung eindeutig ist.

$\boxed{6}$

$\sum_1 = \boxed{11}$

Aufgabe 2: **Reduktion auf eine DGL mit getrennten Variablen**

a.) Homogene DGL $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{Lösung: } \textit{Substitution } z = y/x \quad \rightsquigarrow \quad z' = \frac{1}{x}(f(z) - z).}$

Lösen Sie die folgende DGL und geben Sie das Existenzintervall von y an.

$$y' = \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y} \qquad y(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2}. \qquad \boxed{5}$$

b.) DGL der Form $\boxed{y' = f(ax + by)}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{Lösung: } \textit{Substitution } z = ax + by \quad \rightsquigarrow \quad z' = a + bf(z).}$

Lösen Sie die folgende DGL und geben Sie das Existenzintervall von y an.

$$y' = (x - y)^2, \quad y(0) = 0. \qquad \boxed{4}$$

c.) DGL der Form $\boxed{y' = f\left(\frac{ax+by+c}{px+qy+r}\right)}$

Lösung:

1) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ p & q\end{pmatrix} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad y' = g(ax + by)$ (DGL von b.)

2) $\det\begin{pmatrix} a & b \\ p & q\end{pmatrix} \neq 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ *es ex. eine Lösung* (x_*, y_*) *von* $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ px+qy+q=0 \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ *Ansatz* $X := x - x_*,\ Y(X) := y(x) - y_*$

$\rightsquigarrow$ $Y' = f\left(\frac{aX+bY}{pX+qY}\right)$ (homogene DGL)

Lösen Sie die folgende DGL und geben Sie das Existenzintervall von y an.

$$y' = -\frac{y - 1}{y + x}, \qquad y(0) = 2. \qquad \boxed{8}$$

Aufgabe 3: **Lineare DGL** $\boxed{y' = a(x)y + b(x)}$

Lösung des AWP's

1. *Lösung der linearen homogenen DGL* $y' = a(x)y$ $\rightsquigarrow$ $y(x) = CP(x)$;
2. *Variation der Konstanten* [*Substitution* $C = C(x)$] $\rightsquigarrow$ $C'(x)P(x) = b(x)$ $\rightsquigarrow$ $C(x) = Q(x) + c$;
3. *Allgemeine Lösung* $\rightsquigarrow$ $y(x) = [Q(x) + c]\,P(x)$;
4. *Bestimmung der Konstanten aus* $y(x_0) = y_0$ $\rightsquigarrow$ $c = c_0$.

Lösen Sie die folgenden DGL und geben Sie das Existenzintervall von y an.

A) $y' = -y\tan x + \cos x, \quad y(0) = 0$ B) $y' = -y + x, \quad y(0) = -1.$ $\boxed{5} + \boxed{5}$

Aufgabe 4: **Bernoulli-DGL** $\boxed{y'(x) = a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 1}$

Lösung: *Substitution* $z = y^{1-\alpha}$ $\rightsquigarrow$ $z' = (1-\alpha)\,a(x)\,z + (1-\alpha)\,b(x)$ (lineare DGL)

Bemerkungen:
1) *Für* $\alpha > 0$ *ist* $y \equiv 0$ *immer eine Lösung.*
2) *Die Exiztenzintervalle von* y *und* z *können sich vershieden.*

Lösen Sie die folgenden DGL und geben Sie das Existenzintervall von y an.

A) $y' = \dfrac{y}{2x} + \dfrac{x}{2y}, \quad x, y > 0 \quad y(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2};$ B) $y' = \dfrac{y}{x} + y^{2000}, \quad y(1) = 1, \quad x > 0$ $\boxed{6} + \boxed{6}$

$\sum = \boxed{50}$

Abgabe bis Donnerstag, 11. Mai, 15.00 Uhr.

$\rightarrow$ Kasten vor R 102, HG (mit Namen, Matr.-Nr. und Gruppenbezeichnung)

vom 11. Mai **2. Übungsblatt (für Physiker und Informatiker)** bis 25. Mai, $15^{\underline{00}}$

Aufgabe 1: Berechnen der Hauptvektoren

Definition. *Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle Matrix und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Ein Vektor $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, heißt* Hauptvektor p-ter Stufe zum Eigenwert *$\lambda \in \mathbb{C}$, wenn*

$$(A-\lambda I)^p v = 0, \quad \text{aber} \quad (A-\lambda I)^{p-1} v \neq 0.$$

Die Eigenvektoren zu λ sind Hauptvektoren 1. Stufe.

Basis von Hauptvektoren. *Da jede Matrix A auf Jordan-Normalform*

$$J = TAT^{-1}$$

transformiert werden kann und die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ gleichzeitig Hauptvektoren von J sind, stellen die entsprechenden Hauptvektoren von A eine Basis des $\mathbb{C}^n$ dar.

Berechnen der Hauptvektoren.

1) *Bestimmung der Eigenwerte von A;*
2) *Bestimmung der Eigenvektoren;*
3) *Wenn ein λ eine Vielfachheit $r > 1$ hat, aber*

$$\dim\left[\operatorname{Ker}(A-\lambda I)\right] < r$$

ist, gewinnt man die Hauptvektoren 2. Stufe zu λ durch Lösen von Gleichungen der Form

$$(A-\lambda I)\, v = w$$

wobei w ein Hauptvektor 1. Stufe ist (also ein Eigenvektor) usw.

Berechnen Sie Hauptvektoren für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{6}$$

Aufgabe 2: Lineares DGL-System $y' = Ay$. Berechnen eines Fundamentalsystems und einer Wronski-Matrix

Satz. *Die n linear unabhängigen Lösungen y_k von*

$$y'(t) = A\, y(t).$$

(d.h. ein Fundamentalsystem*) haben die Form*

$$y_k(t) = e^{At} v_k,$$

wobei v_k eine Basis des $\mathbb{C}^n$ durchläuft.

Definition *Die zugehörige Matrix*

$$W(t) := (y_1(t), \ldots, y_n(t))$$

heißt Wronski-Matrix.

Hilfssatz. *Wenn man die Hauptvektoren von A als Basis wählt, kann y_k wie folgt berechnet werden:*

$$y_k(t) = e^{At} v_k = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{t^j}{j!} (A-\lambda I)^j v_k$$

wobei v_k ein Hauptvektor p-ter Stufe ist.

Beispiel. *Ist w ein Eigenvektor zu λ, dann ist*

$$y(t) = e^{\lambda t} w$$

eine Lösung.

Beispiel. *Ist v der entsprechende Hauptvektor der Stufe 2, der wie oben durch Lösen $(A-\lambda I)\, v = w$ berechnet war, dann ist*

$$y(t) = e^{\lambda t}\left[v + t\,(A-\lambda I)\, v\right] = e^{\lambda t}\left[v + tw\right]$$

eine andere Lösung.

