

Übungsblatt 9

Abgabetermin: 25.06.2014

Tutoraufgabe 1 (Ableitungsbäume)

Gegeben sei die folgende Grammatik $\mathcal{G} = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den folgenden Regeln in P :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aA \mid Ba \\ A &\rightarrow bAb \mid B \mid b \\ B &\rightarrow aA \end{aligned}$$

- a) Geben Sie einen Ableitungsbaum T für $abbba$ in \mathcal{G} an.
- b) Geben Sie die Baumkodierung $x(T)$ des Ableitungsbaums T aus **a)** an.

Tutoraufgabe 2 (Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen)

Zeigen Sie, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen unter Vereinigung abgeschlossen ist.

Gehen Sie dabei wie folgt vor. Seien $\mathcal{G}_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$ und $\mathcal{G}_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$ zwei kontextfreie Grammatiken. Geben Sie eine kontextfreie Grammatik \mathcal{G} an, die die Sprache $L(\mathcal{G}_1) \cup L(\mathcal{G}_2)$ erzeugt. Beweisen Sie formal (sowie im Beweis der Abgeschlossenheit unter Verkettung (Satz 6.45)), dass tatsächlich $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{G}_1) \cup L(\mathcal{G}_2)$.

Tutoraufgabe 3 (Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen)

Zeigen Sie, dass folgende Sprachen nicht kontextfrei sind.

- a) $L_1 := \{v\#w \mid v, w \in \{a, b\}^* \text{ und } v \text{ ist ein Infix von } w\}$ über dem Alphabet $\{a, b, \#\}$
- b) $L_2 := \{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i \leq j \leq k\}$ über dem Alphabet $\{a, b, c\}$

Aufgabe 4 (Ableitungsbäume)**2+2+1+1=6**

Eine kontextfreie Grammatik \mathcal{G} heißt *mehrdeutig*, falls es für ein Wort w mehrere Ableitungsbäume in \mathcal{G} gibt. Sie heißt *eindeutig*, falls sie nicht mehrdeutig ist.

- a) Geben Sie eine mehrdeutige Grammatik \mathcal{G} und eine eindeutige Grammatik \mathcal{G}' an, so dass $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{G}')$.
- b) Zeigen Sie, dass \mathcal{G} mehrdeutig ist, indem Sie für ein geeignetes Wort u zwei Ableitungsbäume in \mathcal{G} angeben.
- c) Geben Sie den Ableitungsbaum für u in \mathcal{G}' an.
- d) Geben Sie eine informelle Begründung dafür, dass \mathcal{G}' eindeutig ist.

Aufgabe 5 (Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen)**4**

Zeigen Sie, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen unter Iteration abgeschlossen ist.

Aufgabe 6 (Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen)**3+3=6**

Zeigen Sie, dass folgende Sprachen nicht kontextfrei sind.

- a) $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ist ein Palindrom und } |w|_a = |w|_b\}$
- b) $L_2 := \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid |w|_a = |w|_b \text{ und } |w|_c = |w|_d\}$

Aufgabe 7 (Linkslineare Grammatiken)**5**

Eine kontextfreie Grammatik \mathcal{G} ist *linkslinear*, wenn sie nur Regeln der Form

$$\begin{aligned} A &\rightarrow Ba, \\ A &\rightarrow a \end{aligned}$$

für Nichtterminalsymbole A, B , und Terminalsymbole a hat.

Zeigen Sie, dass linkslineare Grammatiken gerade die regulären Sprachen erzeugen. Genauer:

1. Für jede linkslineare kontextfreie Grammatik \mathcal{G} ist die Sprache $L(\mathcal{G})$ regulär.
2. Zu jeder regulären Sprache L gibt es eine linkslineare kontextfreie Grammatik \mathcal{G} , so dass $L(\mathcal{G}) = L \setminus \{\varepsilon\}$.

Hinweis: Sie können benutzen, dass die Klasse der regulären Sprachen unter Spiegelung abgeschlossen ist. (Siehe Übungsblatt 4 Aufgabe 7.)