Klausur für den Leistungsnachweis zur Vorlesung *Automatentheorie und Formale Sprachen*

18. Juli 2001

Aufgabe 1 (4 + 4 **Punkte**)

Geben Sie reguläre Ausdrücke $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{RegE}(\{a,b\})$ an, so daß

$$\begin{aligned} & [\![\alpha_1]\!] = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ endet nicht mit } ab\} \\ \text{und} \quad & [\![\alpha_2]\!] = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{in } w \text{ erscheint } ab \text{ genau einmal}\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (6 + 2 **Punkte**)

Sei $\mathfrak{A} = \langle \{q_0, q_1, \ldots, q_5\}, \{a,b\}, \delta, q_0, \{q_4, q_5\} \rangle \in \text{DFA}(\{a,b\})$ durch seine Transitionstafel wie folgt gegeben:

δ	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2
q_1	q_4	q_5
q_2	q_0	q_0
q_3	q_5	q_4
$\Rightarrow q_4$	q_3	q_5
$\Rightarrow q_5$	q_3	q_5

a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus den (minimalen) Faktorautomaten $\mathfrak{A}/_\sim$.

b) Weisen Sie die Minimalität des Faktorautomaten nach, indem Sie für je zwei Zustände p und q mit $p \neq q$ ein Wort angeben, das belegt, daß p und q nicht äquivalent sind.

Aufgabe 3 (4 + 4 **Punkte**)

a) Formulieren Sie das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen.

b) Zeigen Sie, daß jede endliche Sprache die im Pumping-Lemma für reguläre Sprachen geforderten Eigenschaften besitzt.

Aufgabe 4 (4 + 4 Punkte)

Die Grammatik $G \in \mathrm{CFG}(\{a, b\})$ in Chomsky-Normalform sei gegeben wie folgt:

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & AB \mid a \\ A & \longrightarrow & AS \mid a \\ B & \longrightarrow & SB \mid b \end{array}$$

a) Stellen Sie mit Hilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus fest, ob $aabaab \in L(G)$.

b) Stellen Sie mit Hilfe der Vorgängerabschluß-Methode fest, ob $abb \in L(G)$.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Das *Komplement* $\overline{w}$ eines Wortes $w \in \{a, b\}^*$ sei wie folgt induktiv definiert:

- $\overline{\varepsilon} := \varepsilon$
- $\overline{au} := b\overline{u}$
- $\overline{bu} := a\overline{u}$

Sei $L = \{w\overline{w^R} \mid w \in \{a, b\}^*\}$. Geben Sie eine Grammatik $G \in \mathrm{CFG}(\{a, b\})$ an, so daß

$$L(G) = L.$$

Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion (ohne Beweis).

Aufgabe 6 (4 + 4 Punkte)

Die Grammatik $G \in \mathrm{CFG}(\{a, b\})$ sei gegeben wie folgt:

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & AA \\ A & \longrightarrow & AAA \mid Aa \mid aA \mid b \end{array}$$

a) Zeigen Sie, daß G mehrdeutig ist.

b) Geben Sie eine eindeutige Grammatik $G' \in \mathrm{CFG}(\{a, b\})$ an, so daß $L(G') = L(G)$.

Aufgabe 7 (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Die Chomsky-Grammatiken G_1, G_2 und G_3 seien gegeben wie folgt:

$$\begin{array}{lrcl} G_1: & S & \longrightarrow & aB \mid bA \\ & A & \longrightarrow & Sa \mid a \\ & B & \longrightarrow & Sb \mid b \\ \\ G_2: & S & \longrightarrow & aAb \mid bAa \mid ab \\ & aAb & \longrightarrow & abAab \mid abab \\ & bAa & \longrightarrow & baAba \mid baba \\ \\ G_3: & S & \longrightarrow & AB \\ & A & \longrightarrow & a \mid ABA \\ & B & \longrightarrow & b \mid BAB \\ & AB & \longrightarrow & ab \mid aBAb \end{array}$$

Geben Sie für $k = 1, 2, 3$ die jeweils größte Zahl $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ an mit der Eigenschaft „G_k ist vom Typ i“. Begründen Sie Ihre Antwort. Erläutern Sie auch, warum Sie nicht $i + 1$ anstelle von i angegeben haben.
Warum sind $L(G_1)$, $L(G_2)$ und $L(G_3)$ jeweils vom Typ 1?