Berechnen Sie ein Fundamentalsystem und eine Wronski-Matrix zum linearen DGL-System

$$y' = Ay. \qquad \boxed{5}$$

Aufgabe 3: Homogenes lineares DGL-System $y' = Ay$, $y(t_0) = y_0$

Die allgemeine Lösung des DGL-Systems $y' = Ay$ ist gegeben durch $$y(t) = W(t)c := \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t)$$ *wobei $W(t)$ ein Wronski-Matrix ist.*	*Um eine Lösung $y_A(t) = W(t)c$ des AWP's* $$y' = Ay, \quad y(t_0) = y_0$$ *zu finden, bestimmt man c durch Lösen des linearen Gleichungssystems $W(t_0)c = y_0$.*

Lösen Sie das AWP

$$y' = Ay, \quad y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{3}$$

Aufgabe 4: Inhomogenes lineares DGL-System $y'(t) = Ay(t) + F(t)$, $y(t_0) = 0$
Variation der Konstanten

Eine spezielle Lösung $y_s(t)$ des DGL-Systems

$$y'(t) = Ay(t) + F(t), \quad \text{mit} \quad y_s(t_0) = 0,$$

bekommt man mit der Substitution $c = c(t)$ in die allgemeine Lösung, d.h. $y_s(t) = W(t)c(t)$. Dann gilt:

$$W(t)c'(t) := F(t) \quad \Rightarrow \quad y_s(t) = W(t)c(t) = W(t)\int_{t_0}^{t} \underbrace{W^{-1}(x)F(x)}_{c'(x)}\, dx$$

Man geht die folgende Schritte durch:
1) *Berechnen von $c'(x)$ als Lösung $W(x)c'(x) = F(x)$;*
2) *Integrieren: $c(t) = \int_{t_0}^{t} c'(x)\, dx$;*
3) *Berechnen von $y_s(t) = W(t)c(t)$*

Lösen Sie das AWP

$$y' = Ay + \begin{pmatrix} 0 \\ 4e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y(0) = 0. \qquad \boxed{5}$$

Aufgabe 5: Lineares DGL-System $y'(t) = Ay(t) + F(t)$, $y(t_0) = y_0$

Die Lösung ist gegeben durch $y = y_A + y_s$, wobei	y_A	*die Lösung von*	$y' = Ay$,	$y(t_0) = y_0$	*ist,*
	y_s	*die Lösung von*	$y' = Ay + F$,	$y(t_0) = 0$	*ist.*

Lösen Sie das AWP

$$y' = Ay + \begin{pmatrix} 0 \\ 4e^t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

$$\sum_{1-5} = \boxed{20}$$

Aufgabe 6: Zusammenfassung

Lösung des linearen DGL-Systems $y'(t) = Ay(t) + F(t)$, $y(t_0) = y_0$

1) *Bestimmung der Hauptvektoren*
2) *Berechnen des Fundamentalsystems und einer Wronski-Matrix $W(t)$*
3) *Allgemeine Lösung $y(t) = W(t)c$.*
   Bestimmung von c_0 als Lösung des Systems $W(t_0)\, c_0 = y_0$ (fällt aus, wenn $y_0 = 0$ ist).
4) *Spezielle Lösung des Systems (Variation der Konstanten)* (fällt aus, wenn $F(t) \equiv 0$ ist).
$$y_s' = Ay_s + F, \quad y_s(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_s(t) = W(t)\, c(t) = W(t)\int_{t_0}^{t} \underbrace{W^{-1}(x)F(x)}_{c'(x)}\, dx.$$
5) *Endliches Berechnen von $y(t) = y_s(t) + y_A(t) = W(t)\,[c(t) + c_0]$*

Lösen Sie das AWP

$$y' = Ay + F, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{12}$$

Fortsetzung auf der Seite 3

Aufgabe 7: Lineare DGL n-ter Ordnung $L(y) := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$

Um ein Fundamentalsystem S zur Diff. Gleichung

$$L(y) := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

zu bestimmen, löst man die charakteristische Gleichung

$$p_L(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

1) *Sei λ_i paarweise verschieden. Dann ist*
$$S = \{e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}.$$
2) *Sei $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p \in \mathbb{R}$ mit $p \leq n$. Dann ist*
$$S = \{e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{p-1}e^{\lambda_1 t}\} \cup \{e^{\lambda_{p+1} t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}.$$
3) *Sei $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$. Dann ist*
$$S = \{e^{at}\cos bt, e^{at}\sin bt\} \cup \{e^{\lambda_3 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Diff. Gleichungen

$$a)\quad y''' - y'' - 6y' = 0, \qquad b)\quad y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \qquad c)\quad y'' - 2y' + 2y = 0.$$ $\boxed{6}$

Aufgabe 8: Inhomogene lineare DGL n-ter Ordnung $L(y) = f(t)$

Eine inhomogene Diff. Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

löst man mittels des äquivalenten Systems

$$Y(t) = AY(t) + F(t)$$

mit

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Wenn $S = \{y_k\}_{k=1}^n$ ein in §7 bestimmtes Fundamentalsystem zu $L(y) = 0$ ist, dann hat eine Wronski-Matrix des äquivalenten Systems die Form

$$W(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Weiter läuft der Algorithmus wie für ein System (s. §§3-5)

Lösen Sie das AWP

$$y'' - 2y' + y = -\frac{e^t}{t^2}, \quad y(1) = y'(1) = 0.$$ $\boxed{6}$

Aufgabe 9: Inhomogene lineare DGL n-ter Ordnung der Form $L(y) = e^{\lambda t} r(t)$

Eine inhomogene Diff. Gleichung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = e^{\lambda t} r(t),$$

wobei $r(t)$ ein Polynom ist, hat eine spezielle Lösung der Form

$$y_s(t) = e^{\lambda t} q(t),$$

wobei $q(t)$ auch ein Polynom ist.

1) *Wenn $p_L(\lambda) \neq 0$ ist, wobei p_L das charasterische Polynom ist, dann gilt*
$$\deg q = \deg r \qquad .$$
2) *Wenn $\lambda = \lambda_i$ die k-fache Nullstelle von p_L ist, dann gilt*
$$\deg q = \deg r + k.$$
Die Koeffizienten von $q(t) = \sum_j b_j t^j$ kann man aus der Identität
$$L(e^{\lambda t} q(t)) \equiv e^{\lambda t} r(t)$$
bestimmen.

Lösen Sie das AWP

$$y''' - y'' - y' + y = 4e^t, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 6.$$ $\boxed{6}$

$\sum = \boxed{50}$

Abgabe bis Donnerstag, 25. Mai, 15.00 Uhr.

$\rightarrow$ Kasten vor R 102, HG (mit Namen, Matr.-Nr. und Gruppenbezeichnung)

vom 25. Mai **3. Übungsblatt (für Physiker und Informatiker)** bis 8. Juni, $15^{\underline{00}}$

Für eine numerische Lösung einer DGL höher Ordnung wendet man ein Runge-Kutta Verfahren (für die Lösung der DGL erster Ordnung) zum äquivalenten System *an.*

Bei der Anwendung eines (halb-) impliziten Verfahrens (wie z.B. der Trapezregel, oder rückwärts-Euler-Cauchy) muß man ein (lineares) Gleichungssystem lösen.

Aufgabe 1: Runge-Kutta-Verfahren

Sei y die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - xy' + y = 3, \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$$

Berechnen Sie mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k), & k_3 &= f(x_k + \tfrac{1}{2}h,\ y_k + \tfrac{1}{2}hk_2), \\ k_2 &= f(x_k + \tfrac{1}{2}h,\ y_k + \tfrac{1}{2}hk_1), & k_4 &= f(x_k + h,\ y_k + hk_3), \end{aligned}$$
$$y_{k+1} = y_k + \tfrac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

und der Schrittweite $h = 1$ eine Approximation von $y(1), y'(1)$. $\boxed{6}$

Aufgabe 2: Trapezregel

Sei y die Lösung der Differentialgleichung

$$y'''(x) = x^2 y''(x) + xy'(x) - 4y(x) + 4, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2.$$

Berechnen Sie mit der Trapezregel

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

und der Schrittweite $h = 1$ eine Approximation von $y(1), y'(1), y''(1)$. $\boxed{6}$

Aufgabe 3: Euler-Cauchy-Verfahren

Sei y die Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) = 2y(x) - xy'(x), \qquad y(2) = 5, \quad y'(2) = 4.$$

Berechnen Sie mit dem

a.) Euler-Cauchy-Verfahren: $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$

b.) rückwärtigen Euler-Cauchy-Verfahren: $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$

c.) verbesserten Euler-Cauchy-Verfahren: $k_1 = f(x_k, y_k)$,
$$k_2 = f(x_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hk_1)$$
$$y_{k+1} = y_k + hk_2$$

und der Schrittweite $h = 1$ jeweils eine Approximation von $y(3), y'(3)$. $\boxed{9}$

Aufgabe 4: Differenzengleichung n-ter Ordnung $\sum_{k=0}^{n} a_k u_{j+k} = 0$

Um ein Fundamentalsystem zur Differenzengleichung

$$\sum_{k=0}^{n} a_k u_{j+k} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

zu bestimmen, berechnet man die Nullstellen $\{\lambda_i\}$ des charakteristischen Polynoms

$$p(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

Seien $\{\lambda_i\}_{i=1}^{s}$, paarweise verschieden mit der Vielfachheit n_i (so daß $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$). Dann ist

$$\{\tbinom{j}{l}\lambda_i^{j-l}\}_{j=0}^{\infty}, \qquad l = 0, \ldots, n_i - 1; \quad i = 1, \ldots, s,$$

ein Fundamentalsystem, wobei

$$\tbinom{j}{l} = 0 \text{ für } j < l \qquad \text{sowie } 0^{j-l} = 0 \text{ für } j \leq l$$

zu setzen ist.

Bildet $u^0, \ldots, u^{n-1}$ ein Fundamentalsystem, dann ist eine allgemeine Lösung *der homogenen Differenzengleichung gegeben durch*

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} c_i u^i.$$

Um jetzt das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k u_{j+k} &= 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, \\ u_j &= v_j, \qquad j = 0, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

zu lösen, bestimmt man die Koeffizienten c_i aus den Anfangsbedingungen.

a.) Bestimmen Sie die Lösung zu

$$u_{j+2} - 5u_{j+1} + 6u_j = 0, \qquad u_0 = u_1 = 1; \qquad \boxed{5}$$

b.) Bestimmen Sie die Lösung zu

$$u_{j+4} - 9u_{j+3} + 30u_{j+2} - 44u_{j+1} + 24u_j = 0, \qquad u_0 = 0, \quad u_1 = -1, \quad u_2 = -2, \quad u_3 = 1. \qquad \boxed{10}$$

Hinweis. $z = 2$ und $z = 3$ sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$\sum = \boxed{36}$$

Abgabe bis Donnerstag, 8. Juni, 15.00 Uhr.

→ Kasten vor R 102, HG (mit Namen, Matr.-Nr. und Gruppenbezeichnung)

vom 8. Juni **4. Übungsblatt (für Physiker und Informatiker)** bis 23. Juni, $8^{\underline{00}}$

Aufgabe 1: Gedämpftes und ungedämpftes Newton-Verfahren

Für eine Näherungsberechnung von Nullstellen einer reellen Funktion f benutzt man

1) das (ungedämpfte) Newton-Verfahren:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$

2) das gedämpfte Newton-Verfahren:

$$\begin{aligned} d_k &:= -f(x_k)/f'(x_k), \\ r &:= \min\left\{i \in \mathbb{N}_+ : |f(x_k + \tfrac{1}{2^i} d_k)| \le |f(x_k)|\right\}, \\ x_{k+1} &:= x_k + \tfrac{1}{2^r} d_k. \end{aligned}$$

Bemerkung. *Das Newton-Verfahren benötigt einen guten Startwert x_0, da es nur lokal konvergent ist.*

Bemerkung. *Die Newton'sche Iterationsfolge ist eine Banach'sche Iterationsfolge:*

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \quad \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

d.h. eine Nullstelle von f ist ein Fixpunkt von ϕ.

Führen Sie jeweils fünf Iterationsschritte zur Approximation einer Nullstelle der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{x^2 + \frac{1}{2}}$$

aus und vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung:

a.) mit den Startwerten $x_0 = 2$ bzw. $x_0 = 2.1$ und dem (ungedämpften) Newton-Verfahren

b.) sowie mit dem Startwert $x_0 = 3$ und dem gedämpften Newton-Verfahren.

$\boxed{12}$

Aufgabe 2: Newton-Verfahren für ein Gleichungssystem

Für eine Näherungslösung des Gleichungssystems

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$$

berechnet man die Nullstellen von

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

nach dem Newton-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(n)} - \left(F'[(x,y)^{(n)}]\right)^{-1} F[(x,y)^{(n)}].$$

Eine äquivalente Formulierung ist

$$F'[(x,y)^{(n)}] \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}^{(n)} = F[(x,y)^{(n)}],$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(n)} - \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}^{(n)}.$$

Dadurch wird die Invertierung von $F'[(x,y)^n]$ vermieden und pro Schritt nur ein Gleichungssystem gelöst.

Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $(0,-1)$ aus, um eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 - x &= \frac{1}{4}, \\ 2x^2 + y^2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

zu approximieren.

$\boxed{10}$

Aufgabe 3: Gauß-Elimination und LR-Zerlegung

Ist die LR-Zerlegung von A bekannt, dann löst man das Gleichungssystem $Ax = b$ als

$$Ax = L\underbrace{Rx}_{y} = b,$$

also in zwei Schritten

$$Ly = b, \quad Rx = y.$$

Wenn die LR-Zerlegung durchführbar ist, gilt

$$\det A = \det R = \prod r_{ii}.$$

In diesem Fall haben wir

1) $r_{ii} \neq 0$ für alle i $\Leftrightarrow$ $Ax = b$ ist eindeutig lösbar $\forall b$.
2) $r_{ii} = 0$ für ein i $\Leftrightarrow$ $Ax = b$ hat entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 17 & 3 \\ 4 & 31 & 5+\alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5+\beta \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1) Für welche Werte α, β hat das Gleichungssystem $Ax = b$

a) genau eine Lösung, b) mehr als eine Lösung, c) keine Lösung?

Führen Sie die LR-Zerlegung durch und geben Sie gegebenenfalls alle Lösungen an.

2) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = c$ mit $\alpha = 1$.

$\boxed{8}$

Aufgabe 4: Cholesky–Zerlegung

Um zu bestimmen, ob eine symmetrische Matrix $A = A^T$ positiv definit ist, d.h.

$$(Ax, x) := x^T Ax > 0 \quad \forall x \neq 0,$$

führt man die LDL^T-Zerlegung von A durch und analysiert die Elemente d_i der diagonalen Matrix D.

1) A ist pos. (semi-) def. $\Leftrightarrow$ $d_i > 0$ ($d_i \geq 0$) $\forall i$
2) A ist neg. (semi-) def. $\Leftrightarrow$ $d_i < 0$ ($d_i \leq 0$) $\forall i$
3) A ist indefinit $\Leftrightarrow$ $d_i d_j < 0$ für einige i, j

Ist die LDL^T-Zerlegung von A bekannt, dann löst man das Gleichungssystem $Ax = b$ als

$$Ax = L\overbrace{D\underbrace{L^T x}_{z}}^{y} = b,$$

also in drei Schritten

$$Ly = b, \quad Dz = y, \quad L^T x = z.$$

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 4 & a+9 & a^2+a-4 & -a+11 \\ -2 & a^2+a-4 & a^3+a^2+4 & -(a^2+a+10) \\ 6 & -a+11 & -(a^2+a+10) & a+31 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 20 \\ -44 \end{pmatrix}.$$

a.) Für welche Parameter a ist A positiv definit?

b.) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für $a = 1$.

$\boxed{12}$

$\sum = \boxed{42}$

Abgabe bis Freitag, 23. Juni, 8.00 Uhr.

→ Kasten vor R 102, HG (mit Namen, Matr.-Nr. und Gruppenbezeichnung)

vom 23. Juni **5. Übungsblatt (für Physiker und Informatiker)** bis 7. Juli, $8^{\underline{00}}$

Scheinklausur für Physiker/innen:	Termin **Di. 18.07.2000, 14:00-16:00**	Hörsaal **I**

Einen **Übungsschein** erhält, wer	
Physik: • mindestens 50% der Punkte der Übungsaufgaben für Physiker/innen erreicht und • die Scheinklausur besteht.	**Informatik:** • mindestens 50% der Punkte der Übungsaufgaben für Informatiker/innen erreicht.
Dieser Schein ist ab August im Geschäftszimmer des Instituts – Raum 135, HG, 1. Stock – erhältlich.	

Aufgabe 1: Polynominterpolation

Gegeben sind die Daten

$$a)\ \begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & -3 & -3 & -1 & 9 \end{array},\quad b)\ \begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline g_i & 1 & -3 & -1 & 9 \end{array},\quad c)\ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_i & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline h_i & 1 & -3 & -3 & -1 & 9 \end{array}.$$

a.) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ dritten Grades zu f nach Lagrange und nach Newton.

b.) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $q(x)$ dritten Grades zu g in der Newton-Form, wobei Sie den Teil der schon berechneten Tabelle aus a) wiederverwenden.

c.) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $r(x)$ vierten Grades zu h in der Newton-Form, wobei Sie die schon berechnete Tabelle aus b) wiederverwenden.

$\boxed{10}$

Aufgabe 2: Interpolationsfehler

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \ln(2 - \sin(t))\, dt.$$

Der Wert $f(0.85)$ soll bis auf einen Fehler von $\frac{1}{3200}$ durch Polynominterpolation benachbarter Stützstellen berechnet werden. Zeigen Sie:

a.) die Genauigkeit der linearen Interpolation in den Punkten $0.8, 0.9$ genügt nicht (*Hinweis*: $\cos 1 > \frac{1}{2}$);

b.) die Genauigkeit der quadratischen Interpolation in den Punkten $0.8, 0.9, 1.0$ reicht schon aus.

$\boxed{8}$

Aufgabe 3: Methode der kleinsten Fehlerquadrate (Normalgleichungen)

Gegeben seien die Meßwerte

t_i	-3	0	1
$f(t_i)$	1	$5+\sqrt{2}$	7

für eine Größe $f(t)$, die nach der Theorie einem Bildungsgesetz der Form

$$f(t) = at + b\cos\tfrac{\pi}{4}t + 5$$

genügt. Bestimmen Sie die Parameter a, b optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate durch Lösung der Normalgleichungen.

$\boxed{6}$

Aufgabe 4: Methode der kleinsten Fehlerquadrate (QR-Zerlegung))

Gegeben seien die Meßwerte

t_i	-1	0	1
$f(t_i)$	1	1	-1

für eine Größe $f(t)$, die nach der Theorie einem Bildungsgesetz der Form

$$f(t) = at + b(1 + t - t^2)$$

genügt. Bestimmen Sie die Parameter a, b optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate mit Hilfe der folgenden QR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{6}$

Aufgabe 5: Gesamt- und Einzelschrittverfahren

Ausgehend vom Startvektor $x^0 = (1, 1, 1)$ führen Sie jeweils zwei Schritte des Gesamt- und des Einzelschrittverfahrens durch, um eine Näherungslösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

zu finden. $\boxed{8}$

$\sum = \boxed{38}$

Abgabe bis Freitag, 7. Juli, 8:00 Uhr.

$\rightarrow$ Kasten vor R 102, HG (mit Namen, Matr.-Nr. und Gruppenbezeichnung)

vom 20. April **1. Zusatzübungsblatt (für Physiker)** bis 4. Mai, $15^{\underline{00}}$

Aufgabe 1: Normen

a) Zeigen Sie, daß die folgende Abbildung die drei Axiome einer Norm erfüllt.

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|_\infty := \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$ $\boxed{3}$

b) Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichungen

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

und finden Sie Vektoren x^* und x^{**} für welche die Gleichheit in der linken bzw. rechten Ungleichung gilt. $\boxed{2}$

c) Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ (d.h. $x = (x_1, x_2)$) definieren Normen? Zeigen Sie für die übrigen, daß eines der Norm-Axiome nicht erfüllt ist.

(c_1) $x \mapsto \min(|x_1|, |x_2|)$

(c_2) $x \mapsto \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}\right)^2$ $\boxed{3}$

(c_3) $x \mapsto \|Ax\|_\infty, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (A ist also eine Matrix)

$\sum_1 = \boxed{8}$

Aufgabe 2: Stetigkeit, Richtungsableitung und Differenzierbarkeit

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4}, & \text{für} \quad (x,y) \ne 0 \\ 0, & \text{für} \quad (x,y) = 0 \end{cases} .$$

Untersuchen Sie die folgenden Fragen:

a.) Für welche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist f stetig? $\boxed{2}$

b.) Sei $v \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Richtungsvektor.
Für welche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ bzw. v existiert die Richtungsableitung $\partial_v f$? $\boxed{3}$

c.) Für welche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist f differenzierbar? $\boxed{4}$

d.) Sind die partiellen Ableitungen $\partial_x f$ und $\partial_y f$ in $(0,0)$ stetig? (**Hinweis:** keine Rechnung, nur Vergleich von Satz 9.15 der Vorlesung mit der (richtigen) Antwort auf die Frage (c).) $\boxed{1}$

$\sum_2 = \boxed{10}$

Aufgabe 3: Gradienten

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine bzgl. des Ursprungs kugelsymmetrische Funktion, d.h., f läßt sich in der Form

$$f(x) = g(r) \quad \text{mit} \quad r := \|x\| \quad \text{und} \quad g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

darstellen. Ferner sei g differenzierbar.

a) Drücken sie den Gradienten von f und die Richtungsableitung von f in Punkt x in Richtung $\frac{x}{\|x\|}$ durch g' aus. $\boxed{2}$

b) Geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für g an (ergänzend zur Differenzierbarkeit), damit f in $x = 0$ differenzierbar ist. $\boxed{4}$

c) Überprüfen Sie, ob die Funktion

$$g(r) = \begin{cases} r^2 \sin \frac{1}{r}, & \text{für} \quad r \neq 0; \\ 0, & \text{für} \quad r = 0 \end{cases}$$

diese Bedingungen erfüllt. $\boxed{2}$

d) Zeigen Sie (mit einem Gegenbeispiel), daß für die Differenzierbarkeit einer Funktion f in einem Punkt x_0 die Stetigkeit der partiellen Ableitung in diesem Punkt x_0 nicht notwendig ist (vgl. Satz 9.15 der Vorlesung). $\boxed{2}$

$\sum_3 = \boxed{10}$

Aufgabe 4: Transformation auf Polarkoordinaten

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$g : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}, \quad g(r, \phi) := f(r\cos(\phi), r\sin(\phi))$$

ihre Darstellung in Polarkoordinaten. Transformieren Sie den Gradienten von f auf Polarkoordinaten, d.h., drücken Sie ihn durch die partiellen Ableitungen von g und in den Variablen r und ϕ aus. $\boxed{8}$

Aufgabe 5: Kettenregel

Verwenden Sie die Kettenregel, um die totale Ableitung (die Jacobi Matrix) der Funktion

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{x}{y}\right)^2 \\ \tan\left(\frac{x}{y}\right) - \sin\left(\frac{x}{y}\right) \end{pmatrix} \qquad \boxed{8}$$

zu berechnen.

$\sum = \boxed{44}$

Abgabe bis Donnerstag, 4. Mai, 15.00 Uhr.

$\rightarrow$ Kasten vor R 102, HG (mit Namen, Matr.-Nr. und Gruppenbezeichnung)

vom 4. Mai **2. Zusatzübungsblatt (für Physiker)** bis 18. Mai, $15^{\underline{00}}$

Banach'scher Fixpunktsatz. *Gegeben seien eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$, eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, und es sei*

1) D abgeschlossen;
2) f kontrahierend, *d.h. es ex. ein $L \in (0,1)$, so daß*
$$\|f(x) - f(y)\| \le L\,\|x - y\| \quad \forall x, y \in D;$$
3) f selbstabbildend, *d.h. $f(D) \subset D$.*

Dann gilt:

a) *f besitzt auf D genau* einen *Fixpunkt $x^* = f(x^*)$;*
b) *für jedes $x_0 \in D$ konvergiert die durch die*
Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$
definierte Folge $\{x_n\}_0^\infty$ gegen x^*;
c) *für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelten die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} \|x_n - x^*\| &\le \tfrac{L}{1-L}\,\|x_n - x_{n-1}\| && \text{(a-posteriori)} \\ &\le \tfrac{L^n}{1-L}\,\|x_1 - x_0\|. && \text{(a-priori)} \end{aligned}$$

Hilfssatz. *Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar und $\|\cdot\|$ eine beliebige (Vektor-) Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:*

$$\sup_{x\in D} \|f'(x)\| \le L < 1 \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist kontrahierend.}$$

Hier ist $\|f'(x)\|$ die der Vektor-Norm zugeordnete Matrix-Norm der Jacobi-Matrix $f'(x)$ (s.u.)

Trick. *Ein Fixpunkt von f ist gleichzeitig ein Fixpunkt der inversen Funktion f^{-1}, d.h.*

$$x^* = f(x^*) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x^*) = f^{-1}[f(x^*)] = x^*.$$

Wenn f auf D z.B. keine Selbstabbildung *ist, kann man die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes für die inverse Funktion überprüfen.*

Bemerkung. *Die Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ kann mittels einer Norm angegeben werden, z.B.*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_\infty \le 1\}.$$

Diese Norm und die Norm, die man im Banachschen Fixpunktsatz benutzt, haben miteinander nichts zu tun.

Aufgabe 1: Matrix-Normen

Definition. *Es sei $\|\cdot\|_*$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die (dieser Vektornorm)* zugeordnete *Matrixnorm definiert durch*

$$\|A\|_* := \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} = \sup_{\|x\|_*=1} \|Ax\|_*.$$

Es gilt (nach Definition): $\|Ax\|_* \le \|A\|_* \cdot \|x\|_*$.

Beispiel. *Schon bekannte Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind*

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \max_{1\le i\le n} |x_i|, \\ \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_2 &= \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie die folgenden Gleichheiten

1) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|$ (Zeilensummennorm);

2) $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|$ (Spaltensummennorm);

3) $\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda} :\ \lambda \in \mathbb{R},\ A^T A x = \lambda x\}$ (Spektral- oder Hilbertnorm).

Geben Sie jeweils einen Vektor x an, für den gilt: $\|Ax\|_* = \|A\|_* \cdot \|x\|_*$.

$\boxed{3} + \boxed{3} + \boxed{3} = \boxed{9}$

Aufgabe 2: Skalares Fixpunktproblem

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}$.

a.) Zeigen Sie, daß f im Intervall $[2,3]$ und im Intervall $[6,7]$ jeweils genau einen Fixpunkt besitzt.

b.) Welche Iterationsvorschrift ist zur Berechnung des zweiten Fixpunktes geeignet?

c.) Wieviele Schritte ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ sind laut a-priori-Abschätzung höchstens nötig, um den ersten Fixpunkt mit einer Genauigkeit von $\epsilon = 10^{-2}$ zu approximieren?
Wieviele Schritte genügen tatsächlich ?
(Berechnen Sie mehrere Iterierte (z.B. mit dem Taschenrechner) und wenden Sie die a-posteriori-Abschätzung an).

$$\boxed{5} + \boxed{1} + \boxed{4} = \boxed{10}$$

Augfabe 3: Nichtlineares Gleichungssystem

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 8x &= y^2 + z^2 + 2, \\ 8y &= z^2 + x^2 + 2, \qquad \text{auf} \quad D = \{(x,y,z) : \ |x| + |y| + |z| \leq 1\}. \\ 8z &= x^2 + y^2 + 2 \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, daß dieses Gleichungssystem auf D genau eine Lösung besitzt. Verwenden Sie für den Kontraktivitätsbeweis die l_∞-Norm.
2. Führen Sie einen Schritt der entsprechenden Fixpunktiteration mit dem Startwert $(0,0)^T$ aus und geben Sie an, wieviele Schritte höchstens notwendig sind, um die Lösung mit der Genauigkeit $\epsilon = 10^{-3}$, gemessen in der l_∞-Norm, zu approximieren.
3. Andererseits gilt (aufgrund der Symmetrie):

   Ist (x^*, y^*, z^*) eine Lösung, dann sind (y^*, z^*, x^*) bzw. (z^*, x^*, y^*) weitere Lösungen.

   Überlegen Sie, wie sich dieser "Widerspruch" mit der oben bewiesenen Eindeutigkeit vereinbaren läßt, und verwenden Sie ihn, um die Lösung dieses Systems explizit anzugeben

$$\boxed{5} + \boxed{2} + \boxed{2} = \boxed{9}$$

$$\sum = \boxed{28}$$

Abgabe bis Donnerstag, 18. Mai, 15.00 Uhr.
→ Kasten vor R 102, HG (mit Namen, Matr.-Nr. und Gruppenbezeichnung)

2. Zusatzübungsblatt (Musterlösung)

Aufgabe 1

Um für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$c = \sup_{x \in D} f(x)$$

zu beweisen, reicht es zu zeigen

$$\begin{array}{ll} a) & f(x) \leq c, \quad \forall x \in D \\ b) & \text{es ex. ein } x^0 \in D, \text{ so daß } f(x^0) \geq c \end{array}$$

In unserem Fall ist $f(x) = \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*}$, und es reicht zu zeigen

$$\begin{array}{ll} a) & \|Ax\|_* \leq c_*(A)\,\|x\|_*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \\ b) & \text{es ex. ein } x^0 \in \mathbb{R}^n, \text{ so daß } \|Ax^0\|_* \geq c_*(A)\,\|x^0\|_* \end{array}$$

1a) Für l_∞-Norm gilt

$$|(Ax)_i| := |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq \max_{1\leq j\leq n} |x_j| \cdot \sum_{j=1}^n |a_{ij}| =: \|x\|_\infty \cdot \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

woraus

$$\|Ax\|_\infty := \max_{1\leq i\leq n} |(Ax)_i| \leq \|x\|_\infty \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| =: c_\infty(A)\|x\|_\infty$$

d.h.

$$\|Ax\|_\infty \leq c_\infty(A)\|x\|_\infty, \qquad c_\infty(A) := \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \qquad \boxed{1}$$

1b) Sei

$$c_\infty(A) := \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}|.$$

Für

$$(x^0)_j = \operatorname{sign} a_{i_0 j}$$

bekommt man

$$\|Ax^0\|_\infty \geq (Ax^0)_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} \operatorname{sign} a_{i_0 j} = \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| = c_\infty(A),$$

also

$$\|Ax^0\|_\infty \geq c_\infty(A)\|x^0\|_\infty. \qquad \boxed{1}$$

Deshalb

$$c_\infty(A) := \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} =: \|A\|_\infty \qquad \boxed{1}$$

2a) Für l_1-Norm gilt

$$|(Ax)_i| := |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j| \le \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\cdot|x_j|$$

woraus

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_1 &:= \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\cdot|x_j| \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|\cdot|x_j| = \sum_{j=1}^n \left(|x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \\
&\le \sum_{j=1}^n \left(|x_j| \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) = \left(\max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \sum_{j=1}^n |x_j| \\
&=: c_1(A)\|x\|_1,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\|Ax\|_1 \le c_1(A)\|x\|_1, \qquad c_1(A) := \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \qquad \boxed{1}$$

2b) Sei

$$c_1(A) := \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}|.$$

Für

$$x^0 = (0,\dots,0,\underbrace{1}_{j_0},0,\dots,0), \quad \|x^0\|_1 = 1,$$

bekommt man $(Ax^0)_i = a_{ij_0}$ und

$$\|Ax^0\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ij_0}| = c_1(A)$$

also

$$\|Ax^0\|_1 = c_1(A)\|x^0\|_1. \qquad \boxed{1}$$

Deshalb

$$c_1(A) := \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} =: \|A\|_1 \qquad \boxed{1}$$

3) Sei $B = B^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische positiv semi-definite Matrix. Dann sind alle Eigenwerte von B niht-negativ und aus den entspechenden Eigenvektoren kann man eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^n$ bilden.

3a) Sei $\{v_k\}_{k=1}^n$ eine orthogonale Basis, gebildet aus den Eigenvektoren von A^*A, d.h.

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{span}\{v_k\}, \quad A^*Av_k = \lambda_k v_k, \quad (v_k, v_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor mit der Entwicklung

$$x = \sum_{k=1}^n c_k v_k.$$

Dann

$$\|x\|_2 = (\sum_k c_k^2)^{1/2}, \quad A^*Ax = \sum_k \lambda_k c_k v_k,$$

und

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (\sum_k \lambda_k c_k v_k, \sum_k c_k v_k) = \sum_k \lambda_k c_k^2 \le \lambda_{\max} \sum_k c_k^2,$$

d.h.

$$\|Ax\|_2 \le \sqrt{\lambda_{\max}}\|x\|_2. \qquad \boxed{1}$$

3b) Für einen Vektor x^0, der dem maximalen Eigenwert $\lambda_{\max}$ von A^*A entspricht, bekommen wir

$$\|Ax^0\|_2^2 = (A^*Ax^0, x^0) = \lambda_{\max}(x^0, x^0) = \lambda_{\max}\|x^0\|_2^2$$

d.h.

$$\|Ax^0\|_2 = \lambda_{\max} \cdot \|x^0\|_2. \qquad \boxed{1}$$

Deshalb

$$\sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} =: \|A\|_2 \qquad \boxed{1}$$

$$\textstyle\sum_1 = \boxed{9}$$

Aufgabe 2: Skalares Fixpunktproblem für $f(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}$

Aufgabe 2a. Zeigen Sie, daß f im Intervall $[2,3]$ und im Intervall $[6,7]$ jeweils genau einen Fixpunkt besitzt.

A) Überprufung der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes für $D = [2,3]$

1) D ist offensichtlich abgeschlossen. $\boxed{1}$

2) f ist selbstabbildend auf $[2,3]$:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}} = 2.056, \quad f(3) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{3}} = 2.826; \\ f \text{ ist monoton wachsend, d.h. } f(2) \le f(x) \le f(3) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f([2,3]) \subset [2,3] \qquad \boxed{1}$$

3) f ist konrahierend auf $[2,3]$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} \quad \text{ist positiv und monoton wachsend, da} \\ \quad 4f''(x) = -\frac{1}{2x^{3/2}}e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x}e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}e^{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) > 0; \\ f'(3) = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}} = 0.816 < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \max_{x\in[2,3]} |f'(x)| \le L := 0.82.$$

$\boxed{1}$

Nach dem Mittelwertsatz gelten dann die folgende Ungleichungen:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \le \max_{\xi\in I} |f'(\xi)||x-y| \le L|x-y|.$$

4) Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat f in $[2,3]$ genau einen Fixpunkt.

B) Überprufung der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes für $D = [6,7]$

f ist keine Selbstabbildung auf $[6,7]$, da $f(6) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{6}} = 5.791 < 6$. Trick:

$$f(x) := \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln^2(2x) =: g(x), \quad x > 0.$$

2) g ist selbstabbildend auf $[6,7]$, da

$$\left.\begin{array}{l} g(6) = \ln^2 12 = 6.175, \quad g(7) = \ln^2 14 = 6.965 \\ g \text{ ist monoton wachsend (für } x > \frac{1}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g([6,7]) \subset [6,7]. \qquad \boxed{1}$$

3) g ist konrahierend auf $[6,7]$:

$$\left.\begin{array}{l} g'(x) = \frac{2\ln 2x}{x} \text{ ist positiv und monoton fallend, da} \\ \quad g''(x) = -\frac{2\ln 2x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2}(1 - \ln 2x) < 0, \quad x > \frac{e}{2}; \\ g'(6) = \frac{2\ln 12}{6} = 0.828 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \max_{x\in[6,7]} |g'(x)| \le L := 0.83.$$

$\boxed{1}$

4) Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat g bzw. f in $[6,7]$ genau einen Fixpunkt.

Aufgabe 2b. Welche Iterationsvorschrift ist zur Berechnung des zweiten Fixpunktes geeignet?

Nach obigem ist

$$x_{n+1} = \ln^2(2x_n) \quad \text{mit} \quad x_0 \in [6,7]$$

eine geeignete Iterationsfolge (die gegen des Fixpunktes konvergiert). $\boxed{1}$

Aufgabe 2c. 1) Wieviele Schritte ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$ sind laut a-priori-Abschätzung höchstens nötig, um den ersten Fixpunkt mit einer Genauigkeit von $\epsilon = 10^{-2}$ zu approximieren?

2) Wieviele Schritte genügen tatsächlich (berechnen Sie mehrere Iterierte und wenden Sie die a-posteriori-Abschätzung an)?

1) Die a-priori Abschätzung für $f(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}$ auf $[2,3]$ lautet

$$\begin{aligned} |x^* - x_n| &\leq \tfrac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| && \text{mit } x_0 := 2,\ x_1 = 2.056,\ L := 0.82 \\ &\leq \tfrac{(0.82)^n}{0.18} \cdot 0.06 && \text{mit einer Genauigkeit } \epsilon = 10^{-2} \\ &\leq 10^{-2}. \end{aligned}$$

$\boxed{1}$

Das gibt

$$(0.82)^n \leq \frac{0.18}{0.06} \cdot 10^{-2} = 0.03 \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0.03)}{\ln(0.82)} = 17.67.$$

$\boxed{1}$

Also genügen 18 Schritten.

2) Die a-posteriori Abschätzung ist

$$|x^* - x_n| \leq \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|.$$

Nach dem folgenden MAPLE-Program

```
x[1] := 2.;
x[2]:=0.5*exp(sqrt(x[1]));
for i from 2 to 18
  while abs(x[i]-x[i-1])*0.82/0.18 > 0.01
  do x[i+1]:=0.5*exp(sqrt(x[i]))
od;
```

```
 x[3]  := 2.097920625
 x[4]  := 2.128192150
.....................
x[12]  := 2.206106212
x[13]  := 2.208137709
```

genügen 13 Schritte. $\boxed{1}$

$\sum_2 = \boxed{10}$

Aufgabe 3: Nichtlineares Gleichungssystem

1) Eine Lösung des Gleichungssystems ist ein Fixpunkt der Funktion $F(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} y^2+z^2+2, \\ z^2+x^2+2, \\ x^2+y^2+2 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1}$$

Überprüfung der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes:

1.1) D ist offensichtlich abgeschlossen. $\boxed{1}$

1.2) F ist selbstabbildend, da

$$|x|+|y|+|z| \le 1 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+z^2 \le 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_i |F_i(x,y,z)| = \frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)+\frac{3}{4} \le 1 \quad \boxed{1}$$

d.h. $F(D) \subset D$.

1.3) Kontraktivität von F. Wegen Mittelwertsatz

$$L := \sup_{(x,y)\in D} \|F'(x,y)\| < 1 \quad \Rightarrow \quad F \text{ ist kontrahierend.}$$

Wir haben
$$F'(x,y,z) = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & y & z \\ x & 0 & z \\ x & y & 0 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{1}$$

woraus

$$\sup_{(x,y,z)\in D} \|F'(x,y,z)\|_\infty = \sup_{|x|+|y|+|z|\le 1} \frac{1}{4}\max\{|y+z|,|z+x|,|x+y|\} \le \frac{1}{4} =: L \qquad \boxed{1}$$

1.4) Nach dem B. Fixpunktsatz folgt, daß F auf D genau einen Fixpunkt besitzt.

2) Die a-priori Abschätzung für $F(x,y,z)$ auf D lautet

$$\begin{aligned} \|t^* - t_n\|_\infty &\le \tfrac{L^n}{1-L}\|t_1 - t_0\|_\infty && \text{mit } t_0 := (0,0,0),\ t_1 = (\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}),\ L := \tfrac{1}{4} \\ &\le \tfrac{(0.25)^n}{0.75}\cdot 0.25 && \text{mit einer Genauigkeit } \epsilon = 10^{-3} \qquad \boxed{1} \\ &\le 10^{-3}. \end{aligned}$$

Das gibt
$$(0.25)^n \le \frac{0.75}{0.25}\cdot 10^{-3} = 0.003 \quad \Rightarrow \quad n \ge \frac{\ln(0.003)}{\ln(0.25)} = 4.19. \qquad \boxed{1}$$

Also genügen 5 Schritten.

3) Da für einen Fixpunkt (x^*, y^*, z^*) auch der Punkt (y^*, z^*, x^*) ein Fixpunkt der Funktion F ist, folgt wegen der oben bewiesenen Eindeutigkeit des Fixpunktes von F, daß

$$(x^*, y^*, z^*) = (y^*, z^*, x^*) \quad \Rightarrow \quad x^* = y^* = z^*. \qquad \boxed{1}$$

Daraus folgt

$$8x^* = 2x^{*2} + 2 \quad \Rightarrow \quad x^{*2} - 4x^* + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^*_{12} = 2 \pm \sqrt{3}$$

d.h.

$$x^* = y^* = z^* = 2 - \sqrt{3} \qquad \boxed{1}$$

ist die (einzige) Lösung des Gleichungssystems auf

$$D = \{(x, y, z): \ |x| + |y| + |z| \leq 1\}.$$

$$\textstyle\sum_3 = \boxed{9}$$

3. Bemerkungen

3.1. Die Abgeschlossenheit der Menge D ist notwendig für die Existenz des Fixpunktes. Z.B. besitzt die Funktion

$$f(x) = x/2 \quad \text{auf} \quad D = (0,1]$$

keinen Fixpunkt.

3.2. Die Selbstabbildung für f ist auch notwendig für die Existenz des Fixpunktes (klar).

3.3. Nach dem Brauer'schen Fixpunktsatz besitzt jede Selbstabbildung eines konvexen Kompaktums in $\mathbb{R}^n$ mindestens einen Fixpunkt.

Also ist die Kontraktivität von f nicht notwendig für die Existenz des Fixpunktes.

Aber die Kontraktivität ist notwendig a) für die Eindeutigkeit des Fixpunktes;

b) für die Konvergenz der Fixpunktiterationsfolge

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

gegen diesen einzigen Fixpunkt.

Zu a): Die Funktion

$$f(x) = x^2, \quad x \in [0,1],$$

ist selbstabbildend aber nicht kontrahierend ($f'(1) = 2$), und hat zwei Fixpunkte in $[0,1]$.

Zu b): Die Funktion

$$f(x) = 1/x, \quad x \in [\tfrac{1}{2}, 2],$$

ist selbstabbildend aber nicht kontrahierend ($|f'(1/2)| = 4$), und für jeden Startwert $x_0 \in D$ hat man

$$x_{2k} = x_0, \quad x_{2k+1} = 1/x_0,$$

also keine Konvergenz zum Fixpunkt $x^* = 1$, wenn $x_0 \neq 1$ ist.

4. Andere Anwendungen des Ban. Fixpunktsatzes

4.1. Der Satz von Picard-Lindelöf. Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, und f sei Lipschitz-stetig auf D. Dann gilt das folgende. Für jedes paar $(x_0, y_0) \in D$ existiert ein Intervall $I \ni x_0$, so daß das AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in I,$$

genau eine Lösung besitzt. Die Fixpunktiteration

$$y_0(x) = y_0, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t)\, dt, \quad x \in I,$$

konvergiert glm gegen y.

4.2. Das Newtonsche Verfahren. Die Nullstelle von f, d.h. die Lösung x^* von

$$f(x) = 0,$$

kann man (unter geeigneter Voraussetzung an f) durch die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

approximieren.

4.3. Iterationsverfahren für die Lösung algebraischer Gleichungssysteme. Da

$$Ax = f \quad \Rightarrow \quad C(Ax - f) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x - C(Ax - f),$$

kann man für eine Näherungslösung die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = x_k - C(Ax_k - f) = (I - CA)\, x_k + Cf$$

benutzen. Findet man für die gegebene Matrix A eine Matrix C so, daß für eine Matrixnorm

$$\|I - CA\| \leq L < 1$$

gilt, dann ist das Iterationsverfahren konvergent.

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Differentialgleichungen und Numerik – SS 00

Prof. Dr. Henning Esser – Dr. Alexei Chadrine

---

vom 18. Mai | **3. Zusatzübungsblatt (für Physiker)** | bis 02. Juni, $8^{\underline{00}}$

Aufgabe 1: Schwingungen und Resonanzkatastrophe

Schwingungen und Resonanzkatastrophe. *Wird ein schwingfähiges System der Masse $m > 0$ einer zeitabhängigen äußeren Kraft $F(t)$ ausgesetzt, so genügt dessen Auslenkung $x(t)$ der* linearen Differentialgleichung 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$mx''(t) + kx'(t) + Dx(t) = F(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0. \qquad (*)$$

Dabei sind x_0 *bzw.* x'_0 *die Auslenkung bzw. ihre Änderung zur Zeit* $t = 0$,
$k \geq 0$ *ein Maß für die Reibung*
(die hier als proportional zur Geschwindigkeit angenommen wird) und
$D \geq 0$ *die Rückstellkraft des Systems.*

1) Lösen Sie $(*)$ für den homogenen Fall, wenn keine äußere Kraft wirkt, also

$$F(t) = 0 \quad \text{für alle Zeiten } t.$$

(Betrachten Sie alle möglichen Fälle für eine Beziehung zwischen m, k und D.) $\boxed{10}$

2) Lösen Sie $(*)$ für die periodische äußere Kraft

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad \text{mit} \quad F_0, \omega > 0.$$

Untersuche, unter welchen Voraussetzungen die sog. Resonanzkatastrophe eintritt,
d.h. $x(t)$ unbeschränkt ist. $\boxed{10}$

Hinweis. Ansatz für eine spezielle Lösung:

$$x(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \quad \text{bzw.} \quad x(t) = ct \sin(\omega t).$$

$$\sum = \boxed{20}$$

Aufgabe 2: Mäuserennen
(Die Punkte die bei dieser Aufgabe erzielt werden, gelten als Bonuspunkte)

In den Ecken des Quadrates $[-1,1]^2$ sitzen vier weiße Mäuse. Zur Zeit $t = 0$ beginnen diese so zu laufen, daß jede Maus jederzeit mit konstanter (aber nicht notwendig gleicher) Geschwindigkeit auf ihre Nachbarmaus zuläuft, d.h. genauer: Maus 1 läuft auf Maus 2,
Maus 2 auf Maus 3,
Maus 3 auf Maus 4,
Maus 4 wieder auf Maus 1 zu
(und alle vier laufen gegen den Uhrzeigersinn).

1) Geben Sie ein Anfangswertproblem an, deren Lösung die Bahnkurven der Mäuse sind.

2) Ab jetzt nehmen wir an, daß alle Mäuse die gleiche Geschwindigkeit v haben.
   a) Berechnen Sie die Bahnkurven der Mäuse.
   b) Wann treffen sich die Mäuse im Mittelpunkt des Quadrates (also im Punkt $(0,0)$)?
   c) Welche Weglange hat dann jede von ihnen zurückgelegt?

Hinweise.

1) Überlegen Sie zunächst, wie man mit Hilfe der Symmetrie des Problems seine Lösung auf die Berechnung der Bahnkurve einer Maus zurückführen kann.

2) Um die entsprechende DGL zu lösen, transformieren Sie sie auf Polarkoordinaten.

3) Folgern Sie dann, daß die Bahnkurve genau eine logarithmishe Spirale ist: $r = ae^{k\phi}$.

$\sum = \boxed{20}$

Abgabe bis Freitag, 02. Juni, 8.00 Uhr.
→ Kasten vor R 102, HG (mit Namen, Matr.-Nr. und Gruppenbezeichnung)