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Geben Sie eine wohldokumentierte Turingmaschine $\mathfrak{A} \in \mathrm{TM}(\{a, b\})$ an, so daß

$$L(\mathfrak{A}) = [\![a^* b^2 a]\!].$$

(*Hinweis:* Überlegen Sie zunächst, in welchen Sprachklassen $[\![a^* b^2 a]\!]$ liegt.)

Lösungsvorschlag *Automatentheorie und Formale Sprachen* „Typische Klausuraufgaben“ (Teil 1)

Aufgaben

Aufgabe 1

Sei Σ ein Alphabet, und sei

$$\mathcal{L}_{ko}(\Sigma) := \{L \subseteq \Sigma^* \mid \overline{L} := \Sigma^* \backslash L \text{ ist endlich}\}$$

die Klasse der *ko-endlichen* Sprachen über Σ.

a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{L}_{ko}(\Sigma)$ unter Vereinigung, Schnitt und Sternoperation abgeschlossen ist.

b) In welchen Sprachklassen ist $\mathcal{L}_{ko}(\Sigma)$ enthalten?

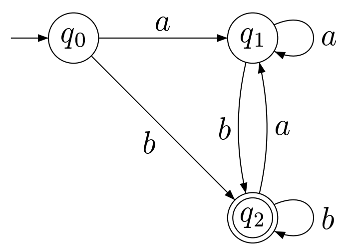
Aufgabe 2

Sei Σ ein Alphabet und $\# \notin \Sigma$. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei

$$split(L) := \{v\#w \mid v, w \in \Sigma^* \text{ und } vw \in L\}.$$

a) Geben Sie $split(L)$ für $L = \{a, bb, aba\}$ explizit an.

b) Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{DFA}(\{a, b\})$ gegeben wie folgt:



Geben Sie einen Automaten $\mathfrak{A}' \in \mathrm{DFA}(\{a, b, \#\})$ an, so daß $L(\mathfrak{A}') = split(L(\mathfrak{A}))$.

Aufgabe 3

Seien Σ und Σ' Alphabete mit $\Sigma' \subseteq \Sigma$. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei

$$sub(L) := \{w \in L \mid w \in \Sigma'^*\}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) L regulär $\curvearrowright$ $sub(L)$ regulär.

b) $sub(L)$ regulär $\curvearrowright$ L regulär.

Lösungen

Aufgabe 1

a) Vereinigung und Schnitt:

$$\begin{array}{ll} & L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{ko}(\Sigma) \\ \curvearrowright & \overline{L_1}, \overline{L_2} \text{ endlich} \\ \curvearrowright & \overline{L_1} \cap \overline{L_2} = \overline{L_1 \cup L_2} \text{ und } \overline{L_1} \cup \overline{L_2} = \overline{L_1 \cap L_2} \text{ endlich} \\ \curvearrowright & L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_{ko}(\Sigma) \end{array}$$

Sternoperation:

$$\begin{array}{ll} & L \in \mathcal{L}_{ko}(\Sigma) \text{ und } L \subseteq L^* \\ \curvearrowright & \overline{L^*} \subseteq \overline{L} \text{ endlich} \\ \curvearrowright & L^* \in \mathcal{L}_{ko}(\Sigma) \end{array}$$

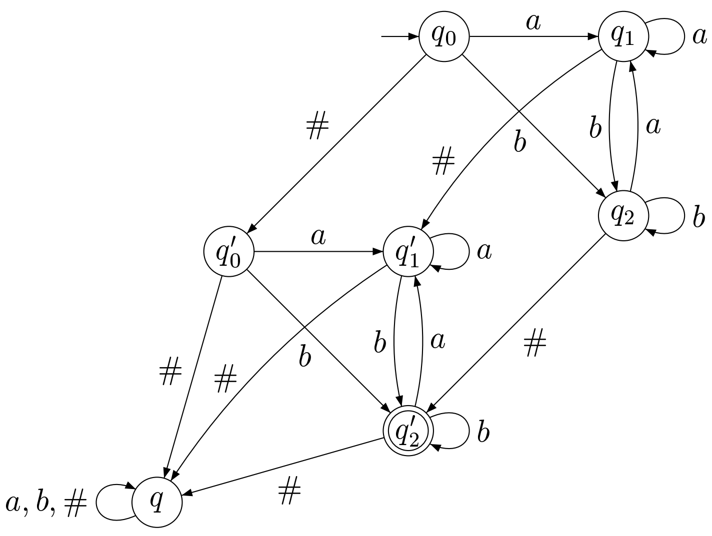
b) $\mathcal{L} \subseteq \mathrm{RegL}(\Sigma)$, denn

$$\begin{array}{ll} & L \in \mathcal{L}_{ko}(\Sigma) \\ \curvearrowright & \overline{L} \text{ endlich} \\ \curvearrowright & \overline{L} \in \mathrm{RegL}(\Sigma) \\ \curvearrowright & L \in \mathrm{RegL}(\Sigma) \end{array}$$

Aufgabe 2

a) $split(L) = \{\#a, a\#, \#bb, b\#b, bb\#, \#aba, a\#ba, ab\#a, aba\#\}$

b) Sei $\mathfrak{A}'$ gegeben durch



Aufgabe 3

a) *Beweis:* Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann existiert ein endlicher Automat $\mathfrak{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle \in$ DFA(Σ), so daß $L(\mathfrak{A}) = L$. Sei $\mathfrak{A}' = \langle Q \uplus \{q_{neu}\}, \Sigma, \delta', q_0, F \rangle \in$ DFA(Σ) gegeben wie folgt:

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) & \text{falls } q \in Q \text{ und } a \in \Sigma' \\ q_{neu} & \text{falls } q = q_{neu} \text{ oder } a \in \Sigma \backslash \Sigma' \end{cases}$$

Es gilt $L(\mathfrak{A}') = sub(L(\mathfrak{A})) = sub(L)$. Also ist $sub(L)$ regulär.

b) *Gegenbeispiel:* Seien $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $\Sigma' = \{c\}$. $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{c\}$ ist nicht regulär im Gegensatz zu $sub(L) = \{\varepsilon, c\}$. (Oder wähle $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $sub(L) = \{\varepsilon\}$.)

Lösungsvorschlag *Automatentheorie und Formale Sprachen*
„Typische Klausuraufgaben“ (Teil 2)

Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie durch Angabe einer kontextfreien Grammatik bzw. mit Hilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen:

a) $L_1 = \{uavb \mid u, v \in \{a,b\}^*,\ |u| = |v|\}$ ist kontextfrei.

b) $L_2 = \{a^n b^n c^i \mid i \leq n\}$ ist kontextfrei.

Lösung

a) L_1 ist kontextfrei. Sei nämlich $G \in \mathrm{CFG}(\{a,b\})$ gegeben wie folgt:

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & Ab \\ A & \longrightarrow & aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid a \end{array}$$

Es gilt $L(G) = L_1$.

b) Wir zeigen, daß L_2 nicht kontextfrei ist. Angenommen, L_2 sei kontextfrei. Dann existiert ein Pumping-Index $k \geq 1$ mit den Eigenschaften des Pumping-Lemmas. Sei $z = a^k b^k c^k \in L_2$. Es gibt also eine Zerlegung $z = uvwxy$, so daß

- $|vx| \geq 1$,
- $|vwx| \leq k$ und
- $uv^i wx^i y \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Wir unterscheiden für vwx zwei Fälle (die sich nicht notwendig ausschließen):

- $vwx \in [\![a^* b^*]\!]$
  Dann gilt $uwy = a^i b^j c^k$ mit $i < k$ oder $j < k$ und damit $uwy \notin L_2$. Widerspruch.
- $vwx \in [\![b^* c^*]\!]$. Dann gilt

$$|uv^2wx^2y|_b > |uv^2wx^2y|_a = k \quad \text{oder} \quad |uv^2wx^2y|_c > |uv^2wx^2y|_a = k$$

  und damit $uv^2wx^2y \notin L_2$. Widerspruch.

Nachdem wir beide Fälle zum Widerspruch geführt haben, können wir davon ausgehen, daß L_2 nicht kontextfrei ist